

Họ và tên Học sinh: Lớp: Phòng: Số báo danh:

Câu 1 (3,0 điểm). Lớp 10A có 14 học sinh giỏi môn vẽ, 19 học sinh giỏi môn hát và 12 học sinh giỏi môn toán. Biết rằng có 11 học sinh vừa giỏi môn vẽ và môn hát, 9 học sinh vừa giỏi môn hát và môn toán, 5 học sinh vừa giỏi môn toán và môn vẽ, trong đó có đúng 10 học sinh chỉ giỏi đúng hai môn. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh giỏi cả ba môn vẽ, hát, toán?

Câu 2 (3,0 điểm). Bác An định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích $8ha$ (hecta). Nếu trồng $1ha$ ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng $1ha$ đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác An cần trồng bao nhiêu hecta cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác An chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

Câu 3 (3,0 điểm).

1. Cho đường thẳng $d : y = -2x + 1$ và parabol $(P) : y = x^2 + 2x - 3$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng d sao cho Δ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B và $AB = 12$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{2}{x^2} + 1$, với mọi $x \neq 0$. Tìm hàm số $y = f(x)$?

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$, AD là đường phân giác trong của góc A (D thuộc BC). Chứng minh rằng $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác đều ABC . Lấy các điểm M, N thỏa mãn $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Gọi I là giao điểm của AM và CN . Chứng minh rằng $BI \perp IC$.

Câu 6 (3,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 20, điểm $M(6;3)$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N(1;-2)$ thuộc đường thẳng BC và phương trình $BD : x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết hai điểm B và D cùng có tung độ là số dương.

Câu 7 (2,0 điểm). Từ 12 câu trắc nghiệm gồm 3 câu khó, 4 câu trung bình và 5 câu dễ. Cô giáo chọn ra 6 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có bao nhiêu cách tạo ra đề?

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Gọi x là số học sinh giỏi cả ba môn vẽ, hát, toán. Có $11-x+9-x+5-x=10 \Leftrightarrow x=5$.

Câu 2. Gọi x, y là ... Có $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 8 \\ 2x+3y \leq 18 \end{cases}$. Tiền lãi $F(x; y) = 40x + 50y$. Ra 6 ha ngô và 2 ha đậu xanh.

Câu 3. 1. $y = -2x + \frac{1}{5}$. 2. Có $\begin{cases} f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{2}{x^2} + 1 \\ f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x^2 + 1 \end{cases}$, giải ra $f(x) = x^2 - 1$.

Câu 4. $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD$, $CD^2 = AC^2 + AD^2 - AC \cdot AD$.

Lại có $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Suy ra $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{DC^2} = \frac{AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD}{AC^2 + AD^2 - AC \cdot AD}$

$\Leftrightarrow (AB^2 - AC^2)AD^2 = AB \cdot AC \cdot AD(AB - AC) \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (AB + AC)AD = AB \cdot AC \end{cases}$. Từ đó có đpcm.

Câu 5.

Giả sử $\vec{AI} = k\vec{AM}$. Ta có $\vec{CI} = \vec{AI} - \vec{AC} = k\vec{AM} - \vec{AC} = k(\vec{AB} + \vec{BM}) - \vec{AC} = k\left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}\right) - \vec{AC}$

Hay $\vec{CI} = k\left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}\right) - \vec{AC} = \frac{2k}{3}\vec{AB} + \left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{AC}$. Mặt khác $\vec{CN} = \vec{AN} - \vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AC}$.

Vì \vec{CI}, \vec{CN} cùng phương nên $\frac{2k}{3} : \frac{1}{3} = \left(\frac{k}{3} - 1\right) : (-1) \Leftrightarrow k = \frac{3}{7}$. Vậy $\vec{CI} = \frac{2}{7}\vec{AB} - \frac{6}{7}\vec{AC}$.

$\vec{BI} = \vec{CI} - \vec{CB} = \frac{2}{7}\vec{AB} - \frac{6}{7}\vec{AC} - (\vec{AB} - \vec{AC}) = -\frac{5}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}$.

Do đó $\vec{BI} \cdot \vec{IC} = \left(-\frac{5}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{6}{7}\vec{AC}\right) = \frac{1}{49}(10\vec{AB}^2 + 6\vec{AC}^2 - 32\vec{AB} \cdot \vec{AC})$

Vì tam giác ABC đều nên $AB = AC, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{1}{2}AB^2$. Suy ra $\vec{BI} \cdot \vec{IC} = 0$. Vậy $BI \perp IC$.

Câu 6.

$B(b; 1-b) \in BD, \vec{MB} \cdot \vec{NB} = 0$, suy ra $B(0; 1)$. Phương trình $AB: x - 3y + 3 = 0, BC: 3x + y - 1 = 0$.

$D(d; 1-d) \in BD, S_{ABCD} = 20 \Leftrightarrow d_{(D; AB)} \cdot d_{(D; BC)} = 20$ và tung độ D dương, suy ra $D(-5; 6)$.

Phương trình $AD: 3x + y + 9 = 0. AB \cap AD = \{A\} \Rightarrow A(-3; 0). \vec{DC} = \vec{AB} \Rightarrow C(-2; 7)$.

Câu 7. Số cách chọn ra 6 câu bất kỳ trong số 12 câu C_{12}^6 . Số cách chọn ra 6 câu mà không có câu khó C_9^6 . Số cách chọn ra 6 câu mà không có câu trung bình C_8^6 . Số cách chọn ra 6 câu mà không có câu dễ C_7^6 . Số cách chọn là: $C_{12}^6 - C_9^6 - C_8^6 - C_7^6 = 805$.

Các cách giải khác mà đúng vẫn chấm điểm