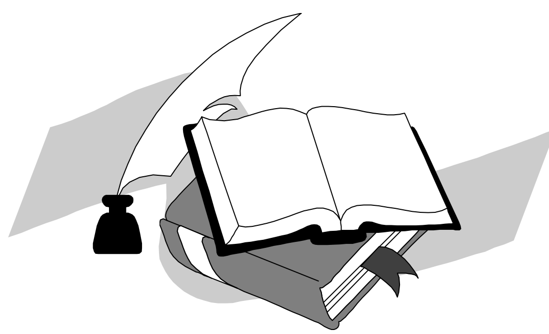
NGUYỄN QUỐC HOÀN

0913 661 886

Tuyển chọn và giới thiệu

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KSHS LỚP 12

Dành cho học sinh lớp 12 ôn thi THPT QG



Hà Nội, 9 – 2018

LỜI NÓI ĐẦU

Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số là chủ đề xuất hiện rất nhiều trong các bài thi THPT QG, và có đủ các cấp độ từ nhận biết đến vận dụng cao. Do đó tôi đã tập hợp các tài liệu hay từ các nguồn khác nhau vào cuốn sách này. Hi vọng các em học sinh sẽ học tốt hơn phần này và yêu thích môn toán hơn.

Sách tập trung chủ yếu chương đầu môn Toán Giải Tích 12 và hoàn toàn phù hợp chương trình lớp 12 hiện hành. Tuy nhiên thiếu sót khó tránh khỏi, rất mong nhận được góp ý tích cực của mọi người để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Trân trọng cảm ơn !

Hà Nội, 9 / 2018

Nguyễn Quốc Hoàn

MỤC LỤC

Bài 1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng.

1) Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x)\geq 0, \forall x\in \mathrm{K}$.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x)\leq 0, \forall x\in \mathrm{K}$.

2) Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.
- Nếu $f'(x)=0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K (hàm số $y=f(x)$ còn gọi là hàm hằng trên K).

3) Định lý mở rộng

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K. Nếu $f'(x)\geq 0\ \left(f'(x)\leq 0\right), \forall x\in \mathrm{K}$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K.

Chú ý: $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm. Tuy nhiên một số hàm số có $f'(x)=0$ tại vô hạn điểm nhưng các điểm rời rạc thì hàm số vẫn đơn điệu.

Ví dụ: Hàm số $y=2x-\sin 2x$.

Ta có $y'=2-2\cos 2x=2(1-\cos 2x)\geq 0, \forall x\in \mathbb{R}$.

$y'=0\Leftrightarrow 1-\cos 2x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in \mathbb{Z})$ có vô hạn điểm làm cho $y'=0$ nhưng các điểm đó rời rạc nên hàm số $y=2x-\sin 2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in \mathrm{K}$.

B. Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in \mathrm{K}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

C. Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in \mathrm{K}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

D. Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in \mathrm{K}$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.

Lời giải. Chọn C.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b)$, với $x_1,\ x_2$ bất kỳ thuộc $(a;b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $x_1>x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $x_1>x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Lời giải. A sai. Sửa lại cho đúng là "$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$".

B sai: Sửa lại cho đúng là "$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$".

C sai: Sửa lại cho đúng là "$x_1>x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$".

D đúng (theo định nghĩa). **Chọn D.**

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2}>0$ với mọi $x_1,x_2\in(a;b)$ và $x_1\neq x_2$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $x_2>x_1\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải trên $(a;b)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải trên $(a;b)$.

Lời giải. A sai: Sửa lại cho đúng là "$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$".

B sai: Sửa lại cho đúng là "$x_2>x_1\Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1)$".

C đúng (theo dáng điệu của đồ thị hàm đồng biến). **Chọn C.**

D sai (đối nghĩa với đáp án C).

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in(a;b)$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một hữu hạn điểm $x\in(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ với mọi $x_1,x_2\in(a;b)$ và $x_1\neq x_2$.

Lời giải. Chọn C. Sửa lại cho đúng là "Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in(a;b)$"

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x)+g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ và đều nhận giá trị dương trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

C. Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

D. Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ và đều nhận giá trị âm trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x).g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

Lời giải. A sai: Vì tổng của hàm đồng biến với hàm nghịch biến không kết luận được điều gì.

B sai: Để cho khẳng định đúng thì $g(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

C sai: Hàm số $f(x)$, $g(x)$ phải là các hàm dương trên $(a;b)$ mới thoả mãn.

D đúng. **Chọn D.**

Câu 6. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $-f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $\dfrac{1}{f(x)}$ nghịch biến trên $(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $f(x)+2016$ đồng biến trên $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số $-f(x)-2016$ nghịch biến trên $(a;b)$.

Lời giải. Ví dụ hàm số $f(x)=x$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$, trong khi đó hàm số $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$. Do đó B sai. **Chọn B.**

Câu 7. Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ thì hàm số $y=f(x+2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(-2;4)$.

Lời giải. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 2 đơn vị, ta sẽ được đồ thị của hàm số $y=f(x+2)$. Khi đó, do hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ nên hàm số $y=f(x+2)$ đồng biến trên $(-3;0)$. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm nhanh. Ta ốp $x+2\in(-1;2)\longrightarrow -1<x+2<2\leftrightarrow -3<x<0$.

Câu 8. Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì hàm số $y=f(2x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải. Tổng quát: Hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(nx)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right)$. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm nhanh. Ta ốp $2x\in(0;2)\longrightarrow 0<2x<2\leftrightarrow 0<x<1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên $(a;b)$.

B. Hàm số $y=-f(x)-1$ nghịch biến trên $(a;b)$.

C. Hàm số $y=-f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

D. Hàm số $y=f(x)+1$ đồng biến trên $(a;b)$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến $(1;+\infty)$.

Lời giải. Đạo hàm: $y'=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 11. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$ nghịch biến trên khoảng nào được cho dưới đây?

A. $(-1;3)$. **B**. $(-\infty;-3)$ hoặc $(1;+\infty)$. **C**. $\mathbb{R}$. **D**. $(-\infty;-1)$ hoặc $(3;+\infty)$.

Lời giải. Ta có: $y'=3x^2-6x-9$.

Ta có $y'\leq 0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$. **Chọn A.**

Câu 12. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số?

A. $y=x^3-3x^2$. **B**. $y=-x^3+3x^2-3x+2$. **C**. $y=-x^3+3x+1$. **D**. $y=x^3$.

Lời giải. Để hàm số nghịch biến trên toàn trục số thì hệ số của x^3 phải âm. Do đó A & D không thỏa mãn.

Xét B: Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-(x-1)^2\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra hàm số này luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 13. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải. Ta có $y'=8x^3>0\Leftrightarrow x>0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **Chọn B.**

Câu 14. Cho hàm số $y=2x^4-4x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, $y'<0$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

D. Trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đã cho đồng biến.

Lời giải. Ta có $y'=8x^3-8x=8x\left(x^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Vẽ phác họa bảng biến thiên và kết luận được rằng hàm số

● Đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

● Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. **Chọn B.**

Câu 15. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+3x^2-4$. **B**. $y=-x^3+x^2-2x-1$.

C. $y=-x^4+2x^2-2$. **D**. $y=x^4-3x^2+2$.

Lời giải. Hàm trùng phương không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó ta loại C & D.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ số thì hệ số của x^3 phải âm. Do đó loại A.

Vậy chỉ còn lại đáp án B. **Chọn B.**

Thật vậy: Với $y=-x^3+x^2-2x-1\longrightarrow y'=-3x^2+2x-2$ có $\Delta'=-5<0$.

Câu 16. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B**. $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **C**. $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **D**. $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq1.$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **Chọn C.**

Chú ý: Sai lầm hay gặp là chọn A hoặc B. Lưu ý rằng hàm bậc nhất trên nhất này là đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải. Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq1.$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **Chọn D.**

Câu 18. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\neq-2.$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$. **Chọn D.**

Bình luận: Hàm số đồng biến trên tất cả các khoảng con của các khoảng đồng biến của hàm số. Cụ thể trong bài toán trên:

- Hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$;
- $(1;+\infty)\subset(-2;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 19. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{-x+2}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{-x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{-x+2}$.

Lời giải. Ta có

A. $y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\neq -2.$ B. $y'=\dfrac{-4}{(x+2)^2}<0,\ \forall x\neq -2.$

C. $y'=0,\ \forall x\neq 2$ D. $y'=\dfrac{4}{(x-2)^2}>0,\ \forall x\neq 2.$

Chọn B.

Câu 20. Cho hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $[0;1]$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên toàn tập xác định

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $[0;1]$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên toàn tập xác định.

Lời giải. Tập xác định $\mathrm{D}=[-1;1]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên $[0;1]$. **Chọn C.**

Câu 21. Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào đã cho dưới đây?

A. $(0;2)$. **B**. $(0;1)$. **C**. $(1;2)$. **D**. $(-1;1)$.

Lời giải. Tập xác định $\mathrm{D}=[0;2]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. **Chọn C.**

Câu 22. Cho hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;4)$. **B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$. **D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathrm{D}=[1;4]$. Đạo hàm $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(1;4)\\x-1=4-x\end{cases}\longrightarrow x=\dfrac{5}{2}\in(1;4)$.

Vẽ bảng biến thiên, suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.. **Chọn C.**

Câu 23. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B**. $y=2x-\cos 2x-5$. **C**. $y=x^3-2x^2+x+1$. **D**. $y=\sqrt{x^2-x+1}$.

Lời giải. Chọn B. Vì $y'=2+2\sin 2x=2(\sin 2x+1)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=-1$.

Phương trình $\sin 2x = -1$ có vô số nghiệm nhưng các nghiệm tách rời nhau nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 24. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = (x-1)^2 - 3x + 2$. **B.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **C.** $y = \dfrac{x}{x+1}$. **D.** $y = \tan x$.

Lời giải. Xét hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 25. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = 2x + \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = -x^3 - 3x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

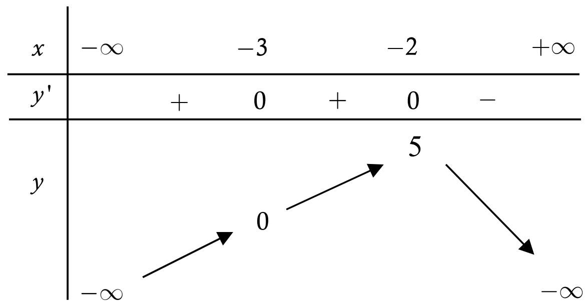
C. Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

D. Hàm số $y = 2x^4 + x^2 + 1$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Lời giải. Xét hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

I. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$.

II. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;5)$.

III. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

IV. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

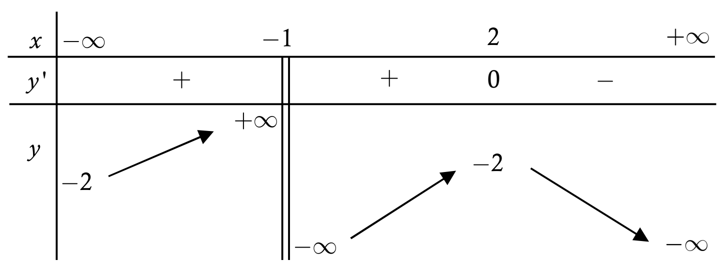
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Suy ra II. Sai; III. Đúng; IV. Đúng.

Ta thấy khoảng $(-\infty;-3)$ chứa khoảng $(-\infty;-5)$ nên I Đúng. Vậy chỉ có II sai. **Chọn A.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;+\infty)$ và $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(-1;2)$.

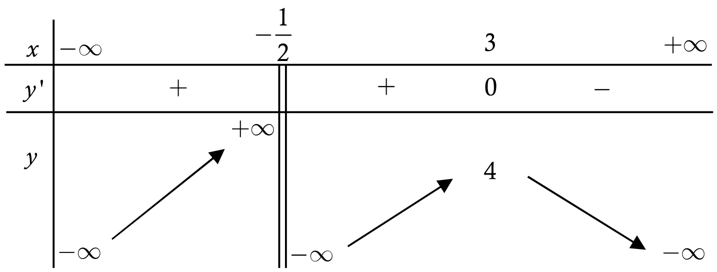
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-2;2)$.

Lời giải.

Vì $(0;2)\subset(-1;2)$, mà hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ nên suy ra C đúng. **Chọn C.**

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

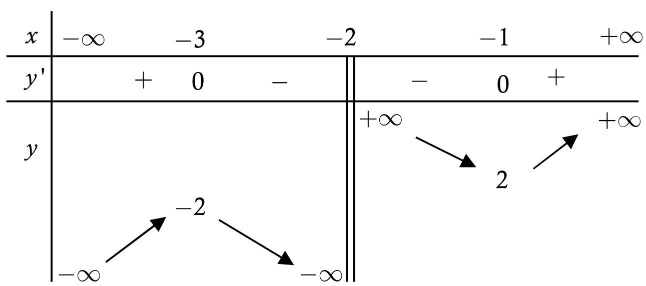
D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số

● Đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$.

● Nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

B. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng -3.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu là 2.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét sau

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)\longrightarrow$ A sai (sai chỗ dấu $\cup$).

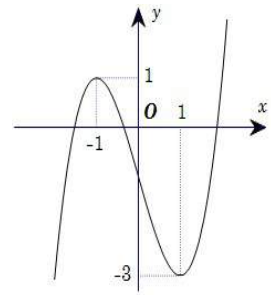
Hàm số có giá trị cực đại $y_{CD}=-2\longrightarrow$ B sai.

Hàm số đồng biến khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)\longrightarrow$ C đúng.

Hàm số có điểm cực tiểu là $-1\longrightarrow$ D sai.

Chọn C.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

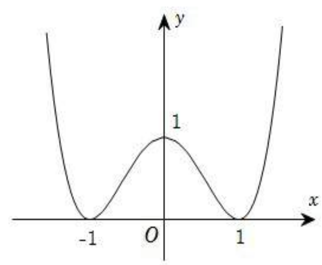
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có kết quả: Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$ nên các khẳng định **A, B, C** đúng.

Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì khẳng định **D** sai.

Ví dụ: Ta lấy $-1{,}1\in(-\infty;-1),\ 1{,}1\in(1;+\infty): -1{,}1<1{,}1$ nhưng $f(-1{,}1)>f(1{,}1)$. **Chọn D.**

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

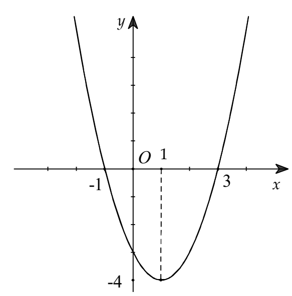
B. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải. Chọn D.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có nhận xét:

- $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "–" khi qua điểm $x=-1$.
- $f'(x)$ đổi dấu từ "–" sang "+" khi qua điểm $x=3$.

Do đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy B đúng. **Chọn B.**

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=x^3+x^2+8x+\cos x$ và hai số thực $a,\ b$ sao cho $a<b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(a)=f(b)$. **B.** $f(a)>f(b)$.

C. $f(a) < f(b)$.

D. Không so sánh được $f(a)$ và $f(b)$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 2x + 8 - \sin x = (3x^2 + 2x + 1) + (7 - \sin x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. **Chọn C.**

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ và hai số thực $u,\ v \in (0;1)$ sao cho $u > v$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(u) = f(v)$.

B. $f(u) > f(v)$.

C. $f(u) < f(v)$.

D. Không so sánh $f(u)$ và $f(v)$ được.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1);\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Vẽ bảng biến thiên ta thấy được hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó với $u,\ v \in (0;1)$ thỏa mãn $u > v \Rightarrow f(u) < f(v)$. **Chọn C.**

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) > 0,\ \forall x > 0$. Biết $e \simeq 2{,}718$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$.

B. $f(e) - f(\pi) \geq 0$.

C. $f(e) + f(\pi) < 2f(2)$.

D. $f(1) + f(2) = 2f(3)$.

Lời giải. Từ giải thiết suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó

- $\begin{cases} e < 3 \rightarrow f(e) < f(3) \\ \pi < 4 \rightarrow f(\pi) < f(4) \end{cases} \longrightarrow f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$. Vậy A đúng. **Chọn A.**
- $e < \pi \rightarrow f(e) < f(\pi) \rightarrow f(e) - f(\pi) < 0$. Vậy B sai.

Tương tự cho các đáp án C và D.

Câu 36. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

A. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0;\ c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ a > 0;\ b^2 - 3ac < 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0;\ c > 0 \\ a > 0;\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0;\ c > 0 \\ a > 0;\ b^2 - 3ac \geq 0 \end{array}\right.$.

Lời giải. Quan sát các đáp án, ta sẽ xét hai trường hợp là: $a = b = 0$ và $a \neq 0$.

- Nếu $a = b = 0$ thì $y = cx + d$ là hàm bậc nhất $\rightarrow$ để y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $c > 0$.
- Nếu $a \neq 0$, ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 37. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập xác định.

A. $m \leq 1$.

B. $m \geq 3$.

C. $-1 \leq m \leq 3$.

D. $m < 3$.

Lời giải. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Ycbt $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($y' = 0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$.

Chọn B.

Cách giải trắc nghiệm. Quan sát ta nhận thấy các giá trị m cần thử là:

✓ $m = 3$ thuộc B & C nhưng không thuộc A, D.

✓ $m = 2$ thuộc C & D nhưng không thuộc A, B.

- Với $m = 3 \longrightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \longrightarrow y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó ta loại A và D.

● Với $m=2\longrightarrow y=x^3+3x^2+2x+2\longrightarrow y'=3x^2+6x+2$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x+2=0$ có $\Delta>0$ nên $m=2$ không thỏa nên loại C.

Câu 38. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(4m-3)x+2017$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=3$.

Lời giải. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=x^2-2mx+4m-3$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4m+3\leq 0\Leftrightarrow 1\leq m\leq 3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tham số m thỏa mãn ycbt là $m=3$. **Chọn D.**

Câu 39. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải. TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow y'\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta'\leq 0\Leftrightarrow m^2+3(4m+9)\leq 0\Leftrightarrow -9\leq m\leq -3$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-9;-8;\ldots;-3\}$. **Chọn C.**

Sai lầm hay gặp là "Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$". Khi đó ra giải ra $-9<m<-3$ và chọn D.

Câu 40. Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2x^2+(m+3)x+m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Lời giải. TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=mx^2-4x+m+3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1. ● $m=0$ thì $y'=-4x+3\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{3}{4}$ (không thỏa mãn).

TH2. ● $\begin{cases}a=m>0\\ \Delta'_{y'}=-m^2-3m+4\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 1$.

Suy ra giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là $m=1$. **Chọn D.**

Câu 41. Cho hàm số $y=(m+2)\frac{x^3}{3}-(m+2)x^2+(m-8)x+m^2-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m\leq -2$. **D.** $m\geq -2$.

Lời giải.

Ta có $y'=(m+2)x^2-2(m+2)x+m-8$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm):

TH1 ● $m+2=0\Leftrightarrow m=-2$, khi đó $y'=-10\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

TH2 ● $\begin{cases}a=m+2<0\\ \Delta'=(m+2)^2-(m+2)(m-8)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2<0\\ 10(m+2)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<-2$.

Hợp hai trường hợp ta được $m\leq -2$. **Chọn C.**

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$.

A. $m<5$. **B.** $-2\le m\le\dfrac{3}{2}$. **C.** $m>-2$. **D.** $m<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)$.

Xét phương trình $y'=0$ có $\Delta'=(m+1)^2+3(2m^2-3m+2)=7(m^2-m+1)>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm $x_1<x_2$ với mọi m.

Để hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x_1<x_2\le 2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)<0\\(x_1-2)(x_2-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2<4\\x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2(m+1)}{3}<4\\\dfrac{-(2m^2-3m+2)}{3}-2.\dfrac{2(m+1)}{3}+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\-2\le m\le\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}.$$ **Chọn B.**

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000;1000)$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 999. **B.** 1001. **C.** 998. **D.** 1998.

Lời giải.

Ta có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)=6.\left[x^2-(2m+1)x+m(m+1)\right]$.

Xét phương trình $y'=0$ có $\Delta=(2m+1)^2-4m(m+1)=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm $x_1<x_2$ với mọi m.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+1\\x_1x_2=m(m+1)\end{cases}$.

Để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x_1<x_2\le 2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-2)+(x_2-2)<0\\(x_1-2)(x_2-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2<4\\x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1<4\\m(m+1)-2(2m+1)+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 1$$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-999;-998;...;1\}$.

Vậy có 1001 số nguyên m thuộc khoảng $(-1000;1000)$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

A. $m\le 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $-1\le m\le 0$. **D.** $m\ge -1$.

Lời giải.

Đạo hàm $y'=3x^2-6(m+1)x+3m(m+2)=3.\left[x^2-2(m+1)x+m(m+2)\right]$.

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-m(m+2)=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x=m,\ x=m+2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số nghịch biến trên $[0;1]\longleftrightarrow[0;1]\subset[m;m+2]$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 0\\m+2\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 0.$$ **Chọn C.**

Câu 45. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-4$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $m\ge\frac{12}{7}$. **B.** $m\le\frac{12}{7}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $1\le m\le\frac{12}{7}$.

Lời giải. Ta có $y'=-x^2+2(m-1)x+m+3$.

Xét phương trình $y'=0$ có $\Delta'=(m-1)^2+(m+3)=m^2-m+4>0,\forall m\in\mathbb{R}$.

Suy ra phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm $x_1<x_2$ với mọi m.

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x_1\le 0<3\le x_2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-y'(0)\le 0\\-y'(3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+3\ge 0\\-9+6(m-1)+m+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -3\\m\ge\frac{12}{7}\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{12}{7}$. **Chọn A.**

Cách 2. YCBT $\Leftrightarrow y'=-x^2+2(m-1)x+m+3\ge 0,\ \forall x\in(0;3)$

$\longleftrightarrow m(2x+1)\ge x^2+2x-3,\ \forall x\in(0;3)\longleftrightarrow m\ge\frac{x^2+2x-3}{2x+1},\ \forall x\in(0;3).$ (*)

Khảo sát hàm $g(x)=\frac{x^2+2x-3}{2x+1}$ trên khoảng $x\in(0;3)$, ta được $\max\limits_{(0;3)}g(x)=g(3)=\frac{12}{7}$.

Do đó $(*)\longleftrightarrow m\ge\max\limits_{(0;3)}g(x)=\frac{12}{7}$.

Câu 46. Biết rằng hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3(m-1)x^2+9x+1$ (với m là tham số thực) nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng giao với $(x_1;x_2)$ bằng rỗng. Tìm tất cả các giá trị của m để $|x_1-x_2|=6\sqrt{3}$.

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-3$, $m=1$. **D.** $m=-1$, $m=3$.

Lời giải. Ta có $y'=x^2+6(m-1)x+9$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=6\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}=6\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\\sqrt{\Delta'}=3\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\Delta'=27\Leftrightarrow 9(m-1)^2-9=27\Leftrightarrow(m-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-1\end{array}\right.$.

Chọn D.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 1.

A. $m=-\frac{9}{4}$. **B.** $m=3$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m=\frac{9}{4}$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2+6x+m$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9-3m>0\\2\frac{\sqrt{\Delta'}}{|a|}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\2.\frac{\sqrt{9-3m}}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\m=\frac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{9}{4}$. **Chọn D.**

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 2.

A. $m=0$. **B.** $m<3$. **C.** $m=2$. **D.** $m>3$.

Lời giải. Tính $y'=3x^2+6x^2+m.$

Ta nhớ công thức tính nhanh "Nếu hàm bậc ba $(a>0)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng α thì phương trình đạo hàm có hai nghiệm và trị tuyệt đối hiệu hai nghiệm bằng α"

Với α là một số xác định thì m cũng là một số xác định chứ không thể là khoảng $\longrightarrow$ Đáp số phải là A hoặc C .

Thử với $m=0$ phương trình đạo hàm $3x^2+6x=0$ có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$ và khoảng cách giữa chúng bằng 2. **Chọn A.**

Câu 49. Cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

A. $1<m\le 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\le 1$. **D.** $1<m<2$.

Lời giải. Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x=4x\left[x^2-(m-1)\right]$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m-1 \end{array}\right.$.

● Nếu $m-1\le 0\Leftrightarrow m\le 1\longrightarrow y'=0$ có một nghiệm $x=0$ và y' đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi qua điểm $x=0\longrightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1;3)$. Vậy $m\le 1$ thỏa mãn.

● Nếu $m-1>0\Leftrightarrow m>1\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{m-1} \\ x=\sqrt{m-1} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{m-1}$		0		$\sqrt{m-1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến tiên, ta có ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{m-1}\le 1\Leftrightarrow m\le 2\xrightarrow{m>1} 1<m\le 2$.

Hợp hai trường hợp ta được $m\in(-\infty;2]$. **Chọn B.**

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m=1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\ne 0$.

Lời giải. Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

TH1 ● $m\le 0\longrightarrow y'=0$ có một nghiệm $x=0$ và y' đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi qua điểm $x=0\longrightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

TH2 ● $m>0\longrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $-\sqrt{m};\ 0;\ \sqrt{m}$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{m};0\right)$ và $\left(\sqrt{m};+\infty\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\sqrt{m}\right)$ và $\left(0;\sqrt{m}\right)$. Do đó trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Cách khác. Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hàm số chỉ có một cực trị $\Leftrightarrow a.b\le 0\Leftrightarrow m\le 0$ nhưng vấn đề cực trị ở bài này chưa học.

Câu 51. Cho hàm số $y=\left(m^2-2m\right)x^4+\left(4m-m^2\right)x^2-4$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp:

● Hệ số $a=m^2-2m=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \longrightarrow y=-4 \text{ (loại)} \\ m=2 \longrightarrow y=4x^2-4 \end{array}\right.$. Hàm số $y=4x^2-4$ có đồ thị là một parabol nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó $m=2$ thỏa mãn. (Học sinh rất mắc phải sai lầm là không xét trường hợp $a=0$)

● Hệ số $a=m^2-2m\neq 0$. Dựa vào dáng điệu đặc trưng của hàm trùng phương thì yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị thàm số có một cực trị và đó là cực tiểu $\longleftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a>0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b\geq 0 \end{cases}$

$\longleftrightarrow \begin{cases} m^2-2m>0 \\ 4m-m^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>2 \\ 0\leq m\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leq 4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{3;4\}$.

Vậy $m=\{2;3;4\}$. **Chọn D.**

Nhận xét. (Bài này có nhắc đến cực trị của hàm số, kiến thức về cực trị nó nằm ở Bài sau)

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

A. $m>2$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $m\geq 2$. **D.** $m>1$.

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Với $-m+1<0 \Leftrightarrow m>1$ thì $y'<0,\ \forall x\neq m \longrightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$.

Ycbt $\longleftrightarrow (-\infty;2)\subset(-\infty;m) \Leftrightarrow m\geq 2$: (thỏa mãn). **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $y'=\dfrac{-m+1}{(x-m)^2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} y'<0, \forall x<2 \\ x\neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1<0 \\ m\neq(-\infty;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1<0 \\ m\in[2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 2.$

Câu 53. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y'>0, \forall x\neq m$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+3>0 \Leftrightarrow -1<m<3 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{0;1;2\}$. **Chọn D.**

Sai lầm hay gặp là cho $y'\geq 0, \forall x\neq m \Leftrightarrow -1\leq m\leq 3 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-1;0;1;2;3\}$.

Câu 54. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x+2m-3}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-14)$. Tính tổng T của các phần tử trong S.

A. $T=-9$. **B.** $T=-5$. **C.** $T=-6$. **D.** $T=-10$.

Lời giải. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{3m-2\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-5m+5}{(x-3m+2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-14) \Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in(-\infty;-14)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5>0 \\ x\neq 3m-2 \end{cases}, \forall x<-14 \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5>0 \\ 3m-2\notin(-\infty;-14) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5>0 \\ 3m-2\geq -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -4\leq m<1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-4;-3;-2;-1;0\} \longrightarrow T=-10$. **Chọn D.**

Câu 55. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là khoảng $(a;b)$. Tính $P=b-a$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=1$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3-m\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\longleftrightarrow y'<0, \forall x\neq 3-m \Leftrightarrow m^2-3m+2<0$

$\Leftrightarrow 1<m<2 \Leftrightarrow m\in(1;2)\equiv(a;b)\longrightarrow P=b-a=1$. **Chọn D.**

Câu 56. Gọi S là tập hợp các số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tính tổng T của các phần tử trong S.

A. $T=35$. **B.** $T=40$. **C.** $T=45$. **D.** $T=50$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-1}{2m}\right\}$. Đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-10m}{(2mx+1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)\Leftrightarrow y'<0, \forall x\in(3;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2-10m<0 \\ x\neq\dfrac{-1}{2m} \end{cases}, \forall x>3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m<0 \\ \dfrac{-1}{2m}\notin(3;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m<0 \\ \dfrac{-1}{2m}\leq 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0<m<10 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;2;3...;9\}\longrightarrow T=45$. **Chọn C.**

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m+1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\in[1;+\infty)$. **B.** $m\in(3;+\infty)$. **C.** $m\in[2;3)$. **D.** $m\in(-\infty;1]\cup[2;3)$.

Lời giải. Đặt $t=\tan x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\longrightarrow t\in(0;1)$.

Hàm số trở thành $y(t)=\dfrac{t-2}{t-m+1}\longrightarrow y'(t)=\dfrac{3-m}{(t-m+1)^2}$.

Ta có $t'=\dfrac{1}{\cos^2 x}>0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, do đó $t=\tan x$ **đồng biến** trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\longleftrightarrow y'(t)>0, \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3-m>0 \\ t-m+1\neq 0 \end{cases}, \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m>0 \\ m-1\neq t \end{cases}, \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m>0 \\ m-1\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ 2\leq m<3 \end{array}\right.$$ **Chọn D.**

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{\sin x-1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

A. $m\geq -1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<-1$. **D.** $m\leq -1$.

Lời giải. Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\longrightarrow t\in(0;1)$.

Hàm số trở thành $y(t)=\dfrac{t+m}{t-1}\longrightarrow y'(t)=\dfrac{-1-m}{(t-1)^2}$.

Ta có $t'=\cos x<0, \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, do đó $t=\sin x$ **nghịch biến** trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\longleftrightarrow y'(t)>0, \forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-m>0 \\ t-1\neq 0 \end{cases}, \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow -1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$. **Chọn C.**

Nhận xét. Khi ta đặt ẩn t, nếu t là hàm đồng biến trên khoảng đang xét thì giữ nguyên câu hỏi trong đề bài. Còn nếu t là hàm nghịch biến thì ta làm ngược lại câu hỏi trong đề bài.

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $m\in(-3;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-3)$. **D.** $m\in(-3;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải. Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)\longrightarrow t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Hàm số trở thành $y(t)=\dfrac{2t+3}{2t-m}\longrightarrow y'(t)=\dfrac{-2m-6}{(2t-m)^2}$.

Ta có $t'=-\sin x<0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$, do đó $t=\cos x$ **nghịch biến** trên $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Do đó YCBT $\longleftrightarrow y(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\longleftrightarrow y'(t)>0,\ \forall t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6>0 \\ 2t-m\neq 0 \end{cases}, \forall t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ m\neq 2t \end{cases}, \forall t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ m\notin(1;2) \end{cases} \Leftrightarrow m<-3.$ **Chọn C.**

Nhận xét. Do $t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\to 2t\in(1;2)$. Và $m\notin(1;2)\longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

Câu 60. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-mx-1}{1-x}$ nghịch biến trên các khoảng xác định.

A. $m<0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m=0$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2+2x-m-1}{(1-x)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -x^2+2x-m-1\leq 0, \forall x\in\mathrm{D}\longleftrightarrow x^2-2x+1+m\geq 0,\ \forall x\in\mathrm{D}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ -4m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 0.$ **Chọn B.**

Câu 61. Biết rằng hàm số $y=2x+a\sin x+b\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2\leq 2$. **B.** $a^2+b^2\geq 2$. **C.** $a^2+b^2\leq 4$. **D.** $a^2+b^2\geq 4$.

Lời giải. Ta có $y'=2+a.\cos x-b.\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Để hàm số đã cho luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($y'=0$ có hữu hạn nghiệm) $\Leftrightarrow 2+a.\cos x-b.\sin x\geq 0 \Leftrightarrow b.\sin x-a.\cos x\leq 2.$ (*)

- Nếu $a^2+b^2=0$ thì A đúng & C cũng đúng.
- Nếu $a^2+b^2\neq 0$ thì $(*)\Leftrightarrow \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sin x-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x\leq \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin(x-\alpha)\leq \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq 1\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 4$. **Chọn C.**

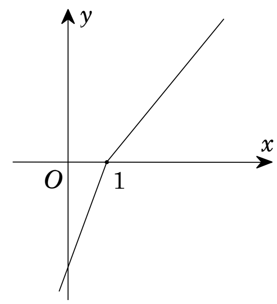
Câu 62. Tìm các giá trị của b để hàm số $f(x)=\sin x-bx+c$ nghịch biến trên toàn trục số.

A. $b\geq 1$. **B.** $b<1$. **C.** $b=1$. **D.** $b\leq 1$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=\cos x-b$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\longleftrightarrow f'(x)\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\longleftrightarrow \cos x\leq b, \forall x\in\mathbb{R}\longleftrightarrow b\geq 1$. **Chọn A.**

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

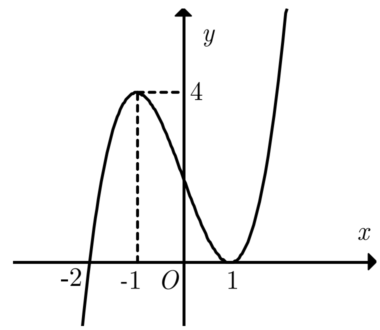
B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x)>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 64. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\quad(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

- $f'(x)>0$ khi $\left[\begin{array}{l}-2<x<1\\ x>1\end{array}\right.\longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$, $(1;+\infty)$.

Suy ra A và C đều đúng.

- $f'(x)<0$ khi $x<-2\longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Suy ra D đúng, B sai. **Chọn B.**

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. **Chọn A.**

Bài 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và $x_0 \in (a;b)$.

1. Định lí 1

● Nếu tồn tại số h sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0. Khi đó:

- ✓ x_0 được gọi là một **điểm cực đại của hàm số** $f(x)$.
- ✓ $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại của hàm số** $f(x)$.

● Nếu tồn tại số h sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Khi đó:

- ✓ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu của hàm số** $f(x)$.
- ✓ $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập xác định K.

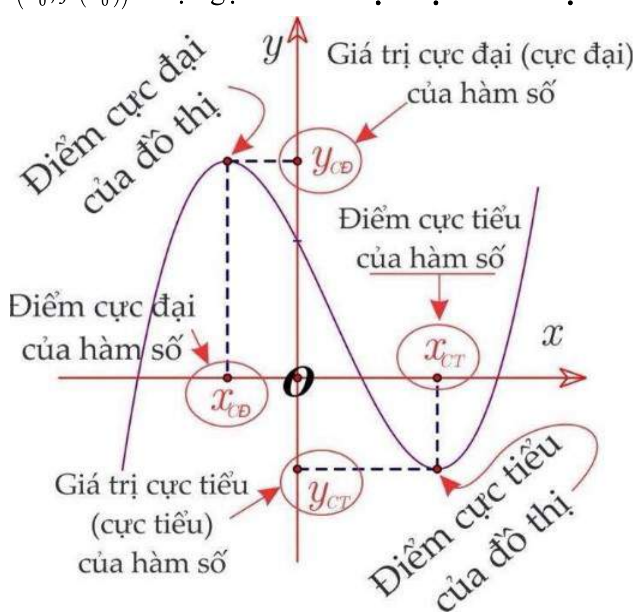
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)**.

2. Chú ý

Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập xác định K mà $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a,b) \subset \mathrm{K}$ và (a,b) chứa x_0.

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định K của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số** f.



3. Định lý 2

● $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \longrightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$.

● $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \longrightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

4. Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là $y=mx+n$, trong đó $mx+n$ là dư thức trong phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$.

Hoặc cũng có thể sử dụng công thức giải nhanh: $y=f(x)-\dfrac{f'(x).f''(x)}{18a}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số không có cực trị trên $(a;b)$.

B. Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì hàm số không có cực trị trên $(a;b)$.

C. Nếu $f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x_0\in(a;b)$ thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;f(x_0))$ song song hoặc trùng với trục hoành.

D. Nếu $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0\in(a;b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(a;x_0)$ và nghịch biến trên $(x_0;b)$.

Lời giải. Các Mệnh đề A, B, C đều đúng theo định nghĩa trong SGK.
Xét mệnh đề D. Vì mệnh đề này chưa chỉ rõ ngoài $x_0\in(a;b)$ là cực đại của $f(x)$ thì còn có cực trị nào khác nữa hay không. Nếu có thêm điểm cực đại (hoặc cực tiểu khác) thì tính đơn điệu của hàm sẽ bị thay đổi theo.
Có thể xét ví dụ khác: Xét hàm $f(x)=x^4-2x^2$, hàm số này đạt cực đại tại $x_0=0\in(-2;2)$, nhưng hàm số này không đồng biến trên $(-2;0)$ và cũng không nghịch biến trên $(0;2)$.

Chọn D.

Câu 2. Cho khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ (có thể trừ điểm x_0). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.

B. Nếu $f'(x_0)=0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0.

C. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)=0$ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm x_0.

D. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)\neq 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0.

Lời giải. Chọn D vì theo định lí trong SGK. Các mệnh đề sau sai vì:
Mệnh đề A sai, ví dụ hàm $y=|x|$ không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.
Mệnh đề B thiếu điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0.
Mệnh đề C sai, ví dụ hàm $y=x^4$ có $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)=0 \end{cases}$ nhưng $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 3. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 và $f(x)$ liên tục tại x_0 thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của $f'(x)=0$.

C. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)=0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

D. Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)>0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

Lời giải. Chọn A vì đúng theo lý thuyết SGK. Các mệnh đề sau sai vì:
Mệnh đề B thiếu điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0.

Mệnh đề C sai, ví dụ hàm $y = x^4$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ nhưng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Mệnh đề D sai. Sửa lại cho đúng là "Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0".

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và x_0 là một điểm trên khoảng đó. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu $f'(x)$ bằng 0 tại x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

B. Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

C. Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

D. Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Lời giải. Mệnh đề A sai (phải thêm điều kiện $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0).

Mệnh đề B sai. Sửa lại cho đúng là "Nếu dấu của $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số".

Mệnh đề C đúng, từ đó hiểu rõ tại sao D sai. (**Phân biệt điểm cực tiểu của hàm số và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số**). **Chọn C.**

Câu 5. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

B. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.

D. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì chưa kết luận được x_0 có là điểm cực trị của hàm số.

Lời giải. Chọn C.

Câu 6. (ĐỀ MINH HỌA 2016 - 2017) Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là?

A. $y_{CD} = 4$. **B.** $y_{CD} = 1$. **C.** $y_{CD} = 0$. **D.** $y_{CD} = -1$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$.

Do đó giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 4$. **Chọn A.**

Câu 7. Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

A. $x_0 = -3$ hoặc $x_0 = -\frac{1}{3}$. **B.** $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \frac{10}{3}$.

C. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -\frac{10}{3}$. **D.** $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = \frac{1}{3}$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 10x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 8. Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

A. $x_0 = -1$. **B.** $x_0 = 0$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 = 2$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \to y(-1) = 3 \\ x = 1 \to y(1) = -1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. **Chọn A.**

Câu 9. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

A. $(0;0)$ hoặc $(1;-2)$. **B.** $(0;0)$ hoặc $(2;4)$.
C. $(0;0)$ hoặc $(2;-4)$. **D.** $(0;0)$ hoặc $(-2;-4)$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y=0\\x=2\to y=-4\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 10. Biết rằng hàm số $y=x^3+4x^2-3x+7$ đạt cực tiểu tại x_{CT}. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_{CT}=\frac{1}{3}$. **B.** $x_{CT}=-3$. **C.** $x_{CT}=-\frac{1}{3}$. **D.** $x_{CT}=1$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2+8x-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Vẽ bảng biến thiên, ta kết luận được $x_{CT}=\frac{1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 11. Gọi $y_{CĐ}$, y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT}=2y_{CĐ}$. **B.** $y_{CT}=\frac{3}{2}y_{CĐ}$. **C.** $y_{CT}=y_{CĐ}$. **D.** $y_{CT}=-y_{CĐ}$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\to y(1)=-2\\x=-1\to y(-1)=2\end{array}\right.$. Do đó $y_{CT}=-y_{CĐ}$. **Chọn D.**

Câu 12. Gọi y_1, y_2 lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+4$. Tính $P=y_1.y_2$.

A. $P=-302$. **B.** $P=-82$. **C.** $P=-207$. **D.** $P=25$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6x-9$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\to y(3)=-23\\x=-1\to y(-1)=9\end{array}\right.$.

Suy ra $P=y_1.y_2=9.(-23)=-207$. **Chọn C.**

Câu 13. Tính khoảng cách d giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=(x+1)(x-2)^2$.

A. $d=2\sqrt{5}$. **B.** $d=2$. **C.** $d=4$. **D.** $d=5\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=(x-2)^2+(x+1).2(x-2)=3x(x-2)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\to y=4\\x=2\to y=0\end{array}\right.$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;4)$ và $B(2;0)$. Suy ra $AB=2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=(x^2-3)^2$. Giá trị cực đại của hàm số $f'(x)$ bằng:

A. -8. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải. Ta có $f(x)=x^4-6x^2+9\longrightarrow f'(x)=4x^3-12x$.

Tính $f''(x)=12x^2-12$; $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Vẽ bảng biến thiên, ta thấy $f'(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$, giá trị cực đại $f'(-1)=8$.

Chọn C.

Nhận xét. Rất nhiều học sinh đọc đề không kỹ đi tìm giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và dẫn tới chọn đáp án D.

Câu 15. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$.

A. $y=x-1$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=-x-1$.

Lời giải. Ta có $y'=-6x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\x=1\Rightarrow y=2\end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số đã hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(1;2)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị chính là đường thẳng AB có phương trình $y = x+1$. **Chọn B.**

Cách 2. Lấy y chia cho y', ta được $\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)y' + x + 1$.

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là phần dư trong phép chia, đó là $y = x+1$.

Cách 3. Dùng công thức $y = f(x) - \frac{f'(x).f''(x)}{18a}$.

Câu 16. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = \frac{1}{4}$. **D.** $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải. Xét hàm $y = x^3 - 3x^2 + 1$, có $y' = 3x^2 - 6x \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y(0) = 1 \\ x = 2 \to y(2) = -3 \end{array}\right.$.

Suy ra $A(0;1)$, $B(2;-3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Suy ra đường thẳng AB có một VTCP là $\overrightarrow{AB} = (2;-4) \longrightarrow$ VTPT $\overrightarrow{n_{AB}} = (2;1)$.

Đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ có một VTCP là $\overrightarrow{n_d} = (2m-1;-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{AB}}.\overrightarrow{n_d} = 0 \Leftrightarrow 2.(2m-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$. **Chọn D.**

Câu 17. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
B. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
C. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Lời giải. Ta có $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

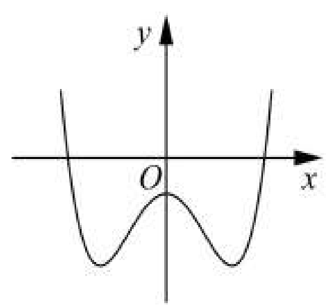
Vẽ phác họa bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại. **Chọn D.**

Cách 2. Ta có $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \longrightarrow ab < 0 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Vì $a = -1 < 0$ nên đồ thị có dạng chữ M. Từ đó suy ra đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

Câu 18. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.
B. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.
C. Phương trình $y' = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
D. Phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.



Lời giải. Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\longrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt với a, b, c là các số thực. **Chọn D.**

Câu 19. Tính diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3$.

A. $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=4$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=4x^3-4x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to f(0)=3 \\ x=\pm 1 \to f(\pm 1)=2 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;3)$, $B(1;2)$, $C(-1;2)$.

Gọi H là trung điểm $BC \longrightarrow \begin{cases} H(0;2) \\ AH \perp BC \end{cases}$. Khi đó $S=\frac{1}{2}BC.AH=1$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải. Nhận thấy y' đổi dấu khi qua $x=-3$ và $x=2$ nên hàm số có 2 điểm cực trị. ($x=1$ không phải là điểm cực trị vì y' không đổi dấu khi qua $x=1$). **Chọn A.**

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		0		0		1
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba giá trị cực trị. **B.** Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có hai điểm cực trị. **D.** Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

- Hàm số có ba điểm cực trị, gồm các điểm $x=-1$, $x=1$, $x=0$ vì đạo hàm y' đổi dấu đi qua các điểm đó.
- Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$.

Chọn B. (đáp án A sai vì hàm số chỉ có hai giá trị cực trị là $y_{CD}=-3$ và $y_{CT}=-4$. Nói đến đồ thị hàm số thì khi đó mới có ba điểm cực trị là $A(0;-3)$, $B(-1;4)$, $C(1;-4)$.)

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.
B. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.
C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.
D. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Lời giải. ● Tại $x = x_2$ hàm số $y = f(x)$ không xác định nên không đạt cực trị tại điểm này.

● Tại $x = x_1$ thì dễ thấy hàm số đạt cực đại tại điểm này.

● Tại $x = x_0$, hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng liên tục tại x_0 thì hàm số vẫn đạt cực trị tại x_0 và theo như bảng biến thiên thì đó là cực tiểu.

Vậy hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu. **Chọn D.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	‖	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
B. Hàm số đã cho không có cực trị.
C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
D. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

● $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua điểm x_1 nhưng tại x_1 hàm số $f(x)$ không xác định nên x_1 không phải là điểm cực đại.

● $f'(x)$ đổi dấu từ "−" sang "+" khi đi qua điểm x_2 suy ra x_2 là điểm cực tiểu của hàm số.

Chọn A.

Câu 24*. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

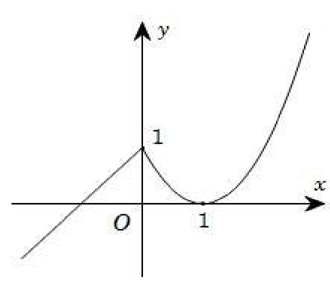
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất và đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



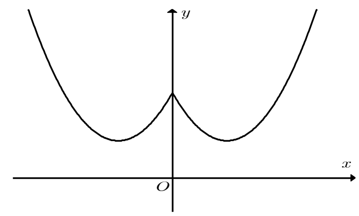
A. 0. **B.** 1.
C. 3. **D.** 2.

Lời giải. Dễ nhận thấy hàm số có một điểm cực trị là điểm cực tiểu tại $x=1$.

Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, ta có $f(x)<f(0)$ với mọi $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 26. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 2.

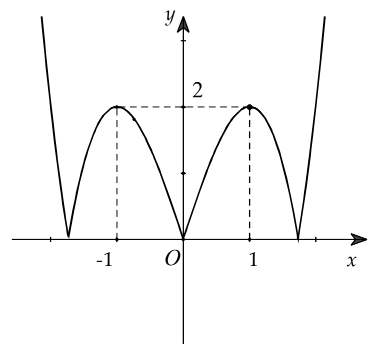
C. 1. **D.** 0.

Lời giải. Dễ nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua Oy.

Vấn đề nằm ở chỗ là điểm có đồ thị gấp khúc có phải là điểm cực trị của đồ thị hàm số hay không? Câu trả lời là có (tương tự lời giải thích như câu 25).

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, gồm 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại. **Chọn A.**

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

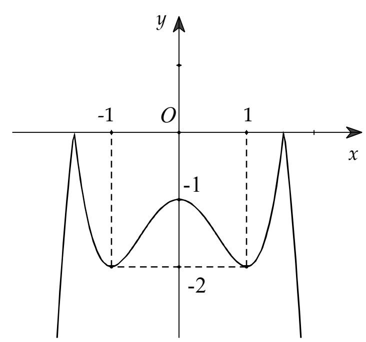
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Chọn D.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

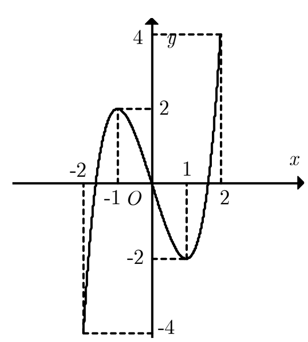
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Chọn D.

Câu 29. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



A. $x=-2$. **B.** $x=-1$.

C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải. Chọn B.

Câu 30. Hỏi hàm số $y=\sqrt[3]{x^2}$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. Có hai điểm cực trị. **B.** Có một điểm cực trị.

C. Không có điểm cực trị. **D.** Có vô số điểm cực trị.

Lời giải. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}},\ \forall x\neq 0.$

Ta có $\begin{cases} y'>0,\ \forall x>0 \\ y'<0,\ \forall x<0 \end{cases} \longrightarrow y'$ đổi dấu khi qua $x=0$.

Vậy $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn B.**

Câu 31. Hỏi hàm số $y=|x|^3-3x+1$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. Không có điểm cực trị. **B.** Có một điểm cực trị.
C. Có hai điểm cực trị. **D.** Có ba điểm cực trị.

Lời giải. TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=\begin{cases} x^3-3x+1,\ x\geq 0 \\ -x^3-3x+1,\ x<0 \end{cases} \longrightarrow y'=\begin{cases} 3x^2-3,\ x>0 \\ -3x^2-3,\ x<0 \end{cases}$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Lập bảng biến thiên ta thấy y' chỉ đổi dấu khi qua $x=1$.

Vậy hàm số có một điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx+m$ có hai điểm cực trị.

A. $m\in(0;2)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$.
C. $m\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **D.** $m\in(0;8)$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6mx+6m=3\left(x^2-2mx+2m\right)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2-2mx+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3+x^2+x+2017$ có cực trị.

A. $m\in(-\infty;1]$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.
C. $m\in(-\infty;0)\cup(0;1]$. **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Lời giải. Nếu $m=0$ thì $y=x^2+x+2017$: Hàm bậc hai luôn có cực trị.

Khi $m\neq 0$, ta có $y'=mx^2+2x+1$.

Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $mx^2+2x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=1-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\neq m<1.$

Hợp hai trường hợp ta được $m<1$. **Chọn D.**

Nhận xét. Sai lầm thường gặp là không xét trường hợp $m=0$ dẫn đến chọn đáp án B.

Câu 34. Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab>0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab\geq 0$. **D.** $ab\leq 0$.

Lời giải. Ta có $y'=3(x+a)^2+3(x+b)^2-3x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Có $y'=0\Leftrightarrow (x+a)^2+(x+b)^2-x^2=0\Leftrightarrow x^2+2(a+b)x+a^2+b^2=0.\ (*)$

Để hàm số đã cho đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=(a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)>0\Leftrightarrow ab>0$. **Chọn A.**

Câu 35. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m-3)x^3-2mx^2+3$ không có cực trị.

A. $m=3$. **B.** $m=0$, $m=3$. **C.** $m=0$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải. ● Nếu $m=3$ thì $y=-6x^2+3$. Đây là một Parabol nên luôn có một cực trị.

● Nếu $m\neq 3$, ta có $y'=3(m-3)x^2-4mx$.

Để hàm số có không có cực trị khi $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4m^2\le 0 \Leftrightarrow m=0$. **Chọn C.**

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3m+2)x^2+\left(2m^2+3m+1\right)x-4$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị là $x=3$ và $x=5$.

A. $m=0$. **B**. $m=1$. **C**. $m=2$. **D**. $m=3$.

Lời giải. Ta có $y'=x^2-(3m+2)x+\left(2m^2+3m+1\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm $x=3$ hoặc $x=5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-3(3m+2)+\left(2m^2+3m+1\right)=0 \\ 25-5(3m+2)+\left(2m^2+3m+1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-6m+4=0 \\ 2m^2-12m+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hàm số $y=2x^3+bx^2+cx+1$. Biết $M(1;-6)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Tìm tọa độ điểm cực đại N của đồ thị hàm số.

A. $N(2;21)$. **B.** $N(-2;21)$. **C.** $N(-2;11)$. **D.** $N(2;6)$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=6x^2+2bx+c$ và $y''=12x+2b$.

Điểm $M(1;-6)$ là điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y(1)=-6 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+c=-6 \\ b+c=-9 \\ 2b+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=-12 \end{cases}$.

Khi đó $y=f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$.

Ta có $f'(x)=6x^2+6x-12;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{cases} f(-2)=21 \\ f''(-2)<0 \end{cases}$.

Suy ra $N(-2;21)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số. **Chọn B.**

Câu 38. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$. **B.** $y(-2)=22$. **C.** $y(-2)=6$. **D.** $y(-2)=-18$.

Lời giải. Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên

$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$; (1)

$\begin{cases} y(0)=2 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases}$. (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \longrightarrow y=x^3-3x^2+2 \longrightarrow y(-2)=-18$. **Chọn D.**

Câu 39. Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx$ $(a\ne 0)$ nhận $x=-1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a+c=b$. **B.** $2a-b=0$. **C.** $3a+c=2b$. **D.** $3a+2b+c=0$.

Lời giải. Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số nhận $x=-1$ là một điểm cực trị nên suy ra $y'(-1)=0$

$\Leftrightarrow 3a-2b+c=0 \Leftrightarrow 3a+c=2b$. **Chọn C.**

Câu 40. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m+1)x^2+\left(m^2-3\right)x+1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực trị tại $x=-1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=0,\ m=-2$. **D.** $m=0,\ m=2$.

Lời giải. Ta có $y'=x^2-2(m+1)x+m^2-3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 \neq x_2=-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(m+1)^2-(m^2-3)>0 \\ y'(-1)=m^2+2m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4>0 \\ m^2+2m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0.$ **Chọn A.**

Câu 41. Biết rằng hàm số $y=3x^3-mx^2+mx-3$ có một điểm cực trị $x_1=-1$. Tìm điểm cực trị còn lại x_2 của hàm số.

A. $x_2=\frac{1}{4}$. **B.** $x_2=\frac{1}{3}$. **C.** $x_2=-\frac{1}{3}$. **D.** $x_2=-2m-6$.

Lời giải. Ta có $y'=9x^2-2mx+m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-9m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>9 \end{array}\right.$. $(*)$

Theo giả thiết: $y'(-1)=0 \Leftrightarrow 9+3m=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn $(*)$).

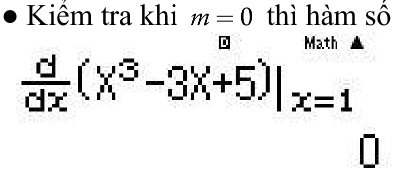
Với $m=-3$ thì $y'=9x^2+6x-3;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-3m^2+5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

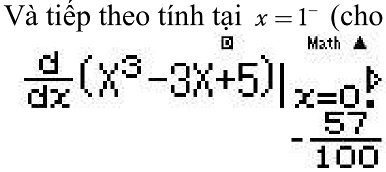
A. $m=0,\ m=2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

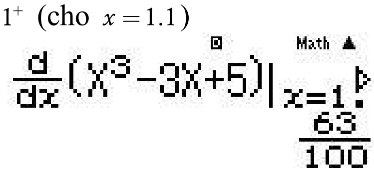
Lời giải. Thử từng đáp án.

● Kiểm tra khi $m=0$ thì hàm số có đạt cực đại tại $x=1$ không



Và tiếp theo tính tại $x=1^-$ (cho $x=0.9$) và $x=1^+$ (cho $x=1.1$)

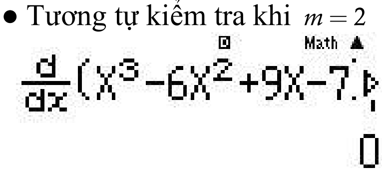




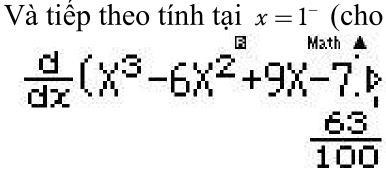
Vậy y' đổi dấu từ âm sang dương qua giá trị $x=1 \longrightarrow x=1$ là điểm cực tiểu.

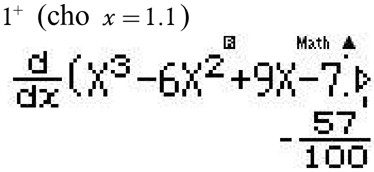
$\longrightarrow m=0$ loại $\longrightarrow$ Đáp án A hoặc D sai.

● Tương tự kiểm tra khi $m=2$



Và tiếp theo tính tại $x=1^-$ (cho $x=0.9$) và $x=1^+$ (cho $x=1.1$)





Ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm qua giá trị $x=1 \longrightarrow x=1$ là điểm cực đại.

$\longrightarrow m=2$ thỏa mãn $\longrightarrow$ Đáp án B chính xác.

Chọn B.

Câu 43. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$.

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$, $m=-3$. **D.** $-3\le m\le 1$.

Lời giải. Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$.

Vì $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\longrightarrow y'(-1)=0\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m=-3$ thỏa mãn y' đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi qua $x=-1$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

A. $m=-9$. **B.** $m=2$. **C.** $m=9$. **D.** Không có m.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=12x^2+2mx-12$ và $f''(x)=24x+2m$.

Riêng hàm bậc ba, yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases}f'(-2)=0\\f''(-2)>0\end{cases}$

$\leftrightarrow\begin{cases}12.4-4m-12=0\\-48+2m>0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}m=9\\m>24\end{cases}$: vô nghiệm. **Chọn D.**

Cách trắc nghiệm. Thay ngược đáp án nhưng lâu hơn cách tự luận.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số $y=ax^3-ax^2+1$ có điểm cực tiểu $x=\frac{2}{3}$.

A. $a=0$. **B.** $a>0$. **C.** $a=2$. **D.** $a<0$.

Lời giải. ● Nếu $a=0$ thì $y=1$: Hàm hằng nên không có cực trị.

● Với $a\ne 0$, ta có $y'=3ax^2-2ax=ax(3x-2); y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

- $a>0\longrightarrow y'$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi qua $x=\frac{2}{3}\longrightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\frac{2}{3}$. Do đó $a>0$ thỏa mãn.

- $a<0\longrightarrow y'$ đổi dấu từ "$+$" sang "$-$" khi qua $x=\frac{2}{3}\longrightarrow$ hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\frac{2}{3}$. Do đó $a<0$ không thỏa mãn.

Chọn B.

Nhận xét. Nếu dùng $\begin{cases}y'\left(\frac{2}{3}\right)=0\\y''\left(\frac{2}{3}\right)>0\end{cases}$ mà bổ sung thêm điều kiện $a\ne 0$ nữa thì được, tức là giải hệ $\begin{cases}a\ne 0\\y'\left(\frac{2}{3}\right)=0\\y''\left(\frac{2}{3}\right)>0\end{cases}$. Như vậy, khi gặp hàm $y=ax^3+bx^2+cd+d$ mà chưa chắc chắn hệ số $a\ne 0$ thì cần xét hai trường hợp $a=0$ và $a\ne 0$ (giải hệ tương tự như trên).

Câu 46. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$. Tìm các giá trị của tham số m để $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7.$

A. $m=0$. **B.** $m=\pm\dfrac{9}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=3\left[x^2-2mx+\left(m^2-1\right)\right]$.

Do $\Delta'=m^2-m^2+1=1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=m^2-1\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=7 \Leftrightarrow 4m^2-3\left(m^2-1\right)=7 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Chọn D.

Câu 47. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai điểm cực trị của hàm số $y=4x^3+mx^2-3x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để $x_1+4x_2=0.$

A. $m=\pm\dfrac{9}{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=12x^2+2mx-3$.

Do $\Delta'=m^2+36>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$.

Theo Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{m}{6}\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$. Mà $x_1+4x_2=0$.

Suy ra $\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{9}m,\ x_2=\dfrac{m}{18}\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{2}{9}m\right).\dfrac{m}{18}=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m^2=\dfrac{81}{4} \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{9}{2}$. **Chọn A.**

Câu 48. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $y=-8x+m$. **B.** $y=-8x+m-3$. **C.** $y=-8x+m+3$. **D.** $y=-8x-m+3$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6x-9;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=5+m\\ x=3\Rightarrow y=-27+m\end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị là $A(-1;5+m)$ và $B(3;-27+m)$.

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm $A,\ B$ có phương trình $y=-8x+m-3$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng công thức $y=f(x)-\dfrac{f'(x).f''(x)}{18a}$.

Câu 49. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(2m+3)x+2017$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để $x=1$ là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số.

A. $m=-1$. **B.** $m\neq -1$. **C.** $m=-\dfrac{3}{2}$. **D.** Không tồn tại giá trị m.

Lời giải. Đạo hàm $y'=x^2-2(m+2)x+(2m+3);\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2m+3\end{array}\right.$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ khi và chỉ khi $2m+3\neq 1 \Leftrightarrow m\neq -1.$ (*)

Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó theo định lí Viet, ta có $x_1+x_2=2m+4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{2m+4}{2}=1 \Leftrightarrow m=-1$: không thỏa mãn (*). **Chọn D.**

Nhận xét: Qua khảo sát 99% học sinh chọn đáp án A, lý do là quên điều kiện để có hai cực trị. Tôi cố tình ra giá trị m đúng ngay giá trị loại đi.

Nếu gặp bài toán không ra nghiệm đẹp như trên thì ta giải như sau: " x_0 là hoành độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$) và $y''(x_0) = 0$".

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ bằng $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

A. $m = 1, m = -1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 3, m = -1$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 3m;\ y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = -m.$

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$. (*)

Thực hiện phép chia y cho y' ta được phần dư $2mx + 1$, nên đường thẳng $\Delta: y = 2mx + 1$ chính là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow d[M,\Delta] = \dfrac{2}{\sqrt{4m^2+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Đối chiếu điều kiện (*), ta chọn $m = -1$. **Chọn B.**

Câu 51. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;4)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2);\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$.

● Nếu $-1 < 2 - m \Leftrightarrow m < 3$, ycbt $\Leftrightarrow -2 < -1 < 2 - m < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

● Nếu $2 - m < -1 \Leftrightarrow m > 3$, ycbt $\Leftrightarrow -2 < 2 - m < -1 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 4$.

Vậy $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. **Chọn A.**

Câu 52. Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

A. $m > 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m > -1$. **D.** $m < -1$.

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + 12x + 3(m+2) = 3[x^2 + 4x + (m+2)]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$

$\Leftrightarrow y'(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 1$. **Chọn B.**

Nhận xét. Nhắc lại kiến thức lớp dưới "phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $x_1 < x_0 < x_2 \Leftrightarrow af(x_0) < 0$".

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017;2018]$ để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(0;+\infty)$.

A. 2015. **B.** 2016. **C.** 2018. **D.** 4035.

Lời giải. Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(m-2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 2 \\ m > 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}\ \&\ m\in[-2017;2018]} m=\{3;4;5;...2018\} \longrightarrow$ có 2016 giá trị. **Chọn B.**

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+1$ có các điểm cực trị nhỏ hơn 2.

A. $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;1)$. **C.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6x+3m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2<2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9-9m>0\\(x_1-2)+(x_2-2)<0\\(x_1-2)(x_2-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\x_1+x_2<4\\x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\2<4\\m-2.2+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1.$$

Chọn D.

Câu 55. Cho hàm số $y=2x^3-3(2a+1)x^2+6a(a+1)x+2$ với a là tham số thực. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Tính $P=|x_2-x_1|$.

A. $P=a+1$. **B.** $P=a$. **C.** $P=a-1$. **D.** $P=1$.

Lời giải. Ta có $y'=6x^2-6(2a+1)x+6a(a+1)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a=x_1\\x=a+1=x_2\end{array}\right.$.

Vậy $P=|x_2-x_1|=|(a+1)-a|=1$. **Chọn D.**

Nhận xét. Nếu phương trình $y'=0$ không ra nghiệm đẹp như trên thì ta dùng công thức tổng quát $P=|x_2-x_1|=\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$.

Câu 56. Cho hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cách đều trục tung.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Lời giải. Ta có $y'=6x^2+2mx-12$.

Do $\Delta'=m^2+72>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$. Theo định lí Viet, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{m}{3}$.

Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |x_1|=|x_2|\Leftrightarrow x_1=-x_2$ (do $x_1\neq x_2$) $\Leftrightarrow x_1+x_2=0\Leftrightarrow -\dfrac{m}{3}=0\Leftrightarrow m=0$. **Chọn D.**

Câu 57. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Lời giải. Ta có $y'=-3x^2+6mx=-3x(x-2m)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó gọi $A(0;-3m-1)$ và $B(2m;4m^3-3m-1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Suy ra trung điểm của AB là điểm $I(m;2m^3-3m-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(2m;4m^3)=2m(1;2m^2)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(8;-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow\begin{cases}I\in d\\\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+8(2m^3-3m-1)-74=0\\8-2m^2=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$. **Chọn D.**

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(2m+1)x-\dfrac{4}{3}$ với $m>0$ là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại thuộc trục hoành.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{3}{4}$. **D.** $m=\frac{4}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=x^2-2(m+1)x+(2m+1)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m+1\end{array}\right.$.

Do $m>0\longrightarrow 2m+1\neq 1$ nên đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.
Do $m>0\longrightarrow 2m+1>1\longrightarrow$ hoành độ điểm cực đại là $x=1$ nên $y_{CD}=y(1)=m-1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_{CD}=0\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 59. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=2x^3-3x^2-m$ có các giá trị cực trị trái dấu.

A. $m=-1$, $m=0$. **B.** $m<0$, $m>-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $0\leq m\leq 1$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=6x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\rightarrow f(0)=-m\\x=1\rightarrow f(1)=-m-1\end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m(m+1)<0\Leftrightarrow -1<m<0$. **Chọn C.**

Câu 60. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ với m là tham số thực, có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

A. $m<2$. **B.** $m\leq 3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\leq 2$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=3x^2+6x+m$. Ta có $\Delta'_{y'}=9-3m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $\Delta'_{y'}>0\Leftrightarrow m<3$.

Ta có $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right).y'+\left(\frac{2m}{3}-2\right)x+\left(\frac{2m}{3}-2\right)$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của hai điểm cực trị khi đó $\begin{cases}y_1=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x_1+\left(\frac{2m}{3}-2\right)\\y_2=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x_2+\left(\frac{2m}{3}-2\right)\end{cases}$.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=\frac{m}{3}\end{cases}$.

Hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi $y_1.y_2<0$ $\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{2}-2\right)^2(x_1+1)(x_2+1)<0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{2}-2\right)^2(x_1x_2+x_1+x_2+1)<0$ $\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{3}-2\right)^2\left(\frac{m}{3}-1\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\m\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow m<3$: thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 61. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Khi đó, điều kiện nào sau đây cho biết đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ O?

A. $c=0$. **B.** $9+2b=3a$. **C.** $ab=9c$. **D.** $a=0$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2+2ax+b$.

Thực hiện phép chia y cho y', ta được $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}a\right).y'+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)x+c-\frac{1}{9}ab$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là: $y=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}a^2\right)x+c-\frac{1}{9}ab$.

Do AB đi qua gốc tọa độ $O\longrightarrow c-\frac{1}{9}ab=0\Leftrightarrow ab=9c$. **Chọn C.**

Câu 62. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với đường thẳng $d: x+4y-5=0$ một góc $\alpha=45^0$.

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6x-m$.

Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9+3m>0 \Leftrightarrow m>-3$.

Ta có $y=y'.\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+2-\frac{m}{3}$.

$\longrightarrow$ đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A và B là $\Delta: y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+2-\frac{m}{3}$.

Đường thẳng $d: x+4y-5=0$ có một VTPT là $\vec{n}_d=(1;4)$.

Đường thẳng $\Delta: y=-\left(\frac{2m}{3}+2\right)x+2-\frac{m}{3}$ có một VTPT là $\vec{n}_\Delta=\left(\frac{2m}{3}+2;1\right)$.

Ycbt $\longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^0=\cos(d,\Delta)=\left|\cos(\vec{n}_d,\vec{n}_\Delta)\right|=\frac{\left|1.\left(\frac{2m}{3}+2\right)+4.1\right|}{\sqrt{1^2+4^2}.\sqrt{\left(\frac{2m}{3}+2\right)^2+1^2}}$

$\longleftrightarrow 60m^2+264m+117=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{1}{2} \\ m=-\frac{39}{10} \end{array}\right. \xrightarrow{m>-3} m=-\frac{1}{2}$: thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 63. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung.

A. $m\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(0;2)$. **C.** $m\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=x^2-2mx+2m-1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt và cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-(2m-1)>0 \\ P=2m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>\frac{1}{2} \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 64. Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$, $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải. Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$, $y'=0 \Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 1$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(1;m^3+3m-1)$ và $B(m;3m^2)$.

Suy ra $AB^2=(m-1)^2+(m^3-3m^2+3m-1)^2=(m-1)^2+(m-1)^6$.

Ycbt $\Leftrightarrow AB^2=2 \Leftrightarrow (m-1)^6+(m-1)^2-2=0 \Leftrightarrow \left[(m-1)^2\right]^3-1+\left[(m-1)^2-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[(m-1)^2-1\right].\left[(m-1)^4+(m-1)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow (m-1)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0 \end{array}\right.$: thỏa. **Chọn B.**

Câu 65. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $I(1;0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Đề đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(0;4m^2-2)$ và $B(2m;4m^2-4m^3-2)$.

Do $I(1;0)$ là trung điểm của AB nên $\begin{cases}x_A+x_B=2x_I\\y_A+y_B=2y_I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0+2m=2\\(4m^2-2)+(4m^2-4m^3-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow m=1$

Chọn C.

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=0$. **B**. $m=\sqrt{2}$. **C**. $m=-\sqrt{2}$. **D**. $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0\neq 2m\Leftrightarrow m\neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;2)$ và $B(2m;2-4m^3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=(2m-1;4-4m^3)$.

Theo giả thiết A, B và M thẳng hàng $\Leftrightarrow\dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (\text{loại})\\m=\pm\sqrt{2}\ (\text{thoả mãn})\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 67. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, với O là gốc tọa độ.

A. $m=-1$. **B**. $m=1$. **C**. $m=\dfrac{1}{2}$. **D**. $m=0$.

Lời giải. Ta có $y'=-3x^2+3m=-3(x^2-m)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(-\sqrt{m};1-2m\sqrt{m})$ và $B(\sqrt{m};1+2m\sqrt{m})$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow 4m^3+m-1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ (thoả mãn). **Chọn C.**

Câu 68. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ \ (a\neq 0)$. Với điều kiện nào của các tham số $a,\ b,\ c$ thì hàm số có ba điểm cực trị?

A. $a,\ b$ cùng dấu và c bất kì. **B**. $a,\ b$ trái dấu và c bất kì.

C. $b=0$ và $a,\ c$ bất kì. **D**. $c=0$ và $a,\ b$ bất kì.

Lời giải. Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-\dfrac{b}{2a}\end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{b}{2a}$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow-\dfrac{b}{2a}>0\Leftrightarrow ab<0$. Khi đó $a,\ b$ trái dấu và c bất kì. **Chọn B.**

Câu 69. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+1\ \ (a\neq 0)$. Với điều kiện nào của các tham số $a,\ b$ thì hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại?

A. $a<0,\ b<0$. **B**. $a<0,\ b>0$. **C**. $a>0,\ b<0$. **D**. $a>0,\ b>0$.

Lời giải.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-\dfrac{b}{2a}\end{array}\right.$.

Để hàm số có một điểm cực tiểu và hai điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ -\dfrac{b}{2a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 70. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+1$ $(a\neq 0)$. Với điều kiện nào của các tham số $a,\ b$ thì hàm số có một điểm cực trị và là điểm cực tiểu.

A. $a<0,\ b\leq 0$. **B.** $a<0,\ b>0$. **C.** $a>0,\ b<0$. **D.** $a>0,\ b\geq 0$.

Lời giải. Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-\dfrac{b}{2a} \quad (*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0

$\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ ab>0 \end{array}\right.$. (1)

Khi đó, để điểm cực trị này là điểm cực tiểu thì $a>0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $a>0, b\geq 0$. **Chọn D.**

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có ba điểm cực trị.

A. $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\neq 0$.

Lời giải. Ta có $y'=4x^3+4mx=4x\left(x^2+m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -m>0\Leftrightarrow m<0$.

Chọn C.

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m+1)x^2+1$ có một điểm cực tiểu.

A. $m>0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m>-1$.

Lời giải. TH1. Với $a=0\leftrightarrow m=0$, khi đó $y=x^2+1$ có đồ thị là một parabol có bề lõm quay lên nên hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu.

$\longrightarrow m=0$ thỏa mãn.

TH2. Với $a>0\leftrightarrow m>0$, ycbt $\Leftrightarrow ab\geq 0\Leftrightarrow m(m+1)\geq 0$: đúng với $m>0$.

$\longrightarrow m>0$ thỏa mãn.

TH3. Với $a<0\leftrightarrow m<0$, ycbt $\Leftrightarrow ab<0 \xrightarrow{a<0} b>0\leftrightarrow m+1>0\leftrightarrow m>-1$.

$\longrightarrow -1<m<0$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m>-1$. **Chọn D.**

Nhận xét: Bài toán hỏi hàm số có một điểm cực tiểu nên hàm số có thể có điểm cực đại hoặc không có điểm cực đại. Khi nào bài toán hỏi hàm số có đúng một cực tiểu và không có cực đại thì lúc đó ta chọn đáp án B.

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m\in[1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0]$. **C.** $m\in[0;1]$. **D.** $m\in(-\infty 0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải. ● Nếu $m=0$ thì $y=-x^2+1$ là hàm bậc hai nên chỉ có duy nhất một cực trị.

● Khi $m\neq 0$, ta có $y'=4mx^3+2(m-1)x=2x\left[2mx^2+(m-1)\right]$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{1-m}{2m} \end{array}\right.$.

Để hàm số có đúng một điểm cực trị khi $\dfrac{1-m}{2m}\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 74. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2;-2)$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = -14$. **B.** $S = 14$. **C.** $S = -20$. **D.** $S = 34$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 6x + a$ và $y'' = 12x^2 - 6$.

Do $A(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nên $\longrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y(2) = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 12 + a = 0 \\ 16 - 12 + 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases}$.

Thử lại với $\begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases} \longrightarrow y = x^4 - 3x^2 - 20x + 34$.

Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ (thỏa).

Vậy $\begin{cases} a = -20 \\ b = 34 \end{cases} \longrightarrow S = a + b = 14$. **Chọn B.**

Câu 75. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có điểm đại $A(0;-3)$ và có điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = -5 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Đồ thị có điểm cực đại $A(0;-3) \longrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases} \rightarrow c = -3.$ (1)

Đồ thị có điểm cực tiểu $B(-1;-5) \longrightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ a + b + c = -5 \end{cases}$. (2)

Giải hệ gồm (1) và (2), ta được $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}$.

Thử lại với $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \longrightarrow y = 2x^4 - 4x^2 - 3$. Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = -1$: thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 76. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = \frac{3}{2}$. **D.** $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x = 4x\left[x^2 - (m^2 - m + 1)\right]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 - m + 1} \end{array}\right..$$

Suy ra đồ thị có hai điểm cực tiểu là $A\left(-\sqrt{m^2 - m + 1}; y_{CT}\right)$ và $B\left(\sqrt{m^2 - m + 1}; y_{CT}\right)$.

Khi đó $AB^2 = 4(m^2 - m + 1) = 4\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 77. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $OA.OB.OC = 12$ với O là gốc tọa độ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải. Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0 \Leftrightarrow 1.(-2m)<0 \Leftrightarrow m>0$.

Khi đó $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{m} \\ x=-\sqrt{m} \end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;2),\ B\left(\sqrt{m};-m^2+2\right),\ C\left(-\sqrt{m};-m^2+2\right).$$

Ycbt $OA.OB.OC=12 \Leftrightarrow 2.\left[m+\left(-m^2+2\right)^2\right]=12 \longrightarrow m=2 \longrightarrow$ có một giá trị nguyên. **Chọn B.**

Câu 78. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-4$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tất cả các điểm cực trị của $\left(C_m\right)$ đều nằm trên các trục tọa độ.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=2$. **C.** $m>0$. **D.** $m=-2$, $m>0$.

Lời giải. Ta có $y'=-4x^3+4mx=-4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;-4)\in Oy$, $B\left(-\sqrt{m};m^2-4\right)$ và $C\left(\sqrt{m};m^2-4\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow B,C\in Ox \Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\ (\text{loại}) \\ m=2\ (\text{thoả mãn}) \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab<0 \Leftrightarrow m>0$.

Ycbt $\longrightarrow b^2-4ac=0 \Leftrightarrow 4m^2-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\ (\text{loại}) \\ m=2\ (\text{thoả mãn}) \end{array}\right.$.

Cho hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$. Khi đó:

y có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab\ge 0$		**y có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab<0$**	
$a>0$: 1 cực tiểu	$a<0$: 1 cực đại	$a>0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a<0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

Xét trường hợp có ba cực trị $\longrightarrow$ tọa độ các điểm cực trị

$$A(0;c),\ B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right),\ C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right).$$

- $BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, $AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}$ với $\Delta=b^2-4ac$.
- Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y=-\frac{\Delta}{4a}$ và $\left[\begin{array}{l} AB: y=\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x+c \\ AC: y=-\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x+c \end{array}\right.$.
- Gọi $\widehat{BAC}=\alpha$, luôn có $\cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}$.
- Diện tích tam giác ABC là $S=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$.
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=\frac{b^3-8a}{8|a|b}$.
- Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=\frac{b^2}{4|a|\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$.

Dữ kiện	**Công thức thỏa** $ab<0$
1) $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
2) $BC=m_0$	$am_0^2+2b=0$
3) $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
4) $BC=kAB=kAC$	$b^3.k^2-8a\left(k^2-4\right)=0$
5) $ABOC$ nội tiếp	$c.\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0$
6) $ABOC$ là hình thoi	$b^2-2ac=0$
--	**------------------------------------**
7) Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a+b^3=0$
8) Tam giác ABC đều	$24a+b^3=0$
9) Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=\alpha$	$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$
10) Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b\left(8a+b^3\right)>0$
11) Tam giác ABC có diện tích S_0	$32a^3\left(S_0\right)^2+b^5=0$
12) Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$
14) Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
16) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
17) Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$
18) Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại 4 điểm lập thành một cấp số cộng thì điều kiện là $\begin{cases} ac>0 \\ ab<0 \\ b^2=\frac{100}{9}ac \end{cases}$.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$.

A. $m=\pm4$. **B.** $m=\sqrt{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};1-m^2\right)$ và $C\left(-\sqrt{m};1-m^2\right)$.

Ycbt: $BC=4\Leftrightarrow 2\sqrt{m}=4\Leftrightarrow\sqrt{m}=2\Leftrightarrow m=4$ (thỏa mãn). **Chọn C.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab<0\Leftrightarrow m>0$.

Ycbt: $BC=m_0\rightarrow am_0^2+2b=0\Leftrightarrow 1.4^2+2.(-2m)=0\Leftrightarrow m=4$.

Câu 80. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m>-1$.

Lời giải. Ta có $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m+1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$.
Suy ra tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(0;m^2\right),\ B\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right) \text{ và } C\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right).$$

Khi đó $\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+1};-2m-1-m^2\right)$ và $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m+1};-2m-1-m^2\right)$.

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -(m+1)+(m+1)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \text{ (loại)} \\ m=0 \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab<0 \Leftrightarrow m>-1$.

Ycbt $\longrightarrow 8a+b^3=0 \Leftrightarrow 8.1+\left[-2(m+1)\right]^3=0 \Leftrightarrow m=0.$

Câu 81. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Lời giải. Ta có $y'=4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$.
Khi đó, toạ độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;1),\ B\left(\sqrt{-m};-m^2+1\right),\ C\left(-\sqrt{-m};-m^2+1\right).$$

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow m+m^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (loại)} \\ m=-1 \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 82. Cho hàm số $y=3x^4+2(m-2018)x^2+2017$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng 120^0.

A. $m=-2018$. **B.** $m=-2017$. **C.** $m=2017$. **D.** $m=2018$.

Lời giải. Ta có $y'=12x^3+4(m-2018)x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x^2=2018-m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 2018-m>0 \Leftrightarrow m<2018$.
Khi đó, tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;2017),B\left(\sqrt{\frac{2018-m}{3}};-\frac{(m-2018)^2}{3}+2017\right),C\left(-\sqrt{\frac{2018-m}{3}};-\frac{(m-2018)^2}{3}+2017\right)$$

Do tam giác ABC cân tại A nên ycbt $\Leftrightarrow 3AB^2=BC^2$

$\Leftrightarrow 3\left[\dfrac{2018-m}{3}+\dfrac{(m-2018)^4}{9}\right]=4\dfrac{2018-m}{3} \Leftrightarrow (m-2018)^3=-1 \Leftrightarrow m=2017$ (thoả mãn). **Chọn C.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab<0 \Leftrightarrow m<2018$.

Áp dụng công thức giải nhanh $\cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$ (với $\alpha=\widehat{BAC}$, A là điểm cực trị thuộc Oy), ta được $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a} \longleftrightarrow -\left(b^3-8a\right)=2\left(b^3+8a\right) \longleftrightarrow 3b^3=-8a$

$\longleftrightarrow 3\left[2(m-2018)\right]^3=-8.3 \longleftrightarrow m=2017$: thỏa mãn.

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-(3m+1)x^2+2(m+1)$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

A. $m=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=\dfrac{2}{3}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $m=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^3 - 2(3m+1)x = x\left[x^2 - 2(3m+1)\right]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 2(3m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$A(0;2(m+1))$, $B\left(-\sqrt{2(3m+1)};-9m^2-4m+1\right)$ và $C\left(\sqrt{2(3m+1)};-9m^2-4m+1\right)$.

Suy ra tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G = \left(0;\dfrac{2(m+1)+2\left(-9m^2-4m+1\right)}{3}\right)$.

Ycbt: $G \equiv O \Leftrightarrow 2(m+1)+2\left(-9m^2-4m+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{3}\text{(thoả mãn)} \\ m = -\dfrac{2}{3}\text{(loại)} \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$.

Ycbt: $G \equiv O \longrightarrow b^2 - 6ac = 0 \Leftrightarrow (3m+1)^2 - 6.\dfrac{1}{4}.2(m+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{3}\text{(thoả mãn)} \\ m = -\dfrac{2}{3}\text{(loại)} \end{array}\right.$.

Câu 84. Cho hàm số $y = \dfrac{9}{8}x^4 + 3(m-3)x^2 + 4m + 2017$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 2017$.

Lời giải. Ta có $y' = \dfrac{9}{2}x^3 + 6(m-3)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 = 4(3-m) \quad (*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow 4(3-m) > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;4m+2017)$, $B\left(2\sqrt{\dfrac{3-m}{3}};4m+2017-2(3-m)^2\right)$, $C\left(-2\sqrt{\dfrac{3-m}{3}};4m+2017-2(3-m)^2\right)$.

Do dam giác ABC cân tại A nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow AB^2 = BC^2$

$\dfrac{4(3-m)}{3} + 4(3-m)^4 = \dfrac{16(3-m)}{3} \Leftrightarrow (3-m)^4 = 3-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-m = 0 \\ 3-m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3\text{(loại)} \\ m = 2\text{(thoả mãn)} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Ycbt $\longrightarrow b^3 = -24a \Leftrightarrow 27(m-3)^3 = -27 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 85. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m > 0$. **B.** $m < 1$. **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \quad (*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;0)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$.

Tam giác ABC cân tại A, suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}d[A,BC].BC = \dfrac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m}$.

Theo bài ra, ta có $S_{\Delta ABC} < 1 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: (thoả mãn). **Chọn D.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Ycbt $\longrightarrow \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^5} < 1 \longrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 86. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

A. $m=-2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=4$.

Lời giải. Ta có $y' = 4x^3 - 2mx = 2x(2x^2 - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2 = m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;m-2),\ B\left(\sqrt{\frac{m}{2}},-\frac{m^2}{4}+m-2\right),\ C\left(-\sqrt{\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}+m-2\right).$$

Suy ra $AB = AC = \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{m^4}{16}}$, $BC = 2\sqrt{\frac{m}{2}}$.

Ta có $S = pr = \frac{1}{2}BC.d[A,BC] \longrightarrow \frac{AB+BC+AC}{2}.r = \frac{1}{2}BC.d[A,BC]$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{2}+\frac{m^4}{16}} + \sqrt{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{m^2}{4}.2\sqrt{\frac{m}{2}}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{m}{2}} > 0$ ta được phương trình $\sqrt{t^2+t^8} + t = t^5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (\text{loại}) \\ t=\sqrt{2} \longrightarrow m=4 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Cách áp dụng công thức giải nhanh: Điều kiện để có ba cực trị $ab < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Ycbt $\longrightarrow \dfrac{b^2}{4|a|\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(-m)^2}{4.\left(1+\sqrt{1+\frac{m^3}{8}}\right)} = 1 \longrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\,(\text{loại}) \\ m=4\,(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx-1}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m<0$. **B.** $m=0$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m>0$.

Lời giải. Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm $y' = \frac{x^2-2x-m+1}{(x-1)^2}$.

Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m + 1$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$. **Chọn D.**

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$.

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Lời giải. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$. Đạo hàm $y' = \frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=2 \longrightarrow y'(2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Thử lại với $m=-1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$: không thỏa mãn.

Thử lại với $m=-3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=2$: thỏa mãn.

Chọn B.

Câu 89. Gọi x_{CD}, x_{CT} lần lượt là điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số $y=\sin 2x-x$ trên đoạn $[0;\pi]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_{CD}=\frac{\pi}{6};\, x_{CT}=\frac{5\pi}{6}$. **B.** $x_{CD}=\frac{5\pi}{6};\, x_{CT}=\frac{\pi}{6}$. **C.** $x_{CD}=\frac{\pi}{6};\, x_{CT}=\frac{\pi}{3}$. **D.** $x_{CD}=\frac{\pi}{3};\, x_{CT}=\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải. Ta có $y'=2\cos 2x-1$ và $y''=-4\sin 2x$.

Xét trên đoạn $[0;\pi]$, ta có $y'=0\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{6} \\ x_2=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$.

Do $y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-4\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ và $y''\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$. Vậy $x_{CD}=\frac{\pi}{6};\, x_{CT}=\frac{5\pi}{6}$. **Chọn C.**

Câu 90. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y=x+2\cos x$ trên khoảng $(0;\pi)$.

A. $y_{CD}=\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}$. **B.** $y_{CD}=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$. **C.** $y_{CD}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$. **D.** $y_{CD}=\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=1-2\sin x$ và $y''=-2\cos x$.

Xét trên khoảng $(0;\pi)$, ta có $y'=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$.

Do đó $y''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2.\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ và $y''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$.

Vậy giá trị cực đại của hàm số là $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 91. Biết rằng trên khoảng $(0;2\pi)$ hàm số $y=a\sin x+b\cos x+x$ đạt cực trị tại $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\pi$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=\frac{\sqrt{3}}{3}+1$. **C.** $S=\sqrt{3}+1$. **D.** $S=\sqrt{3}-1$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=a\cos x-b\sin x+1$. Hàm số đạt cực trị tại $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\pi$ nên

$$\begin{cases} y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0 \\ y'(\pi)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+1=0 \\ -a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{3}\end{cases}\longrightarrow S=a+b=\sqrt{3}+1.$$ **Chọn C.**

Câu 92. Hàm số $y=\left(x^2-4\right)^2(1-2x)^3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Đạo hàm $y'=2.2x\left(x^2-4\right)(1-2x)^3+\left(x^2-4\right)^2.3.(-2)(1-2x)^2$

$=(1-2x)^2\left(x^2-4\right).\left[4x(1-2x)-6\left(x^2-4\right)\right]=-2(1-2x)^2\left(x^2-4\right)\left(7x^2-2x-12\right)$.

Phương trình $y'=0$ có 4 nghiệm đơn nên hàm số có 4 điểm cực trị. **Chọn B.**

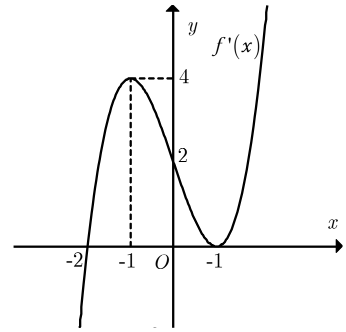
Câu 93. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ x=1 \\ x=2,\ x=3\end{array}\right.$.

Tuy nhiên lại xuất hiện nghiệm kép tại $x=1$ (nghiệm kép thì y' qua nghiệm không đổi dấu) nên hàm số đã cho có ba điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng ?



A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-2$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có các nhận xét sau:

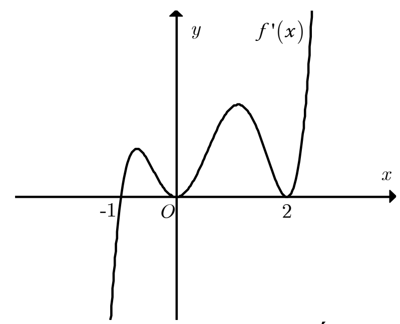
● $f'(x)$ đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi đi qua điểm $x=-2$ suy ra $x=-2$ là điểm cực trị và là **điểm cực tiểu** của hàm số $y=f(x)$.

● $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x=-1, x=1$ suy ra $x=-1, x=1$ không là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

Chọn C.

Câu 95. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm đơn (cắt trục hoành tại một điểm) và hai nghiệm kép (tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm) nên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi qua nghiệm đơn. Do đó suy ra hàm số $f(x)$ có đúng một cực trị. **Chọn B.**

Nhận xét. Đây là một dạng toán suy ngược đồ thị.

Câu 96. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt A, B. Tìm số giá trị *m* sao cho ba điểm $A, B, C(4;2)$ phân biệt thẳng hàng.

A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 2

Đáp án B TXĐ: $D=R\setminus\{|m|\}$

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-|m|)(x-|m|)-x^2+|m|x-4}{(x-|m|)^2}=\dfrac{x^2-2|m|x+m^2-4}{(x-|m|)^2}=0\Leftrightarrow(x-|m|)^2=4$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+|m|\Rightarrow y=|m|+4\Rightarrow A(2+|m|;4+|m|)\\x=-2+|m|\Rightarrow y=|m|-4\Rightarrow B(-2+|m|;-4+|m|)\end{array}\right.$ => Đồ thị luôn có hai điểm cực trị A, B.

Phương trình AB: $\dfrac{x-2-|m|}{-4}=\dfrac{y-4-|m|}{-8}\Leftrightarrow 2x-4-2|m|=y-4-|m|\Leftrightarrow y=2x-|m|$

Để $A, B, C(4;2)$ phân biệt thẳng hàng $\Leftrightarrow C\in AB\Rightarrow 2=4.2-|m|\Leftrightarrow|m|=6$

Khi đó $B(4;2)\equiv C\Rightarrow$ không thỏa mãn $\Rightarrow$ không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu.

Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

● Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\le M$ với $\forall x\in\mathrm{D}$ và tồn tại $x_0\in\mathrm{D}$ sao cho $f(x_0)=M$. Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in\mathrm{D}} f(x)$.

● Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\ge m$ với $\forall x\in\mathrm{D}$ và tồn tại $x_0\in\mathrm{D}$ sao cho $f(x_0)=m$. Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in\mathrm{D}} f(x)$.

2. Định lý

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]\longrightarrow$ tồn tại $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

3. Cách tìm GTLN – GTNN trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên $[a;b]$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên thì $\begin{cases} M=\max\limits_{[a;b]} f(x) \\ m=\min\limits_{[a;b]} f(x)\end{cases}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{67}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-2$.

C. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-7$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=3x^2-4x-4\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-\dfrac{2}{3}\notin[1;3]\end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=-4 \\ f(2)=-7 \\ f(3)=-2\end{cases}\longrightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=-2$. **Chọn B.**

Cách 2. Sử dụng chức năng MODE 7 và nhập hàm $f(X)=X^3-2X^2-4X+1$ với thiết lập Start 1, End 3, Step $0,2$.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ bằng -2 khi $X=3$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=6$. **B.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10$. **C.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=15$. **D.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=11$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=6x^2+6x-12\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2]\end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-1)=15 \\ f(1)=-5 \\ f(2)=6\end{cases}$.

$\longrightarrow \max\limits_{[-1;2]} f(x)=15$ **Chọn C.**

Câu 3. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Tính $P=M-m$.

A. $P=-5$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=5$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=6x^2+6x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin\left[-2;-\frac{1}{2}\right] \\ x=-1\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=-5 \\ f(-1)=0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=-5 \\ M=\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=0 \end{cases} \longrightarrow P=M-m=5.$ **Chọn D.**

Câu 4. Biết rằng hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại x_0. Tính $P=x_0+2018$.

A. $P=3$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2021$. **D.** $P=2018$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=3x^2-6x-9 \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;4] \\ x=3\in[0;4] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=28 \\ f(3)=1 \\ f(4)=8 \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[0;4]} f(x)=1$ khi $x=3=x_0 \longrightarrow P=2021.$ **Chọn C.**

Câu 5. Xét hàm số $f(x)=-\frac{4}{3}x^3-2x^2-x-3$ trên $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và giá trị lớn nhất tại $x=1$.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ nhưng không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất tại $x=1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=-4x^2-4x-1=-(2x+1)^2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$. **Chọn B.**

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-4$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=13$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=14$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=23$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-2;2] \\ x=1\in[-2;2] \\ x=-1\in[-2;2] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-2)=f(2)=13 \\ f(-1)=f(1)=4 \\ f(0)=5 \end{cases}$.

$\longrightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=13$ **Chọn B.**

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+10$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=10;\ m=-6$. **B.** $M=12;\ m=-6$. **C.** $M=10;\ m=-8$. **D.** $M=12;\ m=-8$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=-8x^3+8x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=12 \\ f(2)=-6 \end{cases}$.

$\longrightarrow M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=12;\ m=\min\limits_{[0;2]} f(x)=-6$ **Chọn B.**

Câu 8. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

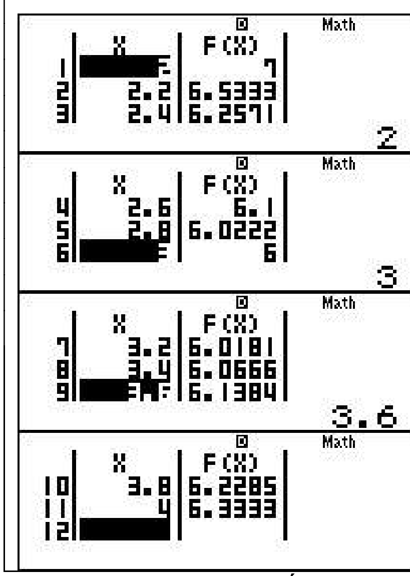
A. $\min\limits_{[2;4]} f(x)=6$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=-2$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=-3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} f(x)=\dfrac{19}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[2;4] \\ x=3\in[2;4]\end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(2)=7 \\ f(3)=6 \\ f(4)=\dfrac{19}{3}\end{cases}$.

$\longrightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=6$ **Chọn A.**

Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE (MODE 7)**.
Bước 1: Bấm tổ hợp phím MODE 7.
Bước 2: Nhập $f(X)=\dfrac{X^2+3}{X-1}$. Sau đó ấn phím $=$ (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím $=$) sau đó nhập $\begin{cases}\text{Start}=2 \\ \text{End}=4 \\ \text{Step}=0.2\end{cases}$. (**Chú ý:** Thường ta chọn $\text{Step}=\dfrac{\text{End}-\text{Start}}{10}$)

Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm GTNN:



X	$f(X)$
2	7
2.2	6.5333
2.4	6.2571
2.6	6.1
2.8	6.0222
3	6
3.2	6.0181
3.4	6.0666
3.6	6.1384
3.8	6.2285
4	6.3333

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(3)=6$.

Câu 9. Tập giá trị của hàm số $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$ với $x\in[2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Tính $P=b-a$.

A. $P=6$. **B.** $P=\dfrac{13}{2}$. **C.** $P=\dfrac{25}{4}$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}\to f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\in[2;4] \\ x=-3\notin[2;4]\end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(2)=\dfrac{13}{2} \\ f(3)=6 \\ f(4)=\dfrac{25}{4} \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=6;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=\dfrac{13}{2} \longrightarrow [a;b]=\left[6;\dfrac{13}{2}\right] \longrightarrow P=b-a=\dfrac{13}{2}-6=\dfrac{1}{2}.$

Chọn D.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;1]$.

A. $M=\sqrt{2};\ m=1.$ **B.** $M=2;\ m=1.$ **C.** $M=1;\ m=-2.$ **D.** $M=2;\ m=\sqrt{2}.$

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$. Ta có $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;1] \\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$. Vậy $\begin{cases} M=\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=2 \\ m=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=5;\ m=\dfrac{1}{3}.$ **B.** $M=-\dfrac{1}{3};\ m=-5.$ **C.** $M=\dfrac{1}{3};\ m=-5.$ **D.** $M=5;\ m=-\dfrac{1}{3}.$

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-8}{(x-3)^2}$. Ta có $f'(x)<0, \forall x\in(0;2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$. Vậy $\begin{cases} M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{3} \\ m=\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-5 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 12. Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ với $x\in[3;5]$.

A. $T=\left[\dfrac{38}{3};\dfrac{526}{15}\right].$ **B.** $T=\left[\dfrac{38}{3};\dfrac{142}{5}\right].$ **C.** $T=\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{127}{5}\right].$ **D.** $T=\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{526}{15}\right].$

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}>0,\ \forall x\in(3;5)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3;5]$ nên $\min\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)=\dfrac{29}{3};\ \max\limits_{[3;5]} f(x)=f(5)=\dfrac{127}{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{127}{5}\right]$. **Chọn C.**

Câu 13. Xét hàm số $y=-x-\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-1;2]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và giá trị lớn nhất là 2.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất là 2.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Vì $0\in[-1;2]$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty \end{cases}$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất. **Chọn D.**

Câu 14. Hàm số nào sau đây không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;2]$?

A. $y = x^3 + 2$. **B.** $y = x^4 + x^2$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y = -x + 1$.

Lời giải.

Nhận thấy hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2;2]$.

Lại có $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$.

Do đó hàm số này không có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[-2;2]$. **Chọn C.**

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

A. $M = 1$. **B.** $M = 2$. **C.** $M = 3$. **D.** $M = 4$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D} = [2;4]$.

Đạo hàm $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [2;4]$. Ta có $\begin{cases} f(2) = \sqrt{2} \\ f(3) = 2 \\ f(4) = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow M = 2$.

Chọn B.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+14} + \sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D} = [-7;5]$.

Đạo hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+14}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-7;5]$.

Ta có $\begin{cases} f(-7) = 2\sqrt{3} \\ f(5) = 2\sqrt{6} \\ f(1) = 6 \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[-7;5]} f(x) = f(-7) = 2\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

A. $M = 2$; $m = 0$. **B.** $M = \sqrt{2}$; $m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 2$; $m = -2$. **D.** $M = \sqrt{2}$; $m = 0$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D} = [-2;2]$. Đạo hàm $f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \in [-2;2] \\ x = -\sqrt{2} \in [-2;2] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f\left(-\sqrt{2}\right) = -2 \\ f\left(\sqrt{2}\right) = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \longrightarrow M = 2$; $m = -2$.

Chọn C.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x + \sqrt{2-x^2}$.

A. $m = -\sqrt{2}$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \sqrt{2}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathrm{D} = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Đạo hàm $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $\begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2} \\ f(1)=2 \\ f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow m=-\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{-x^2+4x-3}$.

A. $M=0$. **B.** $M=-\sqrt{2}$. **C.** $M=\sqrt{2}$. **D.** $M=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=[1;3]$. Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ $\left(\sqrt{2}\le t\le 2\right)$

$\longrightarrow t^2=x-1+3-x+2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}\longrightarrow -2\sqrt{-x^2+4x-3}=2-t^2$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=-t^2+t+2$ trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$".

Xét hàm số $g(t)=-t^2+t+2$ xác định và liên tục trên $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Đạo hàm $g'(t)=-2t+1<0,\ \forall t\in\left(\sqrt{2};2\right)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Do đó $\max\limits_{\left[\sqrt{2};2\right]} g(t)=g\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\longrightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Bình luận: Sau khi đọc xong lời giải trên sẽ có nhiều bạn đọc thắc mắc là tại sao biết được $t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Từ phép đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=h(x)$.

Đạo hàm $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}\longrightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]$.

Ta có $\begin{cases} h(1)=\sqrt{2} \\ h(2)=2 \\ h(3)=\sqrt{2} \end{cases}\longrightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} h(x)=\sqrt{2} \\ \max\limits_{[1;3]} h(x)=2 \end{cases}\longrightarrow \sqrt{2}\le h(x)\le 2\longrightarrow \sqrt{2}\le t\le 2$.

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x-x^2}$.

A. $M=\sqrt{2}$. **B.** $M=4$. **C.** $M=\sqrt{2}$. **D.** $M=8$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=[0;2]$. Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ $\left(\sqrt{2}\le t\le 2\right)$.

$\longrightarrow t^2=x+2\sqrt{x}\sqrt{2-x}+2-x\longrightarrow 2\sqrt{2x-x^2}=t^2-2$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=t^2+t-2$ trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$".

Xét hàm số $g(t)=t^2+t-2$ xác định và liên tục trên $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Đạo hàm $g'(t)=2t+1>0,\ \forall t\in\left(\sqrt{2};2\right)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Do đó $\max\limits_{\left[\sqrt{2};2\right]} g(t)=g(2)=4\longrightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x)=4$. **Chọn B.**

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\dfrac{9}{2}\cos^2 x+3\cos x+\dfrac{1}{2}$.

A. $m=-24$. **B.** $m=-12$. **C.** $m=-9$. **D.** $m=1$.

Lời giải. Đặt $t=\cos x$ $(-1\le t\le 1)$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t)=2t^3-\dfrac{9}{2}t^2+3t+\dfrac{1}{2}$ trên đoạn $[-1;1]$".

Đạo hàm $g'(t)=6t^2-9t+3 \longrightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\in[-1;1] \\ t=\dfrac{1}{2}\in[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=-9 \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{8} \\ g(1)=1 \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(t)=g(-1)=-9 \longrightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-9$. **Chọn C.**

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$.

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{90}{91}$. **C.** $M=\dfrac{110}{111}$. **D.** $M=\dfrac{70}{79}$.

Lời giải. Đặt $t=\sin x$ $(-1\le t\le 1)$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$".

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2} \longrightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow -t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=0 \\ g(0)=1 \\ g(1)=\dfrac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(t)=g(0)=1 \longrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$. **Chọn A.**

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3$.

A. $M=0$. **B.** $M=5$. **C.** $M=4$. **D.** $M=\dfrac{112}{27}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3=\sin^3 x-2\sin^2 x+\sin x+4$.

Đặt $t=\sin x$ $(-1\le t\le 1)$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=t^3-2t^2+t+4$ trên đoạn $[-1;1]$".

Đạo hàm $g'(t)=3t^2-4t+1 \longrightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\in[-1;1] \\ t=\dfrac{1}{3}\in[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=0 \\ g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{112}{27} \\ g(1)=4 \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(t)=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{112}{27} \longrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{112}{27}$. **Chọn D.**

Câu 24. Xét hàm số $f(x)=x^3+x-\cos x-4$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất là -5 nhưng không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là -5.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất là 5 và có giá trị nhỏ nhất là -5.
D. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Ta có $f'(x)=3x^2+1+\sin x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Khi đó hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(0)=-5$. **Chọn B.**

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\left|-x^2-4x+5\right|$ trên đoạn $[-6;6]$.

A. $M=0$. **B.** $M=9$. **C.** $M=55$. **D.** $M=110$.

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=-x^2-4x+5$ liên tục trên đoạn $[-6;6]$.

Đạo hàm $g'(x)=-2x-4 \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2\in[-6;6]$.

Lại có $g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-6;6] \\ x=-5\in[-6;6] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-6)=-7 \\ g(-2)=9 \\ g(6)=-55 \\ g(1)=g(-5)=0 \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[-6;6]} f(x)=\max\limits_{[-6;6]}\left\{|g(-6)|;\ |g(-2)|;\ |g(6)|;\ |g(1)|;\ |g(-5)|\right\}=55.$

Chọn C.

Nhận xét. Bài này rất dễ sai lầm vì không để ý hàm trị tuyệt đối không âm.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|-x$ trên đoạn $[-4;4]$.

A. $M=2$. **B.** $M=17$. **C.** $M=34$. **D.** $M=68$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;4]$.

● Nếu $x\in[1;2]$ thì $x^2-3x+2\le 0$ nên suy ra $f(x)=-x^2+2x-2$.

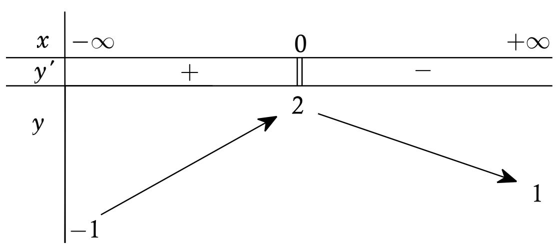
Đạo hàm $f'(x)=-2x+2 \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\in[1;2]$. Ta có $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=-2 \end{cases}$.

● Nếu $x\in[-4;1]\cup[2;4]$ thì $x^2-3x+2\ge 0$ nên suy ra $f(x)=x^2-4x+2$.

Đạo hàm $f'(x)=2x-4 \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\in[-4;1]\cup[2;4]$. Ta có $\begin{cases} f(-4)=34 \\ f(1)=-1 \\ f(2)=-2 \\ f(4)=2 \end{cases}$.

So sánh hai trường hợp, ta được $\max\limits_{[-4;4]} f(x)=f(-4)=34$. **Chọn C.**

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2. **B.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1. **D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy:

● $f(x)\le 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$ nên GTLN của hàm số bằng 2.

● $f(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên không tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)=1$, do đó hàm số không có GTNN.

Chọn A.

Có thể giải thích cách khác: y' đổi dấu qua $x=0$ và tồn tại $y(0)=2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 28. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải. Chọn D.

A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D Đúng.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		0		1	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4.

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -3.

D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải. Chọn B.

A sai vì hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1;\ x=0;\ x=1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

D sai vì hàm số có hai điểm cực tiểu là $x=-1$ và $x=1$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	$\|$	
y		6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9	

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

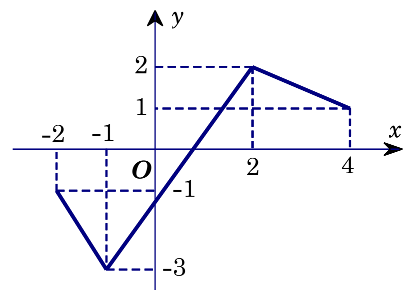
● Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x = 1 \in [-5;7)$.

● Ta có $\begin{cases} f(x) \le 9, \forall x \in [-5;7) \\ \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 9 \end{cases}$. Mà $7 \notin [-5;7)$ nên không tồn tại $x_0 \in [-5;7)$ sao cho $f(x_0) = 9$.

Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5;7)$.

Vậy $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$. **Chọn A.**

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2;4.]$



A. $M = 2$.

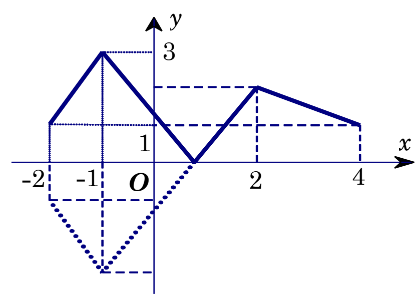
B. $M = |f(0)|$.

C. $M = 3$.

D. $M = 1$.

Lời giải.

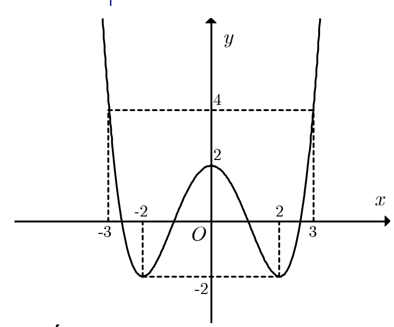
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ như hình vẽ.



Do đó $\max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = 3$ tại $x = -1$.

Chọn C.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng:



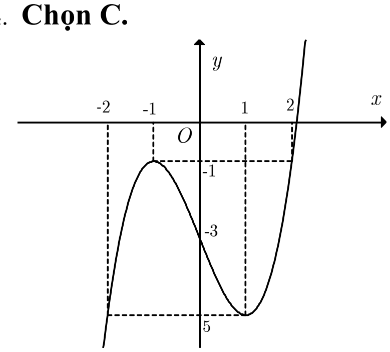
A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2;3]$ đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(3;4)$.

$\longrightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng 4. **Chọn C.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m = -5,\ M = 0$.

B. $m = -5,\ M = -1$.

C. $m = -1,\ M = 0$.

D. $m = -2,\ M = 2$.

Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2;2]$

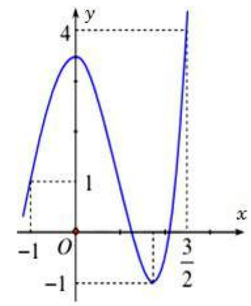
● Đồ thị hàm số có điểm thấp nhất có tọa độ $(-2;-5)$ và $(1;-5)$

$\longrightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -5.

● Đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(-1;-1)$ và $(2;-1)$

$\longrightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -1. **Chọn B.**

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ là:

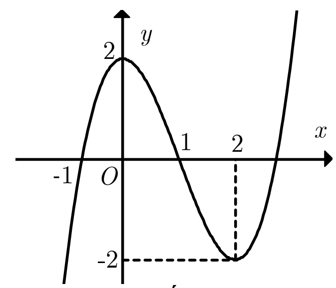


A. $M=4,\ m=1$. **B.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1$.

C. $M=4,\ m=-1$. **D.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



A. Hàm số có hai điểm cực trị.

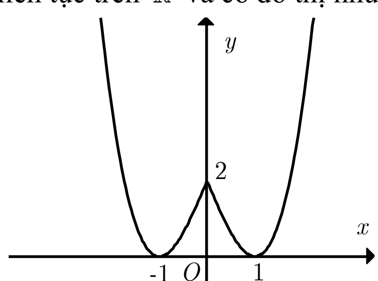
B. Hàm số có GTLN là 2 và GTNN là -2.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(0;2)\&(2;-2)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. **Chọn B.**
Chú ý. Học sinh thường nhầm tưởng giá trị cực đại là giá trị lớn nhất, giá trị cực tiểu là giá trị nhỏ nhất nên chọn B.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau:



(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Trong các mệnh đề đã cho có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Xét trên $(0;1)$ ta thấy đồ thị đi xuống (từ trái sang phải) nên hàm số nghịch biến. Do đó (I) đúng

Xét trên $(-1;2)$ ta thấy đồ thị đi lên, rồi đi xuống, rồi đi lên. Do đó (II) sai.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy có ba điểm cực trị. Do đó (III) đúng.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Do đó (IV) sai.

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Chọn B.

Câu 37. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin(0;+\infty)\\x=1\in(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(1)=\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 38. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f(1)=3$. **Chọn C.**

Câu 39. Gọi y_{CT} là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{\text{CT}}>\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **B.** $y_{\text{CT}}=1+\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **C.** $y_{\text{CT}}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **D.** $y_{\text{CT}}<\min\limits_{(0;+\infty)}y$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Qua điểm $x=1$ thì hàm số đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" trong khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số chỉ có một cực trị và là giá trị cực tiểu nên đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vậy $y_{\text{CT}}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **Chọn C.**

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$.

A. $M=3$. **B.** $M=\dfrac{8}{3}$ **C.** $M=\dfrac{3}{8}$. **D.** $m=0$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in(0;3)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;3]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x=3$ và $\max\limits_{(0;3]}f(x)=f(3)=\dfrac{8}{3}$. **Chọn B.**

Câu 41. Biết rằng hàm số $f(x)=-x+2018-\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $(0;4)$ tại x_0. Tính $P=x_0+2018$.

A. $P=4032$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2020$. **D.** $P=2018$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=-1+\dfrac{1}{x^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;4)\\x=-1\notin(0;4)\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;4)$ tại $x = x_0 = 1 \longrightarrow P = 2019$. **Chọn B.**

Câu 42. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 10.

A. $m = 3$. **B.** $m = -6$. **C.** $m = -7$. **D.** $m = -8$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -2x + 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1;3]$. Ta có $\begin{cases} f(-1) = -5 - m \\ f(2) = 4 - m \\ f(3) = 3 - m \end{cases}$.

$\longrightarrow \max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2) = 4 - m$. Theo bài ra: $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$. **Chọn B.**

Câu 43. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng:

A. $\dfrac{1 + m^2}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1 - m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1 + m^2}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1] \longrightarrow \max\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \dfrac{1 - m^2}{2}$. **Chọn C.**

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng:

A. $\dfrac{m^2 - 1}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1 - m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải. Đạo hàm $y' = \dfrac{-1 - m^2}{(x - 1)^2} < 0, \forall x \in [-1;0]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1;0] \longrightarrow \min\limits_{[-1;0]} f(x) = f(0) = -m^2$. **Chọn B.**

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $a = 2$. **B.** $a = 6$. **C.** $a = 0$. **D.** $a = 4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -3x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-1) = a - 2 \\ f(0) = a \\ f(1) = a - 4 \end{cases}$

$\longrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = a - 4$. Theo bài ra: $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. **Chọn D.**

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm\sqrt{7}$. **C.** $m = \pm\sqrt{2}$. **D.** $m = \pm 3$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \longrightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3$. **Chọn D.**

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2.

A. $m = 4$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Đạo hàm $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0,\ \forall x\in[0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3]\longrightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=-\dfrac{m^2}{8}$.

Thao bài ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=-2\Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{8}=-2\Leftrightarrow m=\pm 4\longrightarrow$ giá trị m lớn nhất là $m=4$. **Chọn A.**

Câu 48. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $3<m\le 4$. **B.** $1\le m<3$. **C.** $m>4$. **D.** $m<-1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m>-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}<0;\ \forall x\ne 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y=f(4)=\dfrac{m+4}{3}=3\Leftrightarrow m=5$ (chọn).

TH2. Với $m<-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}>0;\ \forall x\ne 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y=f(2)=m+2=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m>4$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $m=1,\ m=2$. **B.** $m=1,\ m=-2$. **C.** $m=-1,\ m=-2$. **D.** $m=-1,\ m=2$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]\longrightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=-m^2+m$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;1]} f(x)=-2\Leftrightarrow -m^2+m=-2\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=2\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 50. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $0<m\le 2$. **B.** $2<m\le 4$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m>4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m\ne 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=f(1)+f(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow \dfrac{5m}{6}=\dfrac{25}{6}\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m>4$. **Chọn D.**

Câu 51. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x+1}}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m>1$ để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in\left(1;3\sqrt{5}-4\right)$. **C.** $m\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2-m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}\longrightarrow f'(x)=0\to\sqrt{x}=\dfrac{2}{m}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{m^2}\in[0;4],\forall m>1.$

Lập bảng biến thiên, ta kết luận được $\max\limits_{x\in[0;4]}f(x)=f\left(\dfrac{4}{m^2}\right)=\sqrt{m^2+4}.$

Vậy ta cần có $\sqrt{m^2+4}<3\Leftrightarrow m<\sqrt{5}\xrightarrow{m>1}m\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. **Chọn C.**

Câu 52. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích S thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{S}$. **B.** $4\sqrt{S}$. **C.** $2S$. **D.** $4S$.

Lời giải. Gọi $a,\ b>0$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Diện tích của hình chữ nhật: $S=ab$.

Chu vi hình chữ nhật: $P=2(a+b)=2a+\dfrac{2S}{a}$.

Khảo sát hàm $f(a)=2a+\dfrac{2S}{a}$ trên $(0;+\infty)$, ta được $\min f(a)=4\sqrt{S}$ khi $a=\sqrt{S}$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $P=2(a+b)\geq 2.2\sqrt{ab}=4\sqrt{ab}=4\sqrt{S}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Câu 53. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16 cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 36cm^2. **B.** 20cm^2. **C.** 16cm^2. **D.** 30cm^2.

Lời giải. Gọi $a,\ b>0$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật.

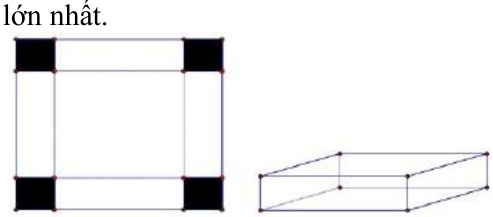
Theo giả thiết, ta có $2(a+b)=16\Leftrightarrow a+b=8$.

Diện tích hình chữ nhật: $S=ab=a(8-a)=-a^2+8a.$

Khảo sát hàm $f(a)$ trên khoảng $(0;8)$, ta được $\max f(a)=16$ khi $a=4$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $S=ab\leq\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{8^2}{4}=16\,cm^2$.

Câu 54. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x(cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải. Hộp có đáy là hình vuông cạnh bằng $12-2x$(cm) và chiều cao x(cm) với $0<x<6$.

Do đó thể tích khối hộp $V=(12-2x)^2.x=4x^3-48x^2+144x$.

Xét hàm $f(x)=4x^3-48x^2+144x$ trên $(0;6)$, ta được $\max\limits_{(0;6)}f(x)=f(2)=128$.

Vậy với $x=2$(cm) thể tích khối hộp lớn nhất. **Chọn C.**

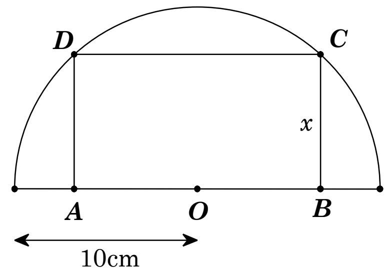
Cách 2. Ta có $V=x(12-2x)^2=\dfrac{1}{4}.4x.(12-2x).(12-2x)\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4x+12-2x+12-2x}{3}\right)^3=128.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=12-2x\Leftrightarrow x=2.$

Câu 55. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn.

A. $S_{\max}=80\text{cm}^2$. **B.** $S_{\max}=100\text{cm}^2$. **C.** $S_{\max}=160\text{cm}^2$. **D.** $S_{\max}=200\text{cm}^2$.

Lời giải.
Đặt $BC = x$ cm là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của đường tròn $(0 < x < 10)$. Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là $AB = 2OB = 2.\sqrt{10^2 - x^2}$ cm.

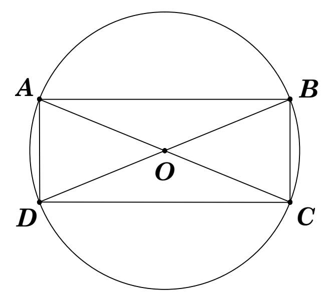


$\longrightarrow$ Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ cm^2.
Khảo sát $f(x) = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ trên $(0;10)$, ta được

$\max\limits_{(0;10)} f(x) = f\left(\dfrac{10\sqrt{2}}{2}\right) = 100.$ **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $2.x\sqrt{10^2 - x^2} \le 2.\dfrac{x^2 + (10^2 - x^2)}{2} = 100$.

Câu 56. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961m^2, người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất được mở rộng.



A. $S_{\min} = 961\pi - 961(\text{m}^2)$. **B.** $S_{\min} = 1922\pi - 961(\text{m}^2)$.

C. $S_{\min} = 1892\pi - 946(\text{m}^2)$. **D.** $S_{\min} = 480,5\pi - 961(\text{m}^2)$.

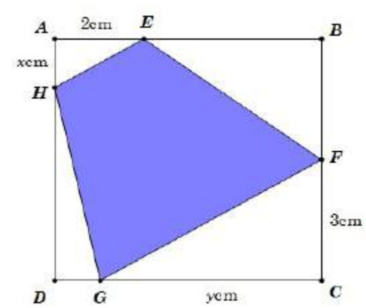
Lời giải. Gọi $x(\text{m}),\ y(\text{m})\ (x > 0,\ y > 0)$ lần lượt là hai kích thước mảnh vườn hình chữ nhật; $R(\text{m})$ là bán kính hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn $\longrightarrow R^2 = OB^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{4}$.

Theo đề bài, ta có $xy = 961\text{m}^2$.
Diện tích 4 phần đất mở rộng: $S = S_{\text{tron}} - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy$

$= \pi.\dfrac{(x^2 + y^2)}{4} - xy \overset{\text{Cosi}}{\ge} \pi.\dfrac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961.$ **Chọn D.**

Nhận xét: Dấu "=" xảy ra khi $ABCD$ là hình vuông. Nếu phát hiện đều này thì làm trắc nghiệm rất nhanh.

Câu 57. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $x + y = 7$. **B.** $x + y = 5$.

C. $x + y = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x + y = 4\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{\Delta AEH} + S_{\Delta CGF} + S_{\Delta DGH}$ lớn nhất (do $S_{\Delta BEF}$ không đổi).
Tính được $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$. (1)

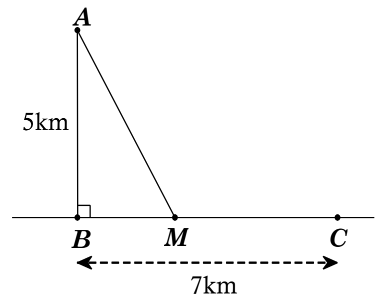
Ta có $EFGH$ là hình thang $\rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{CGF}$

$\longrightarrow \Delta AEH \sim \Delta CGF \longrightarrow \dfrac{AE}{CG} = \dfrac{AH}{CF} \leftrightarrow \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{3} \longrightarrow xy = 6.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $2S = 42 - \left(4x + \dfrac{18}{x}\right)$. Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Mà $4x + \dfrac{18}{x} \ge 2\sqrt{4x.\dfrac{18}{x}} = 12\sqrt{2}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \dfrac{18}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 58. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?



A. $3,0\text{km}$. **B.** $7,0\text{km}$. **C.** $4,5\text{km}$. **D.** $2,1\text{km}$.

Lời giải. Đặt $BM = x\text{km}\ (0 \le x \le 7) \longrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{x^2+25}\text{km} \\ MC = (7-x)\text{km} \end{cases}$.

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}\text{h}$.

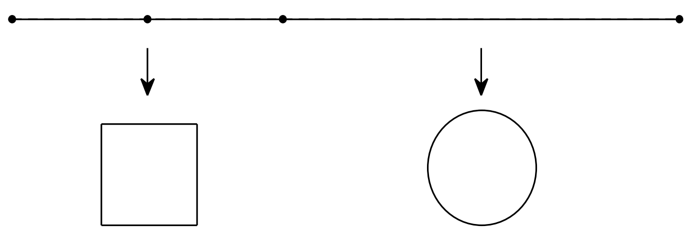
Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{6}\text{h}$.

$\longrightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $t = t_{AM} + t_{MC} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ h.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ trên $[0;7]$, ta được $\min\limits_{[0;7]} f(x) = f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy người đó đến kho nhanh nhất khi vị trí của điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5} \approx 4,5\text{km}$. **Chọn C.**

Câu 59. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng:



A. $\dfrac{a}{r} = 1$. **B.** $\dfrac{a}{r} = 2$. **C.** $\dfrac{a}{r} = 3$. **D.** $\dfrac{a}{r} = 4$.

Lời giải. Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0 < x < 60)$.

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} \longrightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi.r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích hai hình: $S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2 = \dfrac{(4+\pi).x^2 - 120\pi x + 3600\pi}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \dfrac{(4+\pi).x - 60\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$; $S'' = \dfrac{4+\pi}{8\pi} > 0$.

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

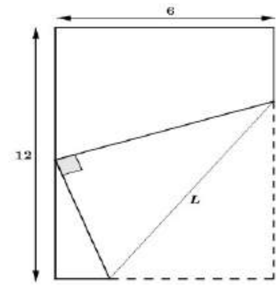
Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

Với $x=\dfrac{60\pi}{4+\pi}\longrightarrow r=\dfrac{30}{(4+\pi)}\ \&\ a=\dfrac{240}{(4+\pi).4}\longrightarrow \dfrac{a}{r}=\dfrac{240}{120}=2$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có $S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2\geq\dfrac{60^2}{4\pi+16}$.

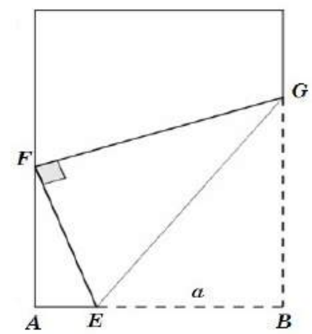
Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{4\pi}=\dfrac{60-x}{16}\to x=\dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

Câu 60. Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12cm và chiều rộng 6cm. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại. Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?



A. $\min L=6\sqrt{2}$ cm. **B.** $\min L=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

C. $\min L=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** $\min L=9\sqrt{2}$ cm.



Lời giải. Đặt $EB=a>0$ như hình vẽ $\longrightarrow\begin{cases}EF=a\\AE=6-a\end{cases}$.

Trong tam giác vuông AEF có

$\cos\widehat{AEF}=\dfrac{6-a}{a}\longrightarrow\cos\widehat{FEB}=\dfrac{a-6}{a}$ (hai góc bù nhau).

Ta có $\Delta BEG=\Delta FEG$

$\longrightarrow\widehat{FEG}=\widehat{BEG}=\dfrac{1}{2}\widehat{FEB}\xrightarrow{\cos\widehat{FEB}=\frac{a-6}{a}}\cos\widehat{FEG}=\sqrt{\dfrac{a-3}{a}}$.

Trong tam giác vuông EFG có $EG=\dfrac{EF}{\cos\widehat{FEG}}=\sqrt{\dfrac{a^3}{a-3}}$.

Xét hàm $f(a)=\dfrac{a^3}{a-3}$ với $a>3$, ta được $\min f(a)$ đạt tại $a=\dfrac{9}{2}\longrightarrow EG=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 61. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=4\sqrt{x^2-2x+3}+2x-x^2$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x)=M$

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Đáp án A

Cách giải: Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{(t-1)^2+2}\geq\sqrt{2}\Rightarrow t\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Khi đó ta có $f(t)=-t^2+4t+3=-(t-2)^2+7\geq 7\Rightarrow\max\limits_{\left[\sqrt{2};+\infty\right)}f(t)=7\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow M=7$

$f(t)=7\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}=2\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow$ tích hai nghiệm của phương trình bằng -1.

Câu 62. Gọi M và m tương ứng giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số $y=\sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Đáp án D

Tập xác định $D=\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right]$.

Hàm số xác định và liên tục trên D nên cũng xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

$y'=\dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}}<0,\forall x\in D$ $\quad y(-1)=3\Rightarrow M=3$, $y(1)=1\Rightarrow m=1$ $\quad$ Vậy $M-m=2$.

Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\le M$ với $\forall x\in\mathrm{D}$ và tồn tại $x_0\in\mathrm{D}$ sao cho $f(x_0)=M$. Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in\mathrm{D}} f(x)$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D, nếu $f(x)\ge m$ với $\forall x\in\mathrm{D}$ và tồn tại $x_0\in\mathrm{D}$ sao cho $f(x_0)=m$. Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in\mathrm{D}} f(x)$.

2. Định lý

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]\longrightarrow$ tồn tại $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

3. Cách tìm GTLN – GTNN trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên $[a;b]$ mà tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên thì $\begin{cases} M=\max\limits_{[a;b]} f(x) \\ m=\min\limits_{[a;b]} f(x) \end{cases}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2-4x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{67}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-2$.

C. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-7$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=3x^2-4x-4\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in[1;3] \\ x=-\dfrac{2}{3}\notin[1;3] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=-4 \\ f(2)=-7 \\ f(3)=-2 \end{cases}\longrightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=-2$. **Chọn B.**

Cách 2. Sử dụng chức năng MODE 7 và nhập hàm $f(X)=X^3-2X^2-4X+1$ với thiết lập Start 1, End 3, Step 0,2.

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ bằng -2 khi $X=3$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$.

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=6$. **B.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10$. **C.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=15$. **D.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=11$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=6x^2+6x-12\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-1)=15 \\ f(1)=-5 \\ f(2)=6 \end{cases}$.

$\longrightarrow \max\limits_{[-1;2]} f(x)=15$ **Chọn C.**

Câu 3. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$. Tính $P=M-m$.

A. $P=-5$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=5$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=6x^2+6x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin\left[-2;-\frac{1}{2}\right] \\ x=-1\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right]\end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(-2)=-5 \\ f(-1)=0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=-5 \\ M=\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} f(x)=0\end{cases} \longrightarrow P=M-m=5$. **Chọn D.**

Câu 4. Biết rằng hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+28$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại x_0. Tính $P=x_0+2018$.

A. $P=3$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2021$. **D.** $P=2018$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=3x^2-6x-9 \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;4] \\ x=3\in[0;4]\end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=28 \\ f(3)=1 \\ f(4)=8\end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[0;4]} f(x)=1$ khi $x=3=x_0 \longrightarrow P=2021$. **Chọn C.**

Câu 5. Xét hàm số $f(x)=-\frac{4}{3}x^3-2x^2-x-3$ trên $[-1;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và giá trị lớn nhất tại $x=1$.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$.
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ nhưng không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất tại $x=1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=-4x^2-4x-1=-(2x+1)^2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ nên có giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ và giá trị lớn nhất tại $x=-1$. **Chọn B.**

Câu 6. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+5$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-4$. **B.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=13$. **C.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=14$. **D.** $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=23$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-2;2] \\ x=1\in[-2;2] \\ x=-1\in[-2;2]\end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-2)=f(2)=13 \\ f(-1)=f(1)=4 \\ f(0)=5\end{cases}$.

$\longrightarrow \max\limits_{[-2;2]} f(x)=13$ **Chọn B.**

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+10$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=10;\ m=-6$. **B.** $M=12;\ m=-6$. **C.** $M=10;\ m=-8$. **D.** $M=12;\ m=-8$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=-8x^3+8x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2]\end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=12 \\ f(2)=-6\end{cases}$.

$\longrightarrow M = \max\limits_{[0;2]} f(x) = 12;\ m = \min\limits_{[0;2]} f(x) = -6$ **Chọn B.**

Câu 8. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} f(x) = 6$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} f(x) = -2$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} f(x) = -3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} f(x) = \dfrac{19}{3}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3 \in [2;4] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(2) = 7 \\ f(3) = 6 \\ f(4) = \dfrac{19}{3} \end{cases}$.

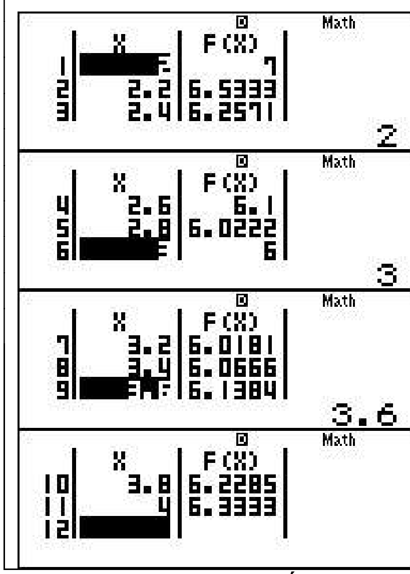
$\longrightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x) = 6$ **Chọn A.**

Cách 2: Sử dụng công cụ **TABLE (MODE 7)**.

Bước 1: Bấm tổ hợp phím MODE 7.

Bước 2: Nhập $f(X) = \dfrac{X^2+3}{X-1}$. Sau đó ấn phím $=$ (nếu có $g(X)$ thì ấn tiếp phím $=$) sau đó nhập $\begin{cases} \text{Start} = 2 \\ \text{End} = 4 \\ \text{Step} = 0.2 \end{cases}$. **(Chú ý:** Thường ta chọn $\text{Step} = \dfrac{\text{End} - \text{Start}}{10}$)

Bước 3: Tra bảng nhận được và tìm GTNN:



X	$f(X)$
2	7
2.2	6.5333
2.4	6.2571
2.6	6.1
2.8	6.0222
3	6
3.2	6.0181
3.4	6.0666
3.6	6.1384
3.8	6.2285
4	6.3333

Dựa vào bảng giá trị ở trên, ta thấy $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 6$.

Câu 9. Tập giá trị của hàm số $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ với $x \in [2;4]$ là đoạn $[a;b]$. Tính $P = b - a$.

A. $P = 6$. **B.** $P = \dfrac{13}{2}$. **C.** $P = \dfrac{25}{4}$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2} \to f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in [2;4] \\ x = -3 \notin [2;4] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(2)=\dfrac{13}{2} \\ f(3)=6 \\ f(4)=\dfrac{25}{4} \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x)=6;\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=\dfrac{13}{2} \longrightarrow [a;b]=\left[6;\dfrac{13}{2}\right] \longrightarrow P=b-a=\dfrac{13}{2}-6=\dfrac{1}{2}.$

Chọn D.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;1]$.

A. $M=\sqrt{2};\ m=1.$ **B.** $M=2;\ m=1.$ **C.** $M=1;\ m=-2.$ **D.** $M=2;\ m=\sqrt{2}.$

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$. Ta có $\begin{cases} f'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;1] \\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$. Vậy $\begin{cases} M=\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=2 \\ m=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=5;\ m=\dfrac{1}{3}.$ **B.** $M=-\dfrac{1}{3};\ m=-5.$ **C.** $M=\dfrac{1}{3};\ m=-5.$ **D.** $M=5;\ m=-\dfrac{1}{3}.$

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-8}{(x-3)^2}$. Ta có $f'(x)<0, \forall x\in(0;2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$. Vậy $\begin{cases} M=\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{3} \\ m=\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-5 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 12. Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ với $x\in[3;5]$.

A. $T=\left[\dfrac{38}{3};\dfrac{526}{15}\right].$ **B.** $T=\left[\dfrac{38}{3};\dfrac{142}{5}\right].$ **C.** $T=\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{127}{5}\right].$ **D.** $T=\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{526}{15}\right].$

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}>0,\ \forall x\in(3;5)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3;5]$ nên $\min\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)=\dfrac{29}{3};\ \max\limits_{[3;5]} f(x)=f(5)=\dfrac{127}{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\dfrac{29}{3};\dfrac{127}{5}\right]$. **Chọn C.**

Câu 13. Xét hàm số $y=-x-\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[-1;2]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và giá trị lớn nhất là 2.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là -4 và không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất nhưng có giá trị lớn nhất là 2.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Vì $0\in[-1;2]$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} y=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty \end{cases}$ nên hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất. **Chọn D.**

Câu 14. Hàm số nào sau đây không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;2]$?

A. $y=x^3+2$. **B.** $y=x^4+x^2$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y=-x+1$.

Lời giải.

Nhận thấy hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ không xác định tại $x=-1\in[-2;2]$.

Lại có $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$.

Do đó hàm số này không có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[-2;2]$. **Chọn C.**

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$.

A. $M=1$. **B.** $M=2$. **C.** $M=3$. **D.** $M=4$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=[2;4]$.

Đạo hàm $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=3\in[2;4]$. Ta có $\begin{cases}f(2)=\sqrt{2}\\ f(3)=2\\ f(4)=\sqrt{2}\end{cases}\longrightarrow M=2.$

Chọn B.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=-7$. **B.** Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$. **D.** Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=[-7;5]$.

Đạo hàm $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+14}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[-7;5]$.

Ta có $\begin{cases}f(-7)=2\sqrt{3}\\ f(5)=2\sqrt{6}\\ f(1)=6\end{cases}\longrightarrow \min\limits_{[-7;5]}f(x)=f(-7)=2\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

A. $M=2;\ m=0$. **B.** $M=\sqrt{2};\ m=-\sqrt{2}$.

C. $M=2;\ m=-2$. **D.** $M=\sqrt{2};\ m=0$.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=[-2;2]$. Đạo hàm $f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\in[-2;2]\\ x=-\sqrt{2}\in[-2;2]\end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases}f(-2)=0\\ f\left(-\sqrt{2}\right)=-2\\ f\left(\sqrt{2}\right)=2\\ f(2)=0\end{cases}\longrightarrow M=2;\ m=-2.$

Chọn C.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x+\sqrt{2-x^2}$.

A. $m=-\sqrt{2}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathrm{D}=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Đạo hàm $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}=1\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $\begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2} \\ f(1)=2 \\ f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow m=-\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{-x^2+4x-3}$.

A. $M=0$. **B.** $M=-\sqrt{2}$. **C.** $M=\sqrt{2}$. **D.** $M=\frac{9}{4}$.

Lời giải. TXĐ: $D=[1;3]$. Đặt $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ $\left(\sqrt{2}\le t\le 2\right)$

$\longrightarrow t^2=x-1+3-x+2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}\longrightarrow -2\sqrt{-x^2+4x-3}=2-t^2$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=-t^2+t+2$ trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$".

Xét hàm số $g(t)=-t^2+t+2$ xác định và liên tục trên $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Đạo hàm $g'(t)=-2t+1<0,\ \forall t\in\left(\sqrt{2};2\right)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Do đó $\max\limits_{[\sqrt{2};2]} g(t)=g\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\longrightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Bình luận: Sau khi đọc xong lời giải trên sẽ có nhiều bạn đọc thắc mắc là tại sao biết được $t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Từ phép đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=h(x)$.

Đạo hàm $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}\longrightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;3]$.

Ta có $\begin{cases} h(1)=\sqrt{2} \\ h(2)=2 \\ h(3)=\sqrt{2} \end{cases}\longrightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} h(x)=\sqrt{2} \\ \max\limits_{[1;3]} h(x)=2 \end{cases}\longrightarrow \sqrt{2}\le h(x)\le 2\longrightarrow \sqrt{2}\le t\le 2$.

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x-x^2}$.

A. $M=\sqrt{2}$. **B.** $M=4$. **C.** $M=\sqrt{2}$. **D.** $M=8$.

Lời giải. TXĐ: $D=[0;2]$. Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ $\left(\sqrt{2}\le t\le 2\right)$.

$\longrightarrow t^2=x+2\sqrt{x}\sqrt{2-x}+2-x\longrightarrow 2\sqrt{2x-x^2}=t^2-2$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=t^2+t-2$ trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$".

Xét hàm số $g(t)=t^2+t-2$ xác định và liên tục trên $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Đạo hàm $g'(t)=2t+1>0,\ \forall t\in\left(\sqrt{2};2\right)$.

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Do đó $\max\limits_{[\sqrt{2};2]} g(t)=g(2)=4\longrightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x)=4$. **Chọn B.**

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\frac{9}{2}\cos^2 x+3\cos x+\frac{1}{2}$.

A. $m=-24$. **B.** $m=-12$. **C.** $m=-9$. **D.** $m=1$.

Lời giải. Đặt $t=\cos x$ $(-1\le t\le 1)$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t)=2t^3-\frac{9}{2}t^2+3t+\frac{1}{2}$ trên đoạn $[-1;1]$".

Đạo hàm $g'(t)=6t^2-9t+3 \longrightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\in[-1;1] \\ t=\dfrac{1}{2}\in[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=-9 \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{8} \\ g(1)=1 \end{cases} \longrightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(t)=g(-1)=-9 \longrightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=-9$. **Chọn C.**

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$.

A. $M=1$. **B.** $M=\dfrac{90}{91}$. **C.** $M=\dfrac{110}{111}$. **D.** $M=\dfrac{70}{79}$.

Lời giải. Đặt $t=\sin x$ $(-1\le t\le 1)$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$".

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2} \longrightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow -t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=0 \\ g(0)=1 \\ g(1)=\dfrac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(t)=g(0)=1 \longrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$. **Chọn A.**

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3$.

A. $M=0$. **B.** $M=5$. **C.** $M=4$. **D.** $M=\dfrac{112}{27}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3=\sin^3 x-2\sin^2 x+\sin x+4$.

Đặt $t=\sin x$ $(-1\le t\le 1)$.

Khi đó, bài toán trở thành "Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=t^3-2t^2+t+4$ trên đoạn $[-1;1]$".

Đạo hàm $g'(t)=3t^2-4t+1 \longrightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\in[-1;1] \\ t=\dfrac{1}{3}\in[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-1)=0 \\ g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{112}{27} \\ g(1)=4 \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(t)=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{112}{27} \longrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{112}{27}$. **Chọn D.**

Câu 24. Xét hàm số $f(x)=x^3+x-\cos x-4$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất là -5 nhưng không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là -5.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất là 5 và có giá trị nhỏ nhất là -5.
D. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Ta có $f'(x)=3x^2+1+\sin x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Khi đó hàm số không có giá trị lớn nhất nhưng có giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(0)=-5$. **Chọn B.**

Câu 25. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\left|-x^2-4x+5\right|$ trên đoạn $[-6;6]$.

A. $M=0$. **B.** $M=9$. **C.** $M=55$. **D.** $M=110$.

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=-x^2-4x+5$ liên tục trên đoạn $[-6;6]$.

Đạo hàm $g'(x)=-2x-4 \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2\in[-6;6]$.

Lại có $g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-6;6] \\ x=-5\in[-6;6] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} g(-6)=-7 \\ g(-2)=9 \\ g(6)=-55 \\ g(1)=g(-5)=0 \end{cases} \longrightarrow \max\limits_{[-6;6]} f(x)=\max\limits_{[-6;6]}\left\{|g(-6)|;\ |g(-2)|;\ |g(6)|;\ |g(1)|;\ |g(-5)|\right\}=55.$

Chọn C.

Nhận xét. Bài này rất dễ sai lầm vì không để ý hàm trị tuyệt đối không âm.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|-x$ trên đoạn $[-4;4]$.

A. $M=2$. **B.** $M=17$. **C.** $M=34$. **D.** $M=68$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;4]$.

● Nếu $x\in[1;2]$ thì $x^2-3x+2\le 0$ nên suy ra $f(x)=-x^2+2x-2$.

Đạo hàm $f'(x)=-2x+2 \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\in[1;2]$. Ta có $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=-2 \end{cases}$.

● Nếu $x\in[-4;1]\cup[2;4]$ thì $x^2-3x+2\ge 0$ nên suy ra $f(x)=x^2-4x+2$.

Đạo hàm $f'(x)=2x-4 \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\in[-4;1]\cup[2;4]$. Ta có $\begin{cases} f(-4)=34 \\ f(1)=-1 \\ f(2)=-2 \\ f(4)=2 \end{cases}$.

So sánh hai trường hợp, ta được $\max\limits_{[-4;4]} f(x)=f(-4)=34$. **Chọn C.**

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y' & & + & \| & - & \\ \hline y & & & 2 & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & -1 & & & & 1 \end{array}$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2. **B.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1. **D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 và 1.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy:

● $f(x)\le 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$ nên GTLN của hàm số bằng 2.

● $f(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên không tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x_0)=1$, do đó hàm số không có GTNN.

Chọn A.

Có thể giải thích cách khác: y' đổi dấu qua $x=0$ và tồn tại $y(0)=2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 28. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải. Chọn D.

A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D Đúng.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		0		1	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4.

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -3.

D. Hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải. Chọn B.

A sai vì hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1$; $x=0$; $x=1$.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất.

D sai vì hàm số có hai điểm cực tiểu là $x=-1$ và $x=1$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	$\|\|$	
y		6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9	

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

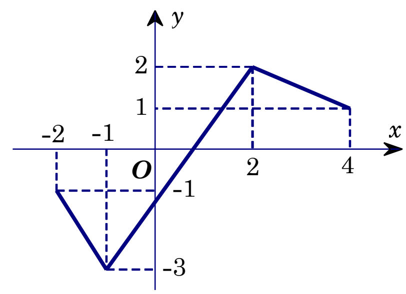
● Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x = 1 \in [-5;7)$.

● Ta có $\begin{cases} f(x) \le 9, \forall x \in [-5;7) \\ \lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 9 \end{cases}$. Mà $7 \notin [-5;7)$ nên không tồn tại $x_0 \in [-5;7)$ sao cho $f(x_0) = 9$.

Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5;7)$.

Vậy $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$. **Chọn A.**

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2;4.]$



A. $M = 2.$

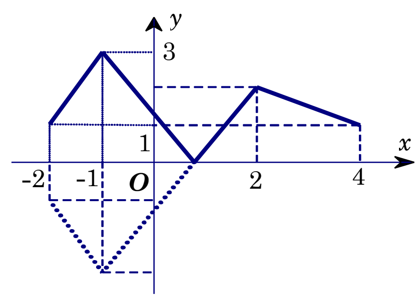
B. $M = |f(0)|.$

C. $M = 3.$

D. $M = 1.$

Lời giải.

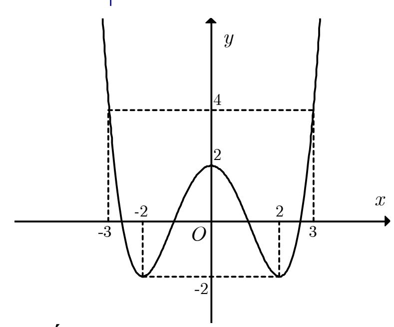
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ ta suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ như hình vẽ.



Do đó $\max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = 3$ tại $x = -1$.

Chọn C.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng:



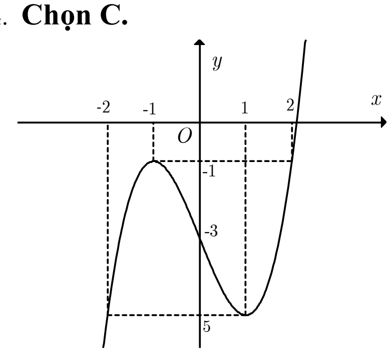
A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2;3]$ đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(3;4)$.

$\longrightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;3]$ bằng 4. **Chọn C.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



A. $m = -5,\ M = 0.$

B. $m = -5,\ M = -1.$

C. $m = -1,\ M = 0.$

D. $m = -2,\ M = 2.$

Lời giải. Nhận thấy trên đoạn $[-2;2]$

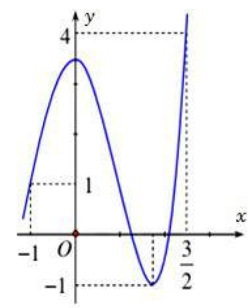
● Đồ thị hàm số có điểm thấp nhất có tọa độ $(-2;-5)$ và $(1;-5)$

$\longrightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -5.

● Đồ thị hàm số có điểm cao nhất có tọa độ $(-1;-1)$ và $(2;-1)$

$\longrightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-2;2]$ bằng -1. **Chọn B.**

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ là:



A. $M=4,\ m=1$. **B.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1$.

C. $M=4,\ m=-1$. **D.** $M=\frac{7}{2},\ m=-1$.

Lời giải. Chọn C.

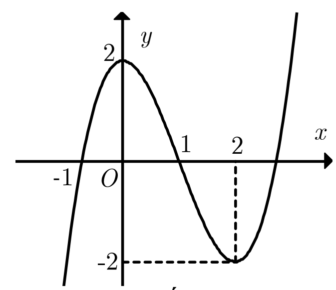
Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có GTLN là 2 và GTNN là -2.

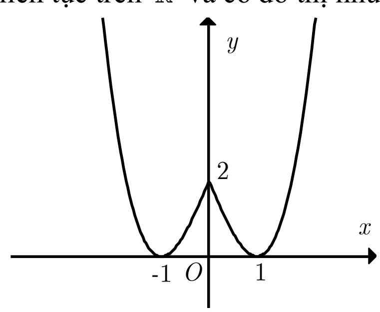
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(0;2)\&(2;-2)$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị suy ra hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. **Chọn B.**
Chú ý. Học sinh thường nhầm tưởng giá trị cực đại là giá trị lớn nhất, giá trị cực tiểu là giá trị nhỏ nhất nên chọn B.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau:



(I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III). Hàm số có ba điểm cực trị.

(IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

Trong các mệnh đề đã cho có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Xét trên $(0;1)$ ta thấy đồ thị đi xuống (từ trái sang phải) nên hàm số nghịch biến. Do đó (I) đúng

Xét trên $(-1;2)$ ta thấy đồ thị đi lên, rồi đi xuống, rồi đi lên. Do đó (II) sai.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy có ba điểm cực trị. Do đó (III) đúng.

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$. Do đó (IV) sai.

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Chọn B.

Câu 37. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sqrt{x+\frac{1}{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}=\dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin(0;+\infty)\\ x=1\in(0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(1)=\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Câu 38. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f(1)=3$. **Chọn C.**

Câu 39. Gọi y_{CT} là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ trên $(0;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT}>\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **B.** $y_{CT}=1+\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **C.** $y_{CT}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **D.** $y_{CT}<\min\limits_{(0;+\infty)}y$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in(0;+\infty)$.

Qua điểm $x=1$ thì hàm số đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" trong khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số chỉ có một cực trị và là giá trị cực tiểu nên đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Vậy $y_{CT}=\min\limits_{(0;+\infty)}y$. **Chọn C.**

Câu 40. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=x-\frac{1}{x}$ trên $(0;3]$.

A. $M=3$. **B.** $M=\frac{8}{3}$ **C.** $M=\frac{3}{8}$. **D.** $m=0$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in(0;3)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;3]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x=3$ và $\max\limits_{(0;3]}f(x)=f(3)=\frac{8}{3}$. **Chọn B.**

Câu 41. Biết rằng hàm số $f(x)=-x+2018-\frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $(0;4)$ tại x_0. Tính $P=x_0+2018$.

A. $P=4032$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2020$. **D.** $P=2018$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=-1+\dfrac{1}{x^2}\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;4)\\ x=-1\notin(0;4)\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;4)$ tại $x = x_0 = 1 \longrightarrow P = 2019$. **Chọn B.**

Câu 42. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 10.

A. $m = 3$. **B.** $m = -6$. **C.** $m = -7$. **D.** $m = -8$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -2x + 4 \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1;3]$. Ta có $\begin{cases} f(-1) = -5 - m \\ f(2) = 4 - m \\ f(3) = 3 - m \end{cases}$.

$\longrightarrow \max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2) = 4 - m$. Theo bài ra: $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 10 \Leftrightarrow 4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$. **Chọn B.**

Câu 43. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng:

A. $\dfrac{1 + m^2}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1 - m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1 + m^2}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1] \longrightarrow \max\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \dfrac{1 - m^2}{2}$. **Chọn C.**

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x + m^2}{x - 1}$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng:

A. $\dfrac{m^2 - 1}{2}$. **B.** $-m^2$. **C.** $\dfrac{1 - m^2}{2}$. **D.** m^2.

Lời giải. Đạo hàm $y' = \dfrac{-1 - m^2}{(x - 1)^2} < 0, \forall x \in [-1;0]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1;0] \longrightarrow \min\limits_{[-1;0]} f(x) = f(0) = -m^2$. **Chọn B.**

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A. $a = 2$. **B.** $a = 6$. **C.** $a = 0$. **D.** $a = 4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -3x^2 - 6x \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$. Ta có $\begin{cases} f(-1) = a - 2 \\ f(0) = a \\ f(1) = a - 4 \end{cases}$

$\longrightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = a - 4$. Theo bài ra: $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. **Chọn D.**

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm\sqrt{7}$. **C.** $m = \pm\sqrt{2}$. **D.** $m = \pm 3$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \longrightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3$. **Chọn D.**

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2.

A. $m = 4$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 1$.

Lời giải.

Đạo hàm $y' = \dfrac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0,\ \forall x \in [0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3] \longrightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = -\dfrac{m^2}{8}$.

Thao bài ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{8} = -2 \Leftrightarrow m = \pm 4 \longrightarrow$ giá trị m lớn nhất là $m = 4$. **Chọn A.**

Câu 48. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $3 < m \le 4$. **B.** $1 \le m < 3$. **C.** $m > 4$. **D.** $m < -1$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} < 0;\ \forall x \ne 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = f(4) = \dfrac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (chọn).

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} > 0;\ \forall x \ne 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = f(2) = m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

A. $m = 1,\ m = 2$. **B.** $m = 1,\ m = -2$. **C.** $m = -1,\ m = -2$. **D.** $m = -1,\ m = 2$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1] \longrightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = -m^2 + m$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;1]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 50. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $0 < m \le 2$. **B.** $2 < m \le 4$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m > 4$.

Lời giải. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m \ne 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = f(1) + f(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{5m}{6} = \dfrac{25}{6} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m > 4$. **Chọn D.**

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x+1}}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m > 1$ để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m \in (1;3)$. **B.** $m \in \left(1; 3\sqrt{5} - 4\right)$. **C.** $m \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. **D.** $m \in (1;3]$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2-m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}\longrightarrow f'(x)=0\to\sqrt{x}=\dfrac{2}{m}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{m^2}\in[0;4],\forall m>1.$

Lập bảng biến thiên, ta kết luận được $\max\limits_{x\in[0;4]}f(x)=f\left(\dfrac{4}{m^2}\right)=\sqrt{m^2+4}.$

Vậy ta cần có $\sqrt{m^2+4}<3\Leftrightarrow m<\sqrt{5}\xrightarrow{m>1}m\in\left(1;\sqrt{5}\right).$ **Chọn C.**

Câu 52. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích S thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{S}$. **B.** $4\sqrt{S}$. **C.** $2S$. **D.** $4S$.

Lời giải. Gọi $a,\ b>0$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Diện tích của hình chữ nhật: $S=ab$.

Chu vi hình chữ nhật: $P=2(a+b)=2a+\dfrac{2S}{a}.$

Khảo sát hàm $f(a)=2a+\dfrac{2S}{a}$ trên $(0;+\infty)$, ta được $\min f(a)=4\sqrt{S}$ khi $a=\sqrt{S}$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $P=2(a+b)\geq 2.2\sqrt{ab}=4\sqrt{ab}=4\sqrt{S}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Câu 53. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 16 cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 36cm^2. **B.** 20cm^2. **C.** 16cm^2. **D.** 30cm^2.

Lời giải. Gọi $a,\ b>0$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật.

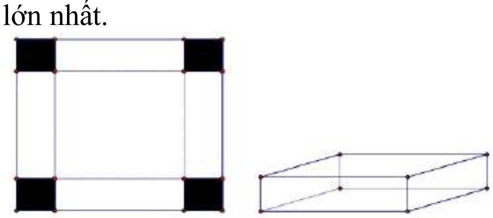
Theo giả thiết, ta có $2(a+b)=16\Leftrightarrow a+b=8$.

Diện tích hình chữ nhật: $S=ab=a(8-a)=-a^2+8a.$

Khảo sát hàm $f(a)$ trên khoảng $(0;8)$, ta được $\max f(a)=16$ khi $a=4$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $S=ab\leq\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{8^2}{4}=16\,cm^2$.

Câu 54. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải. Hộp có đáy là hình vuông cạnh bằng $12-2x(\text{cm})$ và chiều cao $x(\text{cm})$ với $0<x<6$.

Do đó thể tích khối hộp $V=(12-2x)^2.x=4x^3-48x^2+144x$.

Xét hàm $f(x)=4x^3-48x^2+144x$ trên $(0;6)$, ta được $\max\limits_{(0;6)}f(x)=f(2)=128$.

Vậy với $x=2(\text{cm})$ thể tích khối hộp lớn nhất. **Chọn C.**

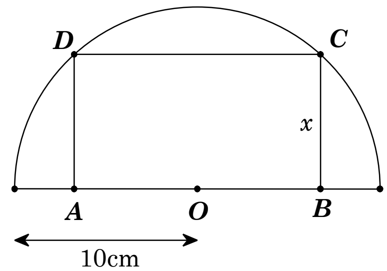
Cách 2. Ta có $V=x(12-2x)^2=\dfrac{1}{4}.4x.(12-2x).(12-2x)\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4x+12-2x+12-2x}{3}\right)^3=128.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x=12-2x\Leftrightarrow x=2.$

Câu 55. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn.

A. $S_{\max}=80\text{cm}^2$. **B.** $S_{\max}=100\text{cm}^2$. **C.** $S_{\max}=160\text{cm}^2$. **D.** $S_{\max}=200\text{cm}^2$.

Lời giải.
Đặt $BC = x$ cm là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của đường tròn $(0 < x < 10)$. Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là $AB = 2OB = 2.\sqrt{10^2 - x^2}$ cm.



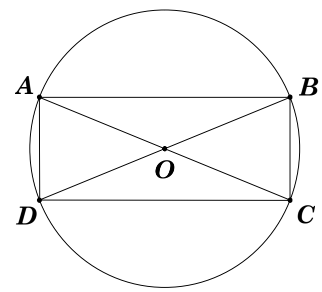
$\longrightarrow$ Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ cm^2.

Khảo sát $f(x) = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$ trên $(0;10)$, ta được

$\max\limits_{(0;10)} f(x) = f\left(\dfrac{10\sqrt{2}}{2}\right) = 100$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $2.x\sqrt{10^2 - x^2} \le 2.\dfrac{x^2 + (10^2 - x^2)}{2} = 100$.

Câu 56. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 961m^2, người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn. Biết tâm hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật (xem hình minh họa). Tính diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất được mở rộng.



A. $S_{\min} = 961\pi - 961\left(\text{m}^2\right)$. **B.** $S_{\min} = 1922\pi - 961\left(\text{m}^2\right)$.

C. $S_{\min} = 1892\pi - 946\left(\text{m}^2\right)$. **D.** $S_{\min} = 480,5\pi - 961\left(\text{m}^2\right)$.

Lời giải. Gọi $x(\text{m}),\ y(\text{m})$ $(x > 0,\ y > 0)$ lần lượt là hai kích thước mảnh vườn hình chữ nhật; $R(\text{m})$ là bán kính hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn $\longrightarrow R^2 = OB^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{4}$.

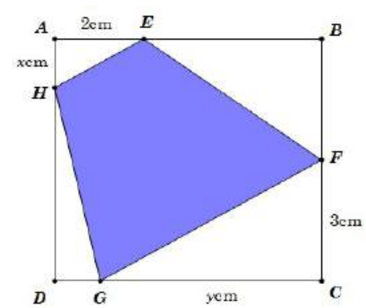
Theo đề bài, ta có $xy = 961\text{m}^2$.

Diện tích 4 phần đất mở rộng: $S = S_{\text{tron}} - S_{ABCD} = \pi R^2 - xy$

$= \pi.\dfrac{\left(x^2 + y^2\right)}{4} - xy \overset{\text{Cosi}}{\ge} \pi.\dfrac{2xy}{4} - xy = 480,5\pi - 961$. **Chọn D.**

Nhận xét: Dấu "$=$" xảy ra khi $ABCD$ là hình vuông. Nếu phát hiện đều này thì làm trắc nghiệm rất nhanh.

Câu 57. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $x + y = 7$. **B.** $x + y = 5$.

C. $x + y = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x + y = 4\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{\Delta AEH} + S_{\Delta CGF} + S_{\Delta DGH}$ lớn nhất (do $S_{\Delta BEF}$ không đổi).

Tính được $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$. $\quad (1)$

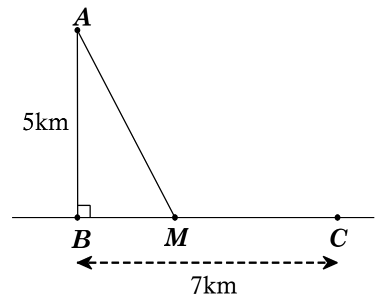
Ta có $EFGH$ là hình thang $\to \widehat{AEH} = \widehat{CGF}$

$\longrightarrow \Delta AEH \sim \Delta CGF \longrightarrow \dfrac{AE}{CG} = \dfrac{AH}{CF} \leftrightarrow \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{3} \longrightarrow xy = 6$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $2S = 42 - \left(4x + \dfrac{18}{x}\right)$. Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Mà $4x + \dfrac{18}{x} \ge 2\sqrt{4x.\dfrac{18}{x}} = 12\sqrt{2}$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \dfrac{18}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \to y = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 58. Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?



A. $3{,}0\text{km}$. **B.** $7{,}0\text{km}$. **C.** $4{,}5\text{km}$. **D.** $2{,}1\text{km}$.

Lời giải. Đặt $BM = x\text{km}\ (0 \le x \le 7) \longrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{x^2+25}\text{km} \\ MC = (7-x)\text{km} \end{cases}$.

Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}\text{h}$.

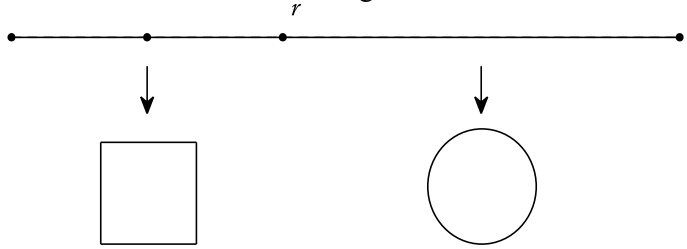
Thời gian đi bộ từ M đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{6}\text{h}$.

$\longrightarrow$ Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $t = t_{AM} + t_{MC} = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ h.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ trên $[0;7]$, ta được $\min\limits_{[0;7]} f(x) = f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$.

Vậy người đó đến kho nhanh nhất khi vị trí của điểm M cách B một khoảng $x = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5\text{km}$. **Chọn C.**

Câu 59. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng:



A. $\dfrac{a}{r} = 1$. **B.** $\dfrac{a}{r} = 2$. **C.** $\dfrac{a}{r} = 3$. **D.** $\dfrac{a}{r} = 4$.

Lời giải. Gọi x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0 < x < 60)$.

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $60 - x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} \longrightarrow$ Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi.r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích hai hình: $S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2 = \dfrac{(4+\pi).x^2 - 120\pi x + 3600\pi}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \dfrac{(4+\pi).x - 60\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$; $S'' = \dfrac{4+\pi}{8\pi} > 0$.

Suy ra hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

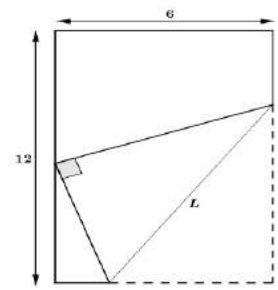
Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

Với $x = \dfrac{60\pi}{4+\pi} \longrightarrow r = \dfrac{30}{(4+\pi)} \;\&\; a = \dfrac{240}{(4+\pi).4} \longrightarrow \dfrac{a}{r} = \dfrac{240}{120} = 2$. **Chọn B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có $S = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2 \geq \dfrac{60^2}{4\pi+16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{4\pi} = \dfrac{60-x}{16} \to x = \dfrac{60\pi}{4+\pi}$.

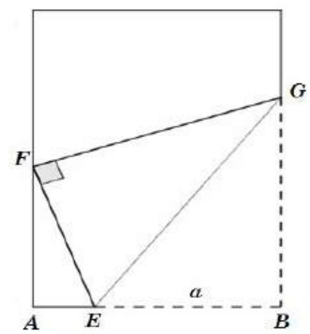
Câu 60. Một mảnh giấy hình chữ nhật có chiều dài 12cm và chiều rộng 6cm. Thực hiện thao tác gấp góc dưới bên phải sao cho đỉnh được gấp nằm trên cạnh chiều dài còn lại. Hỏi chiều dài L tối thiểu của nếp gấp là bao nhiêu?



A. $\min L = 6\sqrt{2}$ cm. **B.** $\min L = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm.

C. $\min L = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm. **D.** $\min L = 9\sqrt{2}$ cm.

Lời giải. Đặt $EB = a > 0$ như hình vẽ $\longrightarrow \begin{cases} EF = a \\ AE = 6-a \end{cases}$.



Trong tam giác vuông AEF có

$\cos\widehat{AEF} = \dfrac{6-a}{a} \longrightarrow \cos\widehat{FEB} = \dfrac{a-6}{a}$ (hai góc bù nhau).

Ta có $\Delta BEG = \Delta FEG$

$\longrightarrow \widehat{FEG} = \widehat{BEG} = \dfrac{1}{2}\widehat{FEB} \xrightarrow{\cos\widehat{FEB} = \frac{a-6}{a}} \cos\widehat{FEG} = \sqrt{\dfrac{a-3}{a}}$.

Trong tam giác vuông EFG có $EG = \dfrac{EF}{\cos\widehat{FEG}} = \sqrt{\dfrac{a^3}{a-3}}$.

Xét hàm $f(a) = \dfrac{a^3}{a-3}$ với $a > 3$, ta được $\min f(a)$ đạt tại $a = \dfrac{9}{2} \longrightarrow EG = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 61. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = 4\sqrt{x^2-2x+3} + 2x - x^2$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Đáp án A

Cách giải: Đặt $t = \sqrt{x^2-2x+3} = \sqrt{(t-1)^2+2} \geq \sqrt{2} \Rightarrow t \in \left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Khi đó ta có $f(t) = -t^2+4t+3 = -(t-2)^2+7 \geq 7 \Rightarrow \max\limits_{\left[\sqrt{2};+\infty\right)} f(t) = 7 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow M = 7$

$f(t) = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} = 2 \Leftrightarrow x^2-2x-1 = 0 \Rightarrow$ tích hai nghiệm của phương trình bằng -1.

Câu 62. Gọi M và m tương ứng giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó $M - m$ bằng

A. 9 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Đáp án D

Tập xác định $D = \left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right]$.

Hàm số xác định và liên tục trên D nên cũng xác định và liên tục trên $[-1;1]$.

$y' = \dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in D$ $\begin{matrix} y(-1) = 3 \Rightarrow M = 3 \\ y(1) = 1 \Rightarrow m = 1 \end{matrix}$ Vậy $M - m = 2$

Bài 4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP SUY ĐỒ THỊ

1. Tịnh tiến đồ thị song song với các trục tọa độ

Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $p>0$, ta có

+ Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị thì được đồ thị $y=f(x)+p$.

+ Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị $y=f(x)-p$.

+ Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì được đồ thị $y=f(x+p)$.

+ Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì được đồ thị $y=f(x-p)$.

2. Phép suy đồ thị

Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=f(|x|)$.

Ta có $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & ;x\ge 0 \\ f(-x) & ;x<0 \end{cases}$ và $y=f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

Cách vẽ (C') từ (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y=f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y=f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y=|f(x)|$.

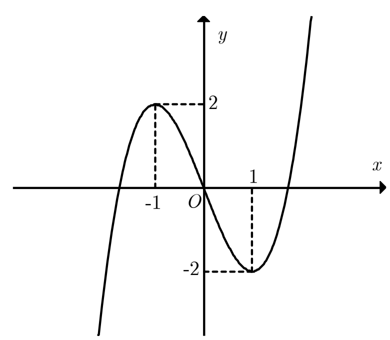
Ta có $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;f(x)\ge 0 \\ f(-x) & ;f(x)<0 \end{cases}$.

Cách vẽ (C') từ (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C): y=f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x$.

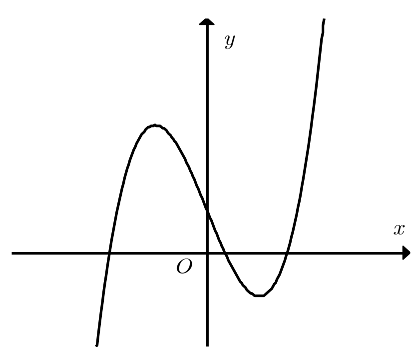
B. $y=-x^3+3x$.

C. $y=-x^4+2x^2$.

D. $y=x^4-2x^2$.

Lời giải. Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba nên loại C, D.
Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$ nên chỉ có A phù hợp.
Chọn A.

Câu 2. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

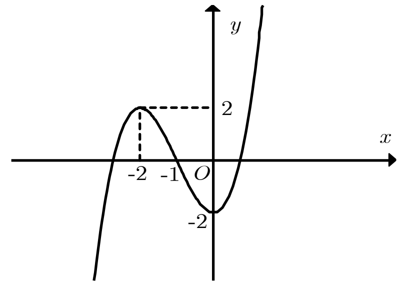


A. $y=-x^2+x-1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x+1$.

Lời giải.
Đặc trưng của đồ thị là hàm bậc ba. Loại đáp án A và C.
Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. **Chọn D.**

Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2-2$.

B. $y=x^3+3x^2-2$.

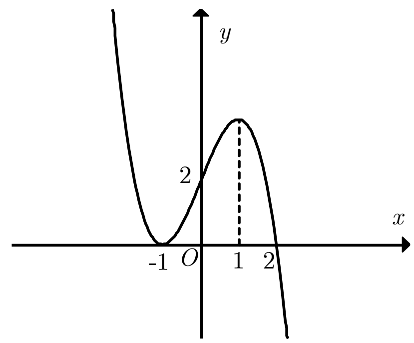
C. $y=x^3-3x^2-2$.

D. $y=-x^3+3x^2-2$.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Loại đáp án A, D.

Thấy đồ thị cắt trục hoành tại điểm $x=-1$ nên thay $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ vào hai đáp án B và C, chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=(x+1)^2(1-x)$.

B. $y=(x+1)^2(1+x)$.

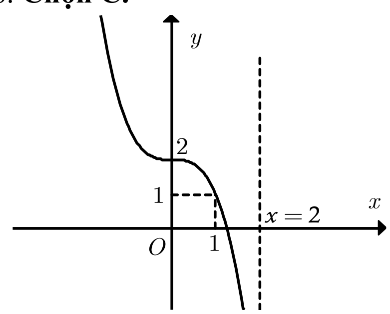
C. $y=(x+1)^2(2-x)$.

D. $y=(x+1)^2(2+x)$.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại đáp án B, D.

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$. Do đó chỉ có đáp án C phù hợp. **Chọn C.**

Câu 5*. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-x^3+1$.

B. $y=-x^3+3x+2$.

C. $y=-x^3+3x^2-3x+2$.

D. $y=-x^3+2$.

Lời giải. Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$ nên ta loại đáp án A.

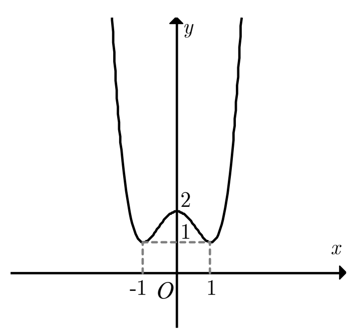
Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số không có cực trị nên ta loại đáp án B vì $y'=-3x^2+3$ có hai nghiệm.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$, kiểm tra thấy C & D đều thỏa mãn.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^3+3x^2-3x+2=0 \xrightarrow{\text{CASIO}} x=2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+2=0 \longrightarrow x=\sqrt[3]{2}\in(1;2)$. Do đó chỉ có D thỏa mãn. **Chọn D.**

Câu 6. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-x^4+2x^2+2$.

B. $y=x^4-2x^2+2$.

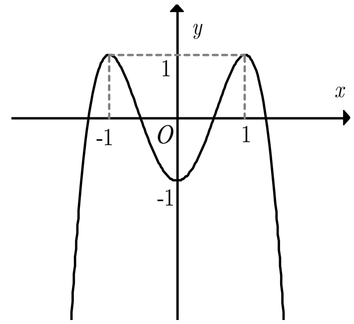
C. $y=x^4-4x^2+2$.

D. $y=x^4-2x^2+3$.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Loại đáp án A.

Để ý thấy khi $x=0$ thì $y=2$ nên ta loại đáp án D.
Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 7. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=x^4-2x^2-1$.

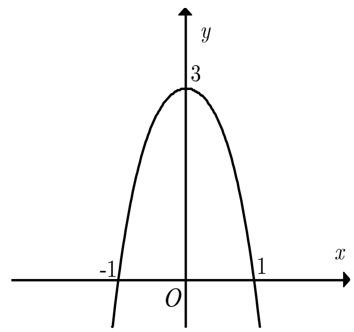
B. $y=-2x^4+4x^2-1$.

C. $y=-x^4+2x^2-1$.

D. $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại A.
Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên thể hiện $c=-1$. Loại D.
Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;1)$ nên chỉ có B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=-x^4-2x^2+3$.

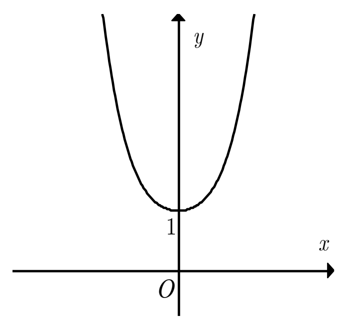
B. $y=-x^4-2x^2-3$.

C. $y=-x^4+2x^2+3$.

D. $y=x^4+2x^2+3$.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a<0$. Loại D.
Dựa vào đồ thị thấy khi $x=0$ thì $y=3$. Loại B.
Hàm số có một cực trị nên $a,\ b$ cùng dấu. **Chọn A.**

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=x^4+x^2+2$.

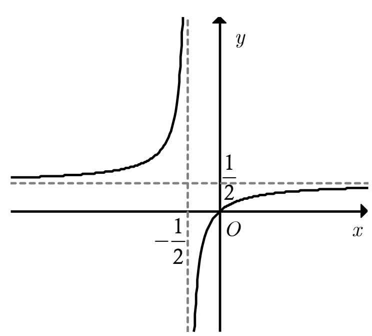
B. $y=x^4-x^2+2$.

C. $y=x^4-x^2+1$.

D. $y=x^4+x^2+1$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x=0$ thì $y=1$. Loại A, B.
Hàm số có một cực trị nên $a,\ b$ cùng dấu. **Chọn D.**

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+3}{2x+1}$.

C. $y=\dfrac{x}{2x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Lời giải. Các chi tiết đồ thị hàm số có TCĐ: $x=-\dfrac{1}{2}$ và TCN: $y=\dfrac{1}{2}$ đều giống nhau.
Chỉ có chi tiết đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ là phù hợp cho đáp án C. **Chọn C.**

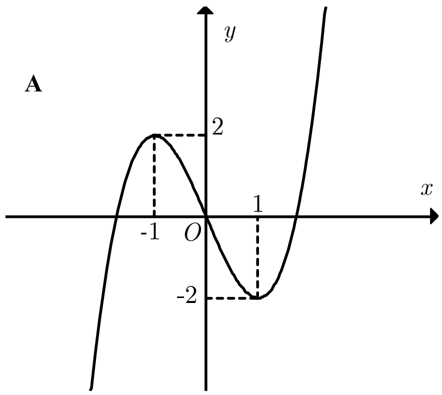
Cách 2. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định tức $y'>0$. Kiểm tra ta thấy chỉ có C & D thỏa mãn.
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên đáp án C thỏa mãn.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

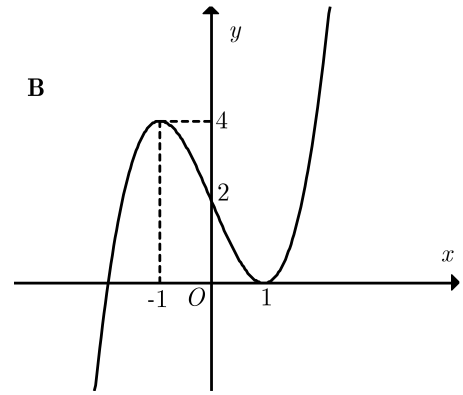
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y=f(x)$?

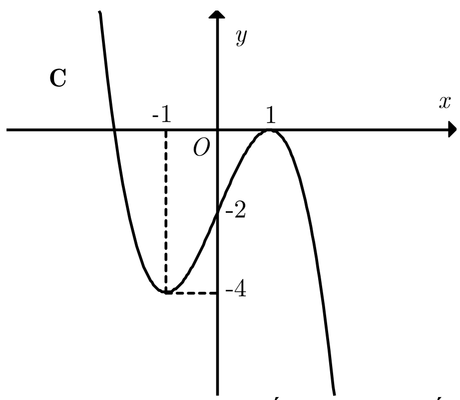
A



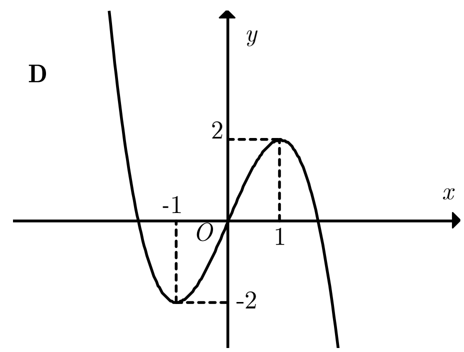
B



C

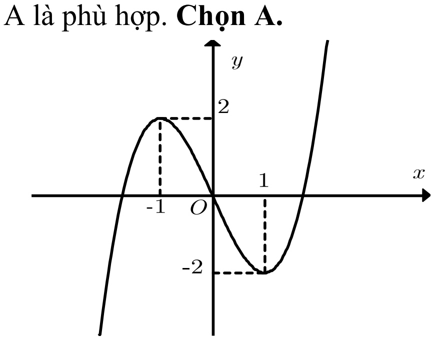


D



Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:
- Khi $x\to+\infty$ thì $y\to+\infty$. Loại C và D.
- Tọa độ các điểm cực trị là $(-1;2)$ và $(1;-2)$ nên đáp án A là phù hợp. **Chọn A.**

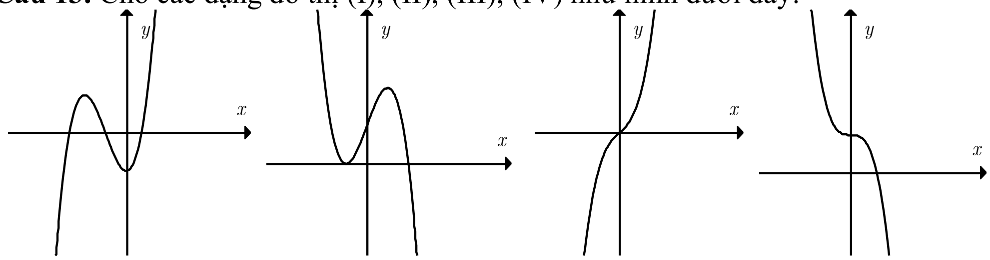
Câu 12. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số có hệ số $a<0$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.
C. Hàm số không có cực trị.
D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.

Lời giải. Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Do đó A sai.
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó B đúng.

Hàm số có hai cực trị. Do đó C sai.
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do của hàm số phải bằng 0. Do đó D sai.
Chọn B.
Câu 13. Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III), (IV) như hình dưới đây:

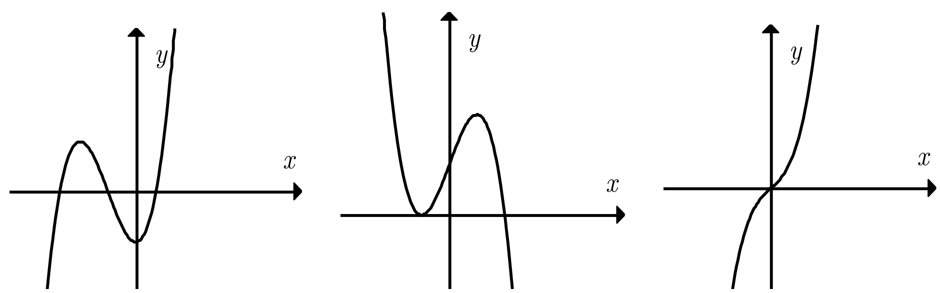


(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y=x^2+bx^2+cx+d$.

A. (I). **B**. (I) và (III). **C**. (II) và (IV). **D**. (III) và (IV).

Lời giải. Hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).
Xét $y'=3x^2+2bx+c$ có $\Delta'_{y'}=b^2-3c$. Ta chưa xác định được $\Delta'_{y'}$ mang dấu gì nên có thể xảy ra trường hợp (I) và cũng có thể xảy ra trường hợp (III). **Chọn B.**
Câu 14. Cho các dạng đồ thị (I), (II), (III) như hình dưới đây:

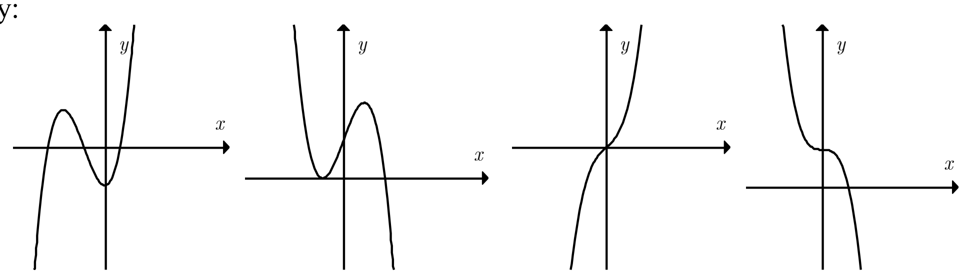


(I) **(II)** **(III)**

Liệt kê tất cả các dạng có thể biểu diễn đồ thị hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$.

A. (I). **B**. (I) và (II). **C**. (III). **D**. (I) và (IIII).

Lời giải. Hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II).
Xét $y'=3x^2+2bx-1$ có $\Delta'_{y'}=b^2+3>0, \forall b\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số có hai cực trị. **Chọn A.**
Câu 15. Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị (I) xảy ra khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

C. Đồ thị (III) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

D. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

Lời giải. Chọn C.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng -3 và giá trị nhỏ nhất bằng -4.

D. Hàm số có ba giá trị cực trị.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét:

● Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$. Do đó A sai.

● Hàm số có ba điểm cực trị là $x=-1,\ x=0,\ x=1.$ Do đó B đúng. **Chọn B.**

● Hàm số có GTNN bằng -4 và không có GTLN. Do đó C sai.

● Hàm số có đúng hai giá trị cực trị là $y_{CD}=-3$ và $y_{CT}=-4$. (nếu nói đồ thị hàm số thì có ba điểm cực trị). Do đó D sai.

Câu 17. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\dfrac{29}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=-x^3+3x^2+9x-2$.

B. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x-\dfrac{2}{3}$.

C. $y=x^3-3x^2-9x-2$.

D. $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x+\dfrac{2}{3}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:
Đây là dạng hàm số bậc 3 có hệ số $a>0$. Loại A và D.
Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;1)$ nên loại C. **Chọn B.**

Câu 18. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=2x^3-6x$. **B.** $y=-2x^3+6x-8$. **C.** $y=-2x^3+6x$. **D.** $y=2x^3-6x+8$.

Lời giải. Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a>0$. Loại B & C.
Thử tại $x=1\rightarrow y=-4$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có A thỏa. **Chọn A.**

Câu 19. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau sau?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=-x^3+3x^2-3x+1$ **B.** $y=x^3-x^2+2x$ **C.** $y=x^3-3x^2+3x+2$ **D.** $y=-x^3+3x^2-3x+2$

Lời giải. Dựa vào dáng điệu của bảng biến thiên suy ra $a<0$. Loại B & C.

Thử tại $x=1\to y=1$. Thay vào 2 đáp án còn lại chỉ có D thỏa. **Chọn D.**

Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=x^4-2x^2+1$. **B.** $y=-x^4+2x^2+1$. **C.** $y=x^4-2x^2+2$. **D.** $y=-x^4+2x^2+2$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

Đây là dạng hàm số trùng phương có hệ số $a<0$. Loại A và C.

Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ nên loại B. **Chọn D**

Câu 21. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

A. $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta có các nhận xét sau:

● Hàm số có TCĐ $x=-1$; TCN $y=-1$. Do đo ta loại phương án C & D.

● Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Thử đáp án A, ta có $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0$ không thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 22. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-2

A. $y=\dfrac{x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải. Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy
Đây là dạng hàm phân thức hữu tỉ, có tiệm cận đứng là $x=-1$. Loại A và B.
Do đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-2$. **Chọn C.**

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$a-b+c-1$	↘	-24	↗	$+\infty$

Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+3c$.
A. $P=-3$. **B.** $P=-9$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=3x^2+2ax+b$.

Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm là -1 và 3 nên ta có $\begin{cases}3-2a+b=0\\27+6a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-9\end{cases}$.

Lại có $f(3)=-24\longrightarrow 27+9a+3b+c=-24\longrightarrow c=3$.

Vậy $P=a+b+3c=-3$. **Chọn A.**

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Tính $P=a^2+b^2+c^2$.
A. $P=4$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=2$.

Lời giải. Đạo hàm $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$.

Phương trình $y'=0$ có nghiệm $x=1$ nên ta có $2a+b=0$. (1)

Lại có $\begin{cases}f(0)=1\\f(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\a+b+c=2\end{cases}$. (2)

Giải hệ gồm (1) và (2), ta được $\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=1\end{cases}\longrightarrow P=a^2+b^2+c^2=6$. **Chọn B.**

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$a+b$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

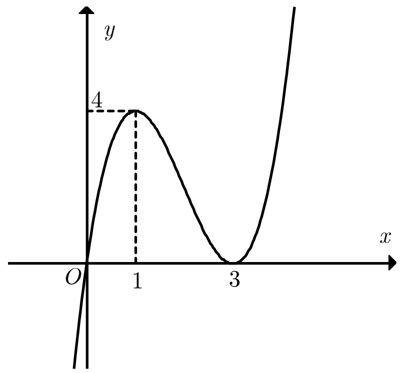
Tính giá trị của a và b.

A. $a=1$ và $b=-2.$ **B.** $a=2$ và $b=-3.$ **C.** $a=\frac{1}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}.$ **D.** $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{5}{2}.$

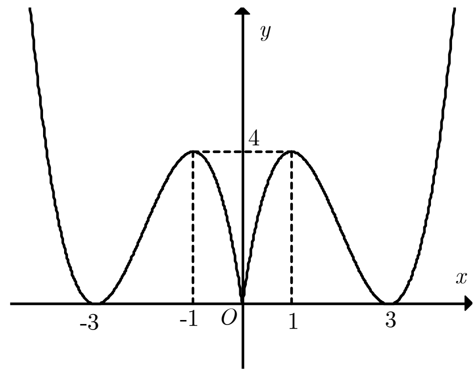
Lời giải. Đạo hàm $f'(x)=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right).$

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1)=a+b=-1 \\ f'(1)=2(2a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 26. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong bốn đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

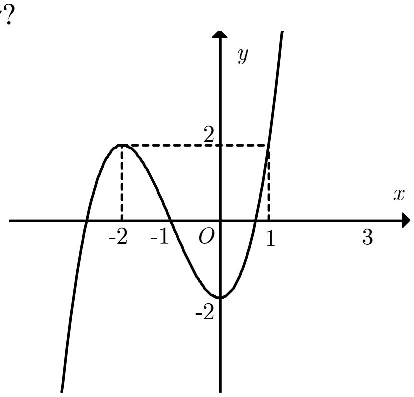
A. $y=-x^3+6x^2-9x.$ **B.** $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|.$

C. $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$ **D.** $y=|x|^3-6x^2+9|x|.$

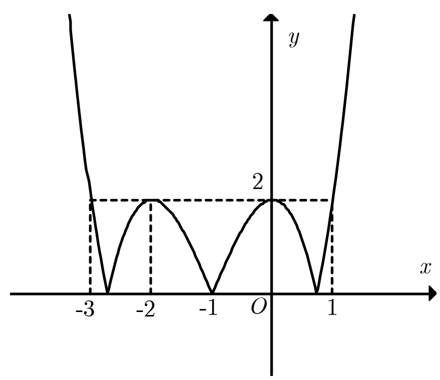
Lời giải. Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $x\geq 0.$
- Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ ở trên qua trục Oy. **Chọn D.**

Câu 27. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

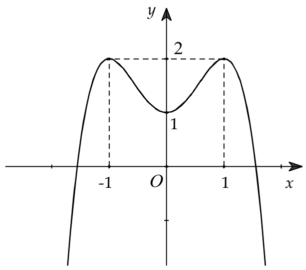
A. $y=|x|^3+3|x|^2-2.$ **B.** $y=\left|x^3+3x^2-2\right|.$

C. $y=\left||x|^3+3x^2-2\right|.$ **D.** $y=-x^3-3x^2+2.$

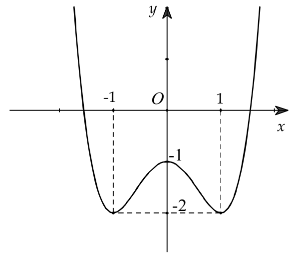
Lời giải. Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $y\geq 0.$
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $y<0$ qua trục $Ox.$ **Chọn B.**

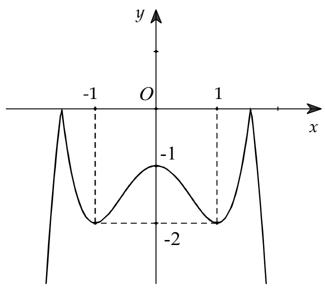
Câu 28. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y=\left|2x^2-x^4+1\right|$?



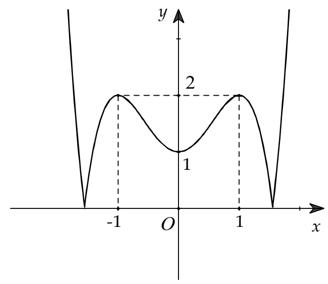
A



B



C

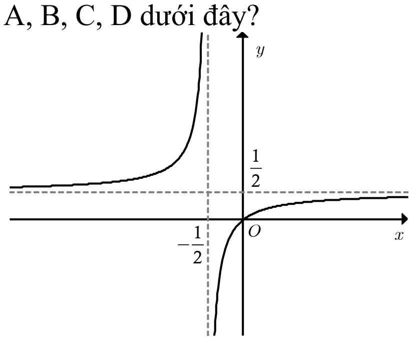


D

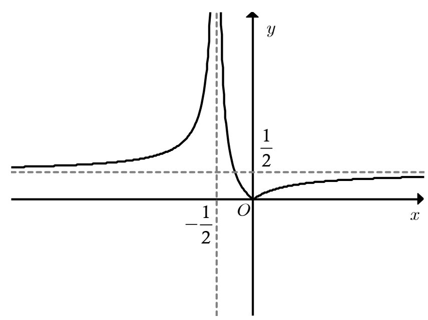
Lời giải.

Ta có $y=\left|2x^2-x^4+1\right|\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow$ đồ thị luôn nằm phía trên trục hoành. **Chọn D**.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1

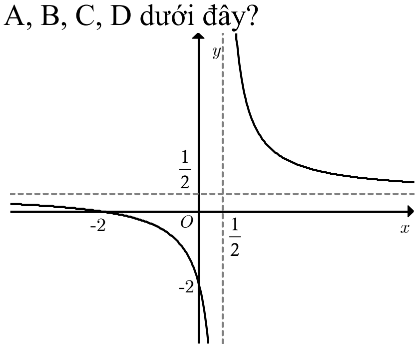


Hình 2

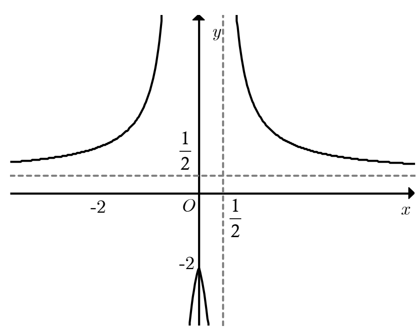
A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$. **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



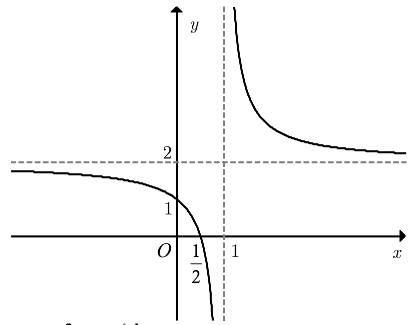
Hình 2

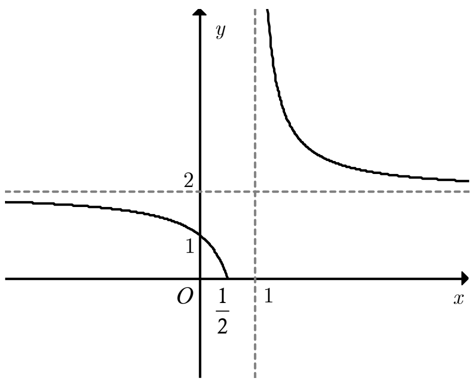
A. $y=-\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)$. **B.** $y=\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$ **C.** $y=\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$. **D.** $y=\dfrac{|x|+2}{2x-1}$.

Lời giải. Chọn B.

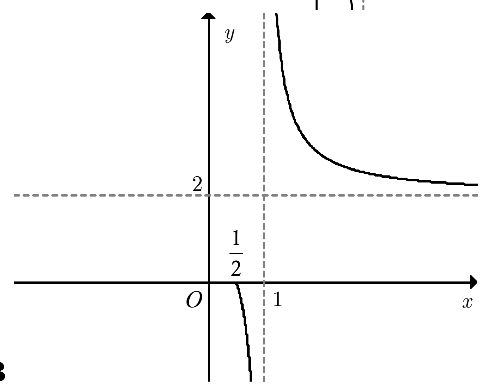
Câu 31. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}$ có đồ thị là hình nào trong các đáp án sau:

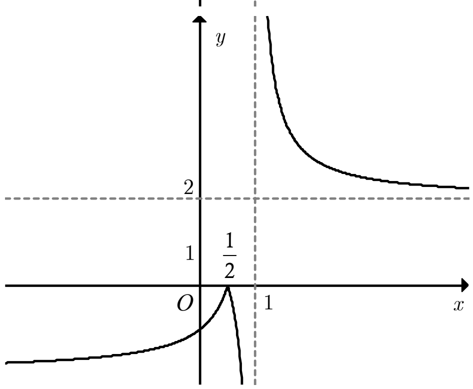




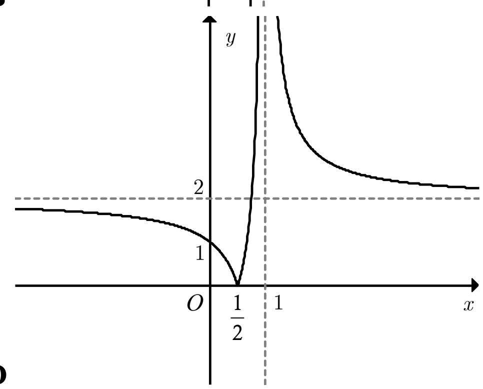
A



B



C



D

Lời giải. Ta có $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x\ge\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

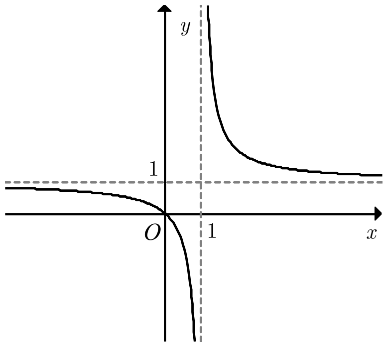
Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}$ được suy từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ bằng cách:

● Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$.

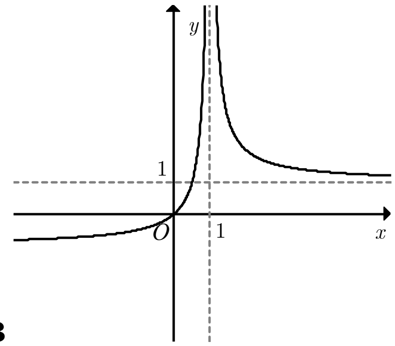
● Phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ thì lấy đối xứng qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}$. **Chọn C.**

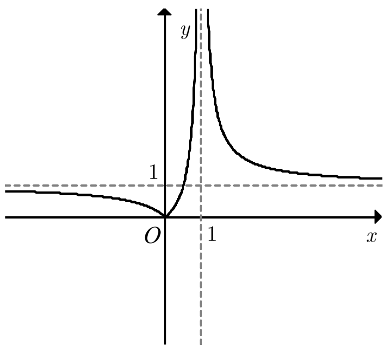
Câu 32. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{|x-1|}$?



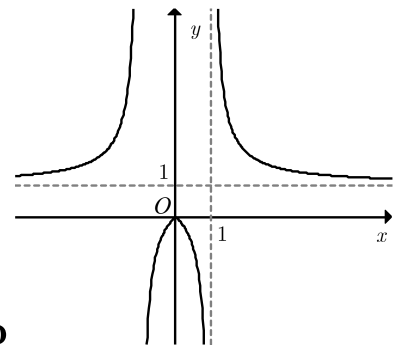
A



B



C



D

Lời giải. Ta có $y=\dfrac{x}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{|x-1|}$ được suy từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ bằng cách:

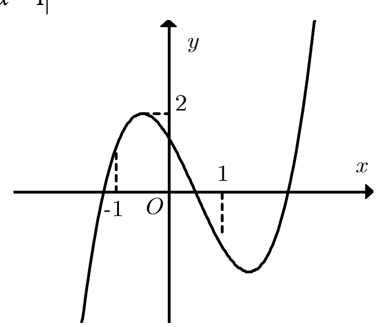
● Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x=1$.

● Phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x=1$ thì lấy đối xứng qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{|x-1|}$. **Chọn B.**

Câu 33. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.
B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$.
C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.
D. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a>0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có $-1<x_{CD}<0,\ x_{CT}>1 \longrightarrow \begin{cases}x_{CD}+x_{CT}>0\\ x_{CD}.x_{CT}<0\end{cases}$. (*)

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c=0$. Do đó $(*) \leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{2b}{3a}>0 \longrightarrow \dfrac{b}{a}<0 \xrightarrow{a>0} b<0\\ \dfrac{c}{3a}<0 \longrightarrow \dfrac{c}{a}<0 \xrightarrow{a>0} c<0\end{cases}$.

Vậy $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0.$ **Chọn C.**

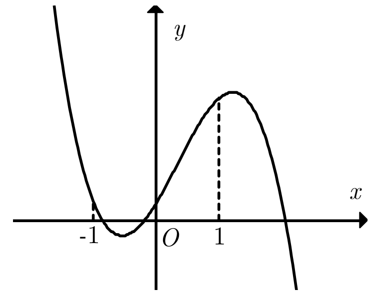
Câu 34. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$

B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0.$

C. $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d>0.$

D. $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d>0.$



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a<0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Hàm số có $x_{CD}>1,\ -1<x_{CT}<0 \longrightarrow \begin{cases} x_{CD}+x_{CT}>0 \\ x_{CD}.x_{CT}<0 \end{cases}.$ (*)

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c=0.$ Do đó $(*) \leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a}>0 \longrightarrow \dfrac{b}{a}<0 \xrightarrow{a<0} b>0 \\ \dfrac{c}{3a}<0 \longrightarrow \dfrac{c}{a}<0 \xrightarrow{a<0} c>0 \end{cases}.$

Vậy $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$ **Chọn A.**

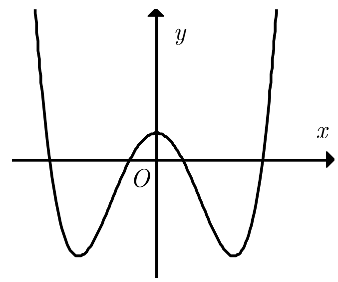
Câu 35. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a>0,\ b>0,\ c<0.$

B. $a>0,\ b<0,\ c<0.$

C. $a>0,\ b<0,\ c>0.$

D. $a<0,\ b>0,\ c<0.$



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a>0.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0 \xrightarrow{a>0} b<0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c>0.$

Vậy $a>0,\ b<0,\ c>0.$ **Chọn C.**

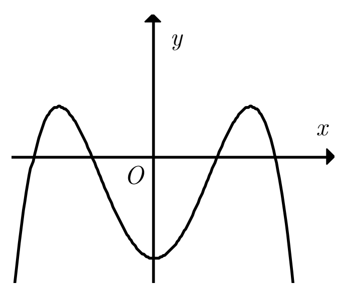
Câu 36. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a<0,\ b>0,\ c>0.$

B. $a<0,\ b>0,\ c<0.$

C. $a<0,\ b<0,\ c>0.$

D. $a<0,\ b<0,\ c<0.$



Lời giải. Đồ thị hàm số thể hiện $a<0.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab<0 \longrightarrow b>0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0.$

Vậy $a<0,\ b>0,\ c<0$. **Chọn B.**

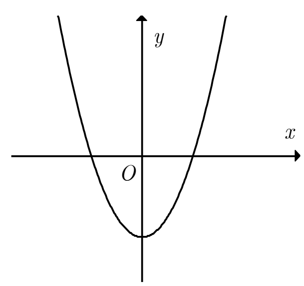
Câu 37. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$

B. $a>0,\ b<0,\ c\leq 0.$

C. $a>0,\ b\geq 0,\ c>0.$

D. $a<0,\ b<0,\ c<0.$

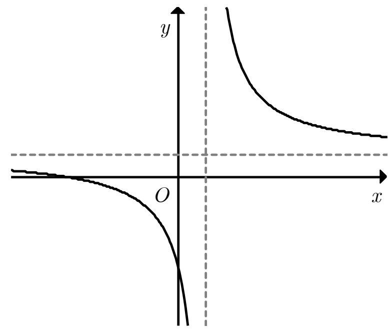


Lời giải. Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a>0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab \geq 0 \xrightarrow{a>0} b \geq 0$.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.
Vậy $a > 0,\ b \geq 0,\ c < 0$. **Chọn A.**

Câu 38. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.
B. $b > 0,\ c < 0,\ d < 0$.
C. $b < 0,\ c < 0,\ d < 0$.
D. $b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.



Lời giải. Từ đồ thị hàm số, ta thấy

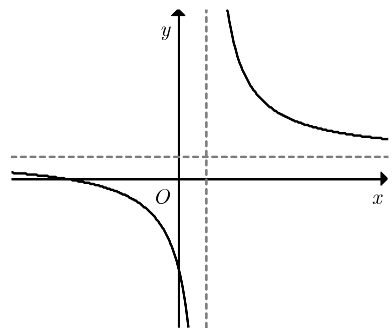
● Khi $y = 0 \longrightarrow x = -\dfrac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b > 0$.

● Khi $x = 0 \longrightarrow y = \dfrac{b}{d} < 0 \xrightarrow{b>0} d < 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \xrightarrow{d<0} c > 0$. Vậy $b > 0,\ c > 0,\ d < 0$. **Chọn A.**

Câu 39. Hàm số $y = \dfrac{bx-c}{x-a}$ $(a \neq 0;\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

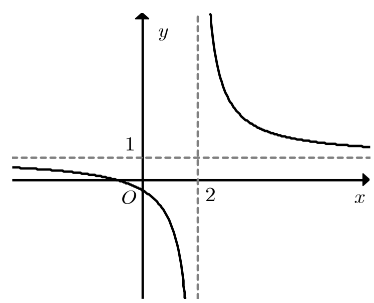
A. $a > 0,\ b > 0,\ c - ab < 0$.
B. $a > 0,\ b > 0,\ c - ab > 0$.
C. $a > 0,\ b > 0,\ c - ab = 0$.
D. $a > 0,\ b < 0,\ c - ab < 0$.



Lời giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = a > 0$; tiệm cận ngang $y = b > 0$.
Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y' = \dfrac{c-ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \longrightarrow c - ab < 0$. Vậy $a > 0,\ b > 0,\ c - ab < 0$. **Chọn A.**

Câu 40. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y' < 0,\ \forall x \neq 1$. **B.** $y' < 0,\ \forall x \neq 2$.
C. $y' > 0,\ \forall x \neq 1$. **D.** $y' > 0,\ \forall x \neq 2$.

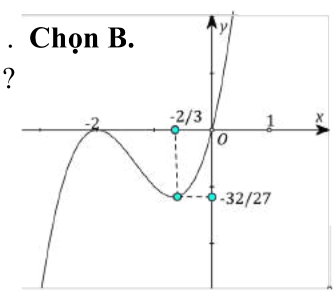


Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số suy ra $y' < 0,\ \forall x \neq 2$. **Chọn B.**

Câu 41. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

A. $y = -x^3 + 3x + 2$ **B.** $y = x^3 + x^2 + 9x$
C. $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$.



Đáp án là C
Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(0;0),(0;2) \Rightarrow$ **đáp án C**.

Bài 5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Khái niệm tiệm cận

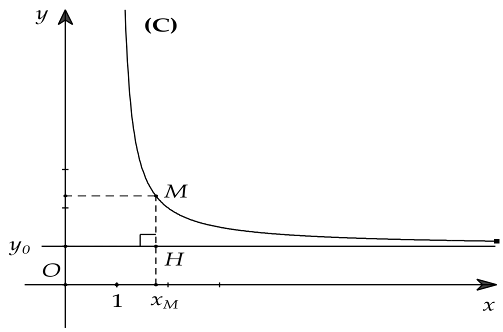
Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Điểm $M\in(C)$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d. Đường thẳng d gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH dần về 0 khi $|x|\to+\infty$ hoặc $|x|\to x_0$.

2. Định nghĩa tiệm cận đứng (TCĐ), tiệm cận ngang (TCN)

a. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0}$$



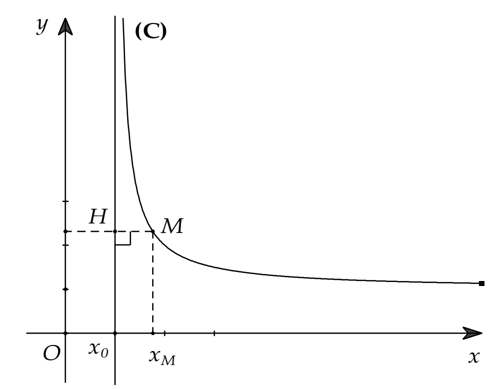
Chú ý :

- Nếu $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ thì ta viết chung là $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$.
- Hàm số có TXĐ không phải các dạng sau: $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$ thì đồ thị không có tiệm cận ngang.

b. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty}$$



Chú ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$
D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Câu 1. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

● $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \longrightarrow y=1$ là TCN.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \longrightarrow y=-1$ là TCN. **Chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
D. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.

Câu 2. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \longrightarrow y=0$ là TCN.

Đáp án B sai vì chọn hàm $y=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x & ;x\le -1\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x & ;x\ge 1\end{cases}$. Vậy ta chỉ có đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
B. Trục hoành và trục tung là hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.
C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.
D. Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathrm{D}=(0,+\infty)$.

Câu 3. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

● $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \longrightarrow y=0$ là TCN.

● $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty \longrightarrow x=0$ là TCĐ. **Chọn B.**

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ và tiệm cận đứng $x=1$.
D. Đồ thị hàm số hai tiệm cận ngang là các đường $y=-1$ và $y=1$.

Câu 4. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \longrightarrow y=-1$ là TCN.

● $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty \longrightarrow x=1$ là TCĐ. **Chọn C.**

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=10$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$ và đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=2$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=10$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nhưng có một tiệm cận đứng $x=2$.

Câu 5. Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \longrightarrow y=1$ là TCN.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=10 \longrightarrow x=0$ không phải là TCĐ. **Chọn A.**

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathrm{D}=(-3;3)\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty.$$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng hai TCĐ là các đường thẳng $x=-3$ và $x=3$.

B. Đồ thị hàm số có đúng hai TCĐ là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$.

C. Đồ thị hàm số có đúng bốn TCĐ là các đường thẳng $x=\pm1$ và $x=\pm3$.

D. Đồ thị hàm số có sáu TCĐ.

Câu 6. Chọn C.

Câu 7. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ không xác định tại x_0 thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=x_0$

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ bất kì có nhiều nhất hai đường tiệm cận ngang.

Câu 7. A sai vì chỉ cần một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ tồn tại thì đã suy ra được tiệm cận ngang là $y=1$.

B sai, ví dụ hàm số $y=\sqrt{x^3-1}$ không xác định tại $x=-2$ nhưng $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ không tiến đến vô cùng nên $x=-2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

C sai vì chỉ cần tồn tại một trong bốn giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty.$$

D đúng vì chỉ có hai giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **Chọn D.**

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y=-1$ và tiệm cận ngang $x=-2$.
B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=-2$.

Câu 8. Từ bảng biến thiên, ta có :

● $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty \end{cases} \longrightarrow x=-1$ là TCĐ. ● $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y=-2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-2 \end{cases} \longrightarrow y=-2$ là TCN. **Chọn D.**

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	5 $\searrow$		$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số có hai TCN $y=2,\ y=5$ và một TCĐ $x=-1$.
D. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.

Câu 9. Từ bảng biến thiên, ta có:

● $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty \end{cases} \longrightarrow x=-1$ là TCĐ.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5 \longrightarrow y=5$ là TCN và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \longrightarrow y=2$ là TCN.

Chọn C.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

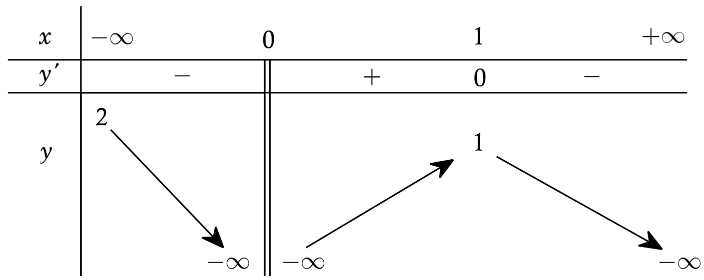
Kết luận nào sau đây đầy đủ về đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$?
A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\pm1$.
B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$.
C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\pm1$, tiệm cận đứng $x=-1$.
D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$, tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 10. Ta có $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\sqrt{2}\neq\pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có TCĐ.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \longrightarrow y=-1$ là TCN; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \longrightarrow y=1$ là TCN.

Chọn A.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

D. Hàm số không có cực trị.

Câu 11. Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét như sau:

A đúng vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \longrightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

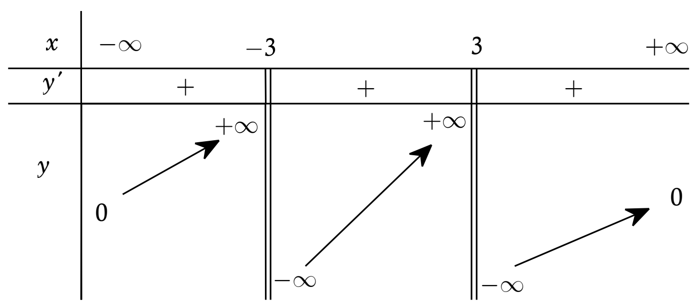
B sai vì tại $x=0$ hàm số không xác định.

C sai vì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 1 trên khoảng $(0;+\infty)$ mà không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;0)$.

D sai vì đạo hàm y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua điểm $x=1 \longrightarrow x=1$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn A.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-3$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

D. Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Câu 12. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0 \longrightarrow y=0$ là TCN;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-3)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} y=+\infty\end{cases} \longrightarrow x=-3$ là TCĐ;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-} y=+\infty\end{cases} \longrightarrow x=3$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả ba đường tiệm cận. Do đó D sai.

Chọn D.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'		||	$+$	||	$-$	
y		|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || 1	$\searrow$	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0 \longrightarrow y = 0$ là TCN;
- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y = -\infty \longrightarrow x = -2$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to0^-} y = +\infty \longrightarrow x = 0$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng ba đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
y'		||	$-$	||	$+$	
y		|| $+\infty$	$\searrow$	2 || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14. Từ bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang;
- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -2$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to1^+} y = -\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 15. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$.

A. $(-2;2)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 15. TXĐ $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có TCĐ: $x = -2$ và TCN: $y = 1$.

Suy ra giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-2;1)$. **Chọn D.**

Câu 16. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 16.

Xét phương trình $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Ta có:

- $\lim_{x\to -4} y = \lim_{x\to -4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-16} = \lim_{x\to -4}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x\to -4}\frac{x+1}{x+4} = \infty \to x=-4$ là TCĐ;
- $\lim_{x\to 4} y = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8} \to x=4$ không là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x^2-9}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$. Ta có:

- $\lim_{x\to 3^-} y = \lim_{x\to 3^-}\frac{x-2}{x^2-9} = -\infty$; $\lim_{x\to 3^+} y = \lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{x^2-9} = +\infty \longrightarrow x=3$ là TCĐ;
- $\lim_{x\to -3^-} y = \lim_{x\to -3^-}\frac{x-2}{x^2-9} = +\infty$; $\lim_{x\to -3^+} y = \lim_{x\to -3^+}\frac{x-2}{x^2-9} = -\infty \longrightarrow x=-3$ TCĐ;
- $\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = 0$; $\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = 0 \longrightarrow y=0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 18. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Đồ thị hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y=\frac{1}{x^4+1}$. **C.** $y=\frac{1}{x^2+1}$. **D.** $y=\frac{1}{x^2+x+1}$.

Câu 18. Nhận thấy các đáp án B, C, D hàm số có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ nên không có TCĐ.
Dùng phương pháp loại trừ thì A đúng. **Chọn A.**

(Thật vậy; hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ có $\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \longrightarrow x=0$ là TCĐ)

Câu 19. Đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{khi } x\ge 1\\ \frac{2x}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19. Ta có:

- $\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1} = -\infty \longrightarrow x=1$ là TCĐ;
- $\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{x-1} = 2 \longrightarrow y=2$ là TCN;
- $\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1 \longrightarrow y=1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận.
Chọn A.

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$, $y=3$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

Câu 20. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{|x|+1}=-3 \longrightarrow y=-3$ là TCN; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{|x|+1}=3 \longrightarrow y=3$ là TCN. **Chọn C.**

Câu 21. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 21. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=1 \longrightarrow y=1$ là TCN.

Xét phương trình $x^2-|x|-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty \end{cases} \longrightarrow x=2$ là TCĐ;

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} y=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} y=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-|x|-2}=+\infty \end{cases} \longrightarrow x=-2$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận. **Chọn D.**

Câu 22. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}$. **B.** $y=\dfrac{|x|-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}$.

Câu 22. A. Xét $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1+\frac{2}{x}}=1;$

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{-1+\frac{2}{x}}=1$. Vậy A. sai.

B. Xét $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1;$

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-1$. Vậy B đúng.

Chọn B. (C và D có thể loại trừ vì TXĐ không chứa $-\infty$ và $+\infty$)

Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.
D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 23. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1\longrightarrow y=1$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1\longrightarrow y=-1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng hai tiệm cận ngang. **Chọn C.**

Câu 24. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Ta có $4x^2+2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow$ TXĐ của hàm số $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 25. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 25. TXĐ: $\mathrm{D}=(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Ta có:

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}(x-1)}=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=1$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}=-\infty\longrightarrow x=-1$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=0\longrightarrow y=0$ Là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 26. TXĐ $\mathrm{D}=[7;+\infty)$.

Vì $x^2+3x-4\neq0,\ \forall x\in\mathrm{D}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. **Chọn C.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{3x-\sqrt{x-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 27.

TXĐ: $\mathrm{D}=[1;+\infty)$.

Do đó ta chỉ xét

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{3}\longrightarrow y=\frac{2}{3} \text{ là TCN.}$$

Vậy đồ thị hàm số có đúng một TCN. **Chọn A.**

Câu 28. Gọi $n,\ d$ lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $n=d=1$. **B.** $n=0;\ d=1$. **C.** $n=1; d=2$. **D.** $n=0;\ d=2$.

Câu 28. TXĐ: $\mathrm{D}=(0;1)\longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x\to-\infty} y$ và $\lim_{x\to+\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét phương trình $(x-1)\sqrt{x}=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$. Ta có:

- $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\infty\longrightarrow x=0$ là TCĐ;
- $\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x}}=\infty\longrightarrow x=1$ là TCĐ. Vậy $n=0;\ d=2$. **Chọn D.**

Câu 29. Đồ thị hàm số $y=\frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. TXĐ: $\mathrm{D}=(-3;3)\longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x\to-\infty} y$ và $\lim_{x\to+\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có:

- $\lim_{x\to-3^+}\frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{x\to-3^+}\frac{x+3}{\sqrt{3-x}.\sqrt{3+x}}=\lim_{x\to-3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}}=0\longrightarrow x=-3$ không là TCĐ;
- $\lim_{x\to3^-}\frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{x\to3^-}\frac{x+3}{\sqrt{3-x}.\sqrt{3+x}}=\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-x}}=+\infty\longrightarrow x=3$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 30. Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 30. TXĐ: $\mathrm{D}=(-4;4)\longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x\to-\infty} y$ và $\lim_{x\to+\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có:

- $\lim_{x\to-4^+}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}=\lim_{x\to-4^+}\left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}}\right)=-\infty\longrightarrow x=-4$ là TCĐ;
- $\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-16}=\lim_{x\to4^-}\left(\frac{-1}{\sqrt{16-x^2}}\right)=-\infty\longrightarrow x=4$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 31. Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3.

Câu 31. TXĐ: $\mathrm{D}=[-1;0)\cup(0;1]\longrightarrow$ không tồn tại $\lim_{x\to-\infty} y$ và $\lim_{x\to+\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x=0$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 32. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 32. TXĐ: $D=\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]\setminus\{1\} \longrightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x\sqrt{3-x^2}}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x=1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33. TXĐ: $D=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\setminus\{1\} \longrightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y$. Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{x^2-3x+2} = 0 \end{cases} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận. **Chọn A.**

Câu 34. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 34. TXĐ: $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1 \longrightarrow y=1$ là TCN và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \longrightarrow y=-1$ là TCN;
- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-(-x-1)}{\sqrt{(-x-1)(1-x)}} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{1-x}} = 0 \longrightarrow x=-1$ không là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \longrightarrow x=1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có đúng ba tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}$. Gọi d, n lần lượt là số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $n+d=1$. **B.** $n+d=2$. **C.** $n+d=3$. **D.** $n+d=4$.

Câu 35.

Để căn thức có nghĩa khi $2x^2-1\ge 0 \longleftrightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$.

Xét $\sqrt{2x^2-1}-1=0 \leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}=1 \leftrightarrow 2x^2-1=1 \leftrightarrow x=\pm1\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$.

Do đó tập xác định của hàm số: $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)\setminus\{-1;1\}$.

Ta có

● $\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)}{2\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)}=\infty\longrightarrow x=-1$ là TCĐ;

● $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)}{2\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}\longrightarrow x=1$ không là TCĐ;

● $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\longrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN;

● $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\longrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ là TCN.

Vậy $d=1,\ n=2\longrightarrow n+d=3$. **Chọn C.**

Câu 36. Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 36. Ta có $y=\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}=\frac{|x+1|}{x^2-1}=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & \text{khi } x>-1, x\neq1\\ -\frac{1}{x-1} & \text{khi } x<-1\end{cases}$.

● Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

● $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-1}=0\longrightarrow y=0$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^4-4x^2+4}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
B. Đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận đứng.
D. Đồ thị hàm số có đường tiện cận ngang là $x=1$.

Câu 37. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$. Ta có:

● $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1\longrightarrow y=1$ là TCN;

● $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^-} y=-\infty\end{cases}\longrightarrow x=\sqrt{2}$ là TCĐ;

● $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^+} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-} y=+\infty\end{cases}\longrightarrow x=-\sqrt{2}$ là TCĐ.

Vậy hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. **Chọn B.**

Câu 38. Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 38. TXĐ: $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. Ta có:

● $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1\longrightarrow y=1$ là TCN;

- $\lim\limits_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^-} y = +\infty \longrightarrow x = -\sqrt{2}$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty \longrightarrow x = -1$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty \longrightarrow x = 1$ là TCĐ;
- $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} y = +\infty \longrightarrow x = \sqrt{2}$ là TCĐ.

Vậy hàm số đã cho có tất cả năm đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 39. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = -\dfrac{3}{4} \longrightarrow x = 1$ không là TCĐ.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[3]{x^4} - 1} = +\infty \end{cases} \longrightarrow x = -1$ là TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 40. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 40. Ta có:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2 + \dfrac{3}{x}}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}} + 1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)} - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}} - 1\right) = +\infty \end{cases}.$$

Vậy đồ thị có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$. **Chọn C.**

Câu 41. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $M\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 41. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^-} y = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^-} \dfrac{mx - 1}{2x + m} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{m}{2}\right)^+} \dfrac{mx - 1}{2x + m} = -\infty \end{cases} \longrightarrow x = -\dfrac{m}{2}$ là TCĐ.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$. **Chọn A.**

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2m^2x - 5}{x + 3}$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=0$.

Câu 42. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2m^2x-5}{x-3}=2m^2 \longrightarrow y=2m^2$ là TCN.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow 2m^2=8 \Leftrightarrow m=\pm 2$. **Chọn C.**

Câu 43. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}$ nhận hai trục tọa độ làm hai đường tiệm cận. Tính tổng $S=m^2+n^2-2$.

A. $S=2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-1$.

Câu 43. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(m-2n-3)x+5}{x-m-n}=m-2n-3 \longrightarrow y=m-2n-3$ là TCN;
- $\left|\lim\limits_{x\to(n+m)^+} y\right|=+\infty \longrightarrow x=m+n$ là TCĐ.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} m+n=0 \\ m-2n-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases} \longrightarrow S=m^2+n^2-2=0$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=0$. **B.** $m=1$, $m=2$. **C.** $m=0$, $m=1$. **D.** $m=1$.

Câu 44. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y=\dfrac{(x-m)(2x+2m-3)+2m(m-1)}{x-m}=2x+2m-3+\dfrac{2m(m-1)}{x-m}$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giới hạn $\lim\limits_{x\to m^\pm} y$ tồn tại hữu hạn

$\Leftrightarrow 2m(m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=0 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Cách 2. (Chỉ áp dụng cho mẫu thức là bậc nhất)

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $2x^2-3x+m=0$ có một nghiệm là $x=m$

$\longrightarrow 2m^2-3m+m=0 \Leftrightarrow 2m(m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có ba đường tiệm cận.

A. $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{2};-2\right)$.

C. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{2};-2\right)\cup(2;+\infty)$. **D.** $m\in(2;+\infty)$.

Câu 45. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}=0 \longrightarrow y=0$ là TCN với mọi m.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ (-1)^2-2m.(-1)+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ 2m+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Chọn C.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{3x^2-2ax+a}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $a=0,\ a=3$. **C.** $a=1,\ a=2$. **D.** $a=\pm 2$.

Câu 46. Ycbt $\Leftrightarrow 3x^2-2ax+a=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'=a^2-3a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=3 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x+m}$ có đúng một tiệm cận ngang và đúng một tiệm cận đứng.

A. $m<4$. **B.** $m>4$. **C.** $m=4,\ m=-12$. **D.** $m\neq 4$.

Câu 47. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x^2-4x+m}=0 \longrightarrow y=0$ là TCN với mọi m.

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-4x+m=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng $-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=4-m=0 \\ \begin{cases} \Delta'=4-m>0 \\ (-2)^2-4(-2)+m=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-12 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2-4x+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

A. $m=-12$. **B.** $m>4$. **C.** $m=-12,\ m>4$. **D.** $m\neq 4$.

Câu 48. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x^2-4x+m}=0 \longrightarrow y=0$ là TCN với mọi m.

Do đó để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-4x+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow m>4$. **Chọn B.**

Nhận xét. Bạn đọc dễ nhầm lẫn mà xét thêm trường hợp mẫu thức $x^2-4x+m=0$ có nghiệm $x=-2 \longrightarrow m=-12$. Điều này là sai, vì với $m=-12$ thì hàm số trở thành $y=\dfrac{1}{x-6}$. Đồ thị này vẫn còn TCĐ là $x=6$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Câu 49. Ycbt $\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ (-2)^2-4.(-2)+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ m+12\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m\neq -12 \end{cases} \xrightarrow[m\in[-2017;2017]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2017;...;0;1;2;3\}\setminus\{-12\}$.

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên thỏa mãn.

Chọn C.

Câu 50. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m<0$. **C.** $m=0$. **D.** $m>0$.

Câu 50.

Khi $m>0$, ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN ;

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN.

Với $m=0$ suy $y=\dfrac{x+1}{1} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m<0$ thì hàm số có TXĐ là một đoạn nên đồ thị hàm số không có TCN.

Vậy với $m>0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang. **Chọn D.**

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng một tiệm cận ngang.

A. $m=0,\ m=1.$ **B.** $m\ge 0.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=0.$

Câu 51. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{m}}$ với $m\ge 0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \dfrac{1}{1-\sqrt{m}}$ với $m\ge 0,\ m\ne 1.$

Nếu $m=1$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{4} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2.\dfrac{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)\left(-\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-1\right)}{4} = -\infty$, suy ra hàm số chỉ có đúng một TCN là $y=\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{do } \lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{1}{2} \text{ khi } m=1\right)$. Do đó giá trị $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nếu $\begin{cases} m\ge 0 \\ m\ne 1 \end{cases}$, để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{m}} = \dfrac{1}{1-\sqrt{m}} \Leftrightarrow m=0.$

Vậy $m=0, m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}}$ với m là tham số thực và $m>\dfrac{1}{2}$. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 52. Khi $m>\dfrac{1}{2}$ thì phương trình $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}} = 1 \longrightarrow y=1$ là TCN;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+2(m-1)x+m^2}} = -1 \longrightarrow y=-1$ là TCN.

Vậy đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 53. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang.

A. $m=0$. **B.** $m<0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 53.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ tồn tại hữu hạn. Ta có:

● Với $m=0\longrightarrow y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{3}}$. Khi đó $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty\end{cases}$ suy ra đồ thị không có TCN.

● Với $m<0$, khi đó hàm số có TXĐ: $\mathrm{D}=\left(-\sqrt[4]{-\dfrac{3}{m}};\sqrt[4]{-\dfrac{3}{m}}\right)$ nên ta không xét trường hợp $x\to+\infty$ hay $x\to-\infty$ được. Do đó hàm số không có tiệm cận ngang.

● Với $m>0$, khi đó hàm số có TXĐ $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{m+\dfrac{3}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{m+\dfrac{3}{x^4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$

$\longrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ là TCN. **Chọn C.**

Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, suy ra $M\left(x_0;y_0=\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có **TCĐ** $\Delta_1: x+\dfrac{d}{c}=0$; **TCN** $\Delta_2: y-\dfrac{a}{c}=0$.

Ta có $\begin{cases}d_1=d[M,\Delta_1]=\left|x_0+\dfrac{d}{c}\right|=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|\\ d_2=d[M,\Delta_2]=\left|y_0-\dfrac{a}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|\end{cases}$.

$d_1=kd_2$	$\left\|\dfrac{cx_0+d}{c}\right\|=k\left\|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right\|\longrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\sqrt{kp}$
$d_1.d_2$	$d_1.d_2=\left\|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right\|=p=\text{const}$
$d_1+d_2\longrightarrow\min$	$d_1+d_2\geq 2\sqrt{\dfrac{\|ad-bc\|}{c^2}}=2\sqrt{p}$ Dấu "=" xảy ra khi $\left\|\dfrac{cx_0+d}{c}\right\|=\left\|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right\|$ $\longleftrightarrow(cx_0+d)^2=\|ad-bc\|\longleftrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\sqrt{p}$
Điểm $M(x_0;y_0)$ có hoành độ thỏa $x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\sqrt{p}$	● Có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận ngắn nhất $2\sqrt{p}$. ● Khoảng cách đến tâm đối xứng nhỏ nhất $\sqrt{2p}$.

Câu 54. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng ba lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị.

A. $M\left(-4;\dfrac{7}{5}\right)$ hoặc $M(2;5)$.
B. $M(4;3)$ hoặc $M(-2;1)$.
C. $M(4;3)$ hoặc $M(2;5)$.
D. $M\left(-4;\dfrac{7}{5}\right)$ hoặc $M(-2;1)$.

Câu 54. Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)$ với $a\neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Đường tiệm cận đứng $d: x=1$; đường tiệm cận ngang $d': y=2$.

Ycbt $\Leftrightarrow d[M,d]=3d[M,d'] \Leftrightarrow |a-1|=3\left|\dfrac{2a+1}{a-1}-2\right|$

$\Leftrightarrow (a-1)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(4;3) \\ M(-2;1) \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Áp dụng công thức giải nhanh. $\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|=k\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \longrightarrow x_0=-\dfrac{d}{c}\pm\sqrt{kp}$

với $c=1,\ d=-1,\ k=3,\ p=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|=3$. Suy ra $x_0=1\pm 3$.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ (C) với m là tham số thực. Gọi M là điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất đó bằng 2.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2,\ m=0$. **D.** $m=1$.

Câu 55. Áp dụng công thức giải nhanh.

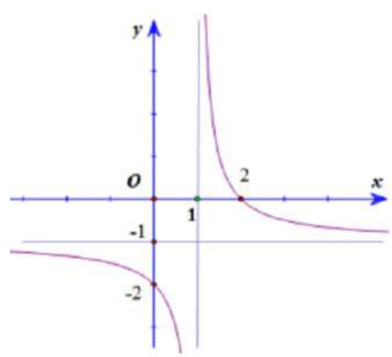
Điểm $M\left(x_0;y_0=\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Đồ thị hàm số có TCĐ $\Delta_1: x+\dfrac{d}{c}=0$; TCN $\Delta_2: y-\dfrac{a}{c}=0$.

Ta có $\begin{cases} d_1=d[M,\Delta_1]=\left|x_0+\dfrac{d}{c}\right|=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right| \\ d_2=d[M,\Delta_2]=\left|y_0-\dfrac{a}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \end{cases}$. Khi đó $d_1+d_2\ge 2\sqrt{\dfrac{|ad-bc|}{c^2}}$.

Áp dụng: Ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{|ad-bc|}{c^2}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{|ad-bc|}{c^2}=1 \Leftrightarrow |1+m|=1 \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$



A. $T=-9$ **B.** $T=-7$ **C.** $T=12$ **D.** $T=10$

Đáp án A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đường TCĐ $x=-c \Rightarrow -c=1 \Leftrightarrow c=-1$, TCN $y=a \Rightarrow a=-1$

Đồ thị hàm số đi qua $(0;-1) \Rightarrow -2=\dfrac{b}{c} \Rightarrow b=-2c=2$

$\Rightarrow T=a-3b+2c=-1-3.2+2(-1)=-9.$

Bài 6. TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Xét hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C_1) và (C_2) là: $f(x) = g(x)$. (1)

Số điểm chung giữa (C_1) và (C_2) đúng bằng số nghiệm của phương trình (1).

(C_1) và (C_2) được gọi là tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0.

A. $y_0 = 4$. **B.** $y_0 = 0$. **C.** $y_0 = 2$. **D.** $y_0 = -1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \longrightarrow y = 2.$$ **Chọn C.**

Câu 2. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) không cắt trục hoành. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:

$$(x-2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm. **Chọn B.**

Câu 3. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB = 3$. **B.** $AB = 2\sqrt{2}$. **C.** $AB = 2$. **D.** $AB = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \to y = -1 \\ x = 2 \to y = -1 \end{array}\right..$$

Suy ra $A(1;-1)$, $B(2;-1) \longrightarrow AB = 1$. **Chọn D.**

> Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
>
> ● Nếu nhẩm được một nghiệm x_0 thì phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ ax^2 + b'x + c' = 0 \end{array}\right.$.
>
> ● Cô lập tham số m và lập bảng biến thiên hoặc dùng đồ thị.
>
> ● Nếu không nhẩm được nghiệm và không cô lập được m thì bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị, cụ thể:
>
> ◦ Đồ thị cắt trục hoành đúng ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} < 0$.
>
> ◦ Đồ thị có hai điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} = 0$.
>
> ◦ Đồ thị có một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT} > 0$ hoặc hàm số không có cực trị.
>
> Chú ý: Nếu $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nhẩm được hai nghiệm thì tính y_{CD}, y_{CT} dễ dàng. Trường hợp không nhẩm được nghiệm thì dùng mối liên hệ hai nghiệm đó là hệ thức Viet.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (4; +\infty)$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

C. $m\in(0;4)$. **D.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x-1)(x^2+mx+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2+mx+m=0\ (1)\end{array}\right..$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow\begin{cases}1^2+m.1+m\neq 0\\ \Delta=m^2-4m>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1\neq 0\\ m(m-4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m>4\\m<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>4\\ \begin{cases}m\neq-\frac{1}{2}\\ m<0\end{cases}\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m\in(-4;0)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-4)$. **D.** $m\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải. Xét hàm bậc ba $y=x^3-3x^2$, có

$$y'=3x^2-6x\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\longrightarrow y_{CD}=0\\x=2\longrightarrow y_{CT}=-4\end{array}\right..$$

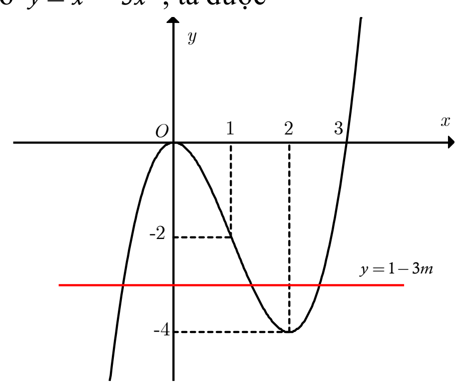
Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có ycbt $\Leftrightarrow y_{CT}<m<y_{CD}\Leftrightarrow -4<m<0$. **Chọn A.**

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2+3m-1=0$ có ba nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

A. $\frac{1}{3}<m<\frac{5}{3}$. **B.** $1<m<\frac{5}{3}$. **C.** $2<m<\frac{7}{3}$. **D.** $-2<m<\frac{4}{3}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow x^3-3x^2=1-3m$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, ta được



Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow$ $-4<1-3m<-2\Leftrightarrow 1<m<\frac{5}{3}$. **Chọn B.**

Chú ý: Sai lầm hay gặp là cho $-4<1-3m<0$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt:

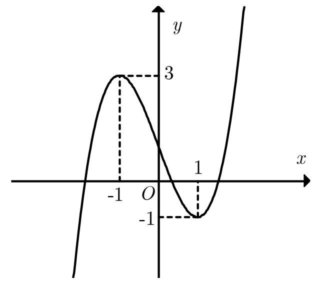
A. $m=-\frac{1}{2}$, $m=-1$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{5}{2}$.

C. $m=\frac{1}{2}$, $m=\frac{5}{2}$. **D.** $m=1$, $m=-\frac{5}{2}$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2$, có $f'(x)=6x^2-6x\longrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\longrightarrow y_{CD}=0\\x=1\longrightarrow y_{CT}=-1\end{array}\right..$

Dựa vào dạng đặc trưng của đồ thị hàm bậc ba, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi $\left[\begin{array}{l}2m+1=y_{CD}\\2m+1=y_{CT}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+1=0\\2m+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{2}\\m=-1\end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)+m-2018=0$ có duy nhất một nghiệm.



A. $m=2015,\ m=2019.$ **B.** $2015<m<2019.$

C. $m<2015,\ m>2019.$ **D.** $m\le 2015,\ m\ge 2019.$

Lời giải. Phương trình $f(x)+m-2018=0\longleftrightarrow f(x)=2018-m.$ Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2018-m$ (có phương song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2018-m>3\\2018-m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<2015\\m>2019\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m\ne 0.$ **B.** $m>3.$ **C.** $m\ne 3.$ **D.** $m>0.$

Lời giải. Đối với dạng bài này ta không cô lập được m nên bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị.

Ta có $y'=3x^2-2mx=x(3x-2m)\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{2m}{3}\end{array}\right.$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\dfrac{2m}{3}\ne 0\Leftrightarrow m\ne 0.$

Khi đó ycbt $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT}<0\Leftrightarrow y(0).y\left(\dfrac{2m}{3}\right)<0\Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{-4m^3}{27}+4\right)<0\Leftrightarrow m>3.$ **Chọn B.**

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có đúng hai điểm chung với trục hoành.

A. $m=\dfrac{1}{6}.$ **B.** $m=\sqrt[3]{2}.$ **C.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.$ **D.** $m=\sqrt{3}.$

Lời giải. Ta có $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị và tích hai cực trị bằng $0\Leftrightarrow\begin{cases}2m\ne 0\\y(0).y(2m)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\2.(-4m^3+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.$ **Chọn C.**

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3mx+2=0$ có một nghiệm duy nhất.

A. $0<m<1.$ **B.** $m<1.$ **C.** $m\le 0.$ **D.** $m>1.$

Lời giải. Phương trình $x^3-3mx+2=0$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ và trục hoành.

Xét hàm số $y=x^3-3mx+2$, có $y'=3x^2-3m=3(x^2-m)\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2=m.$

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

● **TH1.** Hàm số có hai cực trị y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn $y_{CD}.y_{CT} > 0$

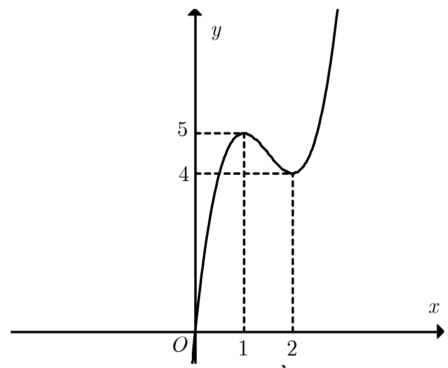
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ y\left(-\sqrt{m}\right).y\left(\sqrt{m}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left(2+2m\sqrt{m}\right)\left(2-2m\sqrt{m}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

● **TH2.** Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow m \le 0$.

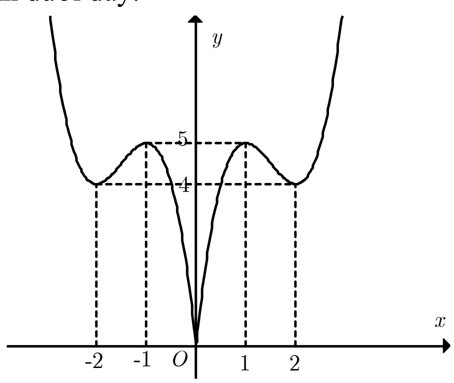
Kết hợp hai trường hợp ta được $m < 1$. **Chọn B.**

Câu 12. Hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0$ có sáu nghiệm phân biệt.

A. $m < -5$.
B. $-5 < m < -4$.
C. $4 < m < 5$.
D. $m > -4$.



Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ như hình dưới đây:

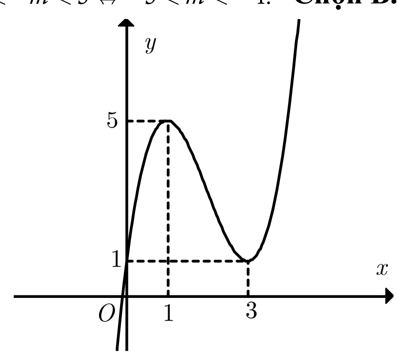


Phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0 \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = -m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ và đường thẳng $y = -m$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$, ta có ycbt $\Leftrightarrow 4 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -4$. **Chọn B.**

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < 1$. **B.** $m > 5$.
C. $m = 1$, $m = 5$. **D.** $0 < m < 1$, $m > 5$.

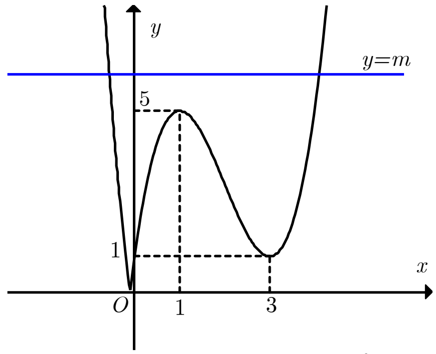


Lời giải. Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \ge 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số (C) từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

● Giữ nguyên đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành.

● Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành (bỏ phần dưới).

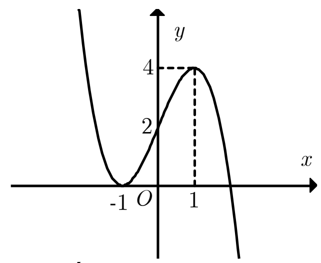
Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.



Phương trình $|f(x)| = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương với trục hoành). Dựa vào đồ thị, ta có ycbt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m > 5 \end{array}\right.$.

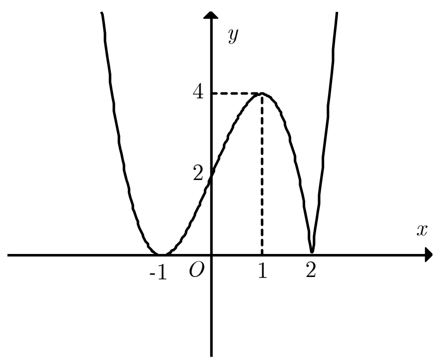
Chọn D.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2|f(x)| - m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt.



A. $0 < m < 8$. **B.** $0 < m < 4$.
C. $m < 0$, $m > 8$. **D.** $-2 < m < 8$.

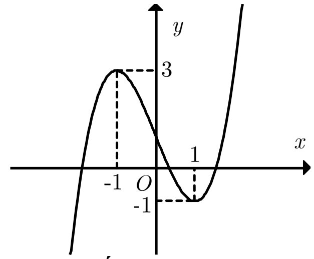
Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình dưới đây:



Phương trình $2|f(x)| - m = 0 \longleftrightarrow |f(x)| = \frac{m}{2}$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = \frac{m}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, ta có ycbt $\Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 8$. **Chọn A.**

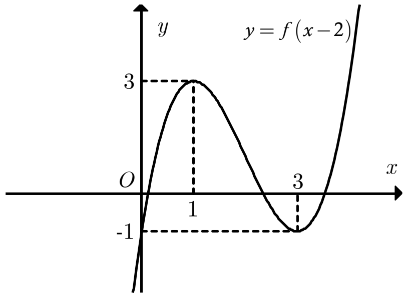
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

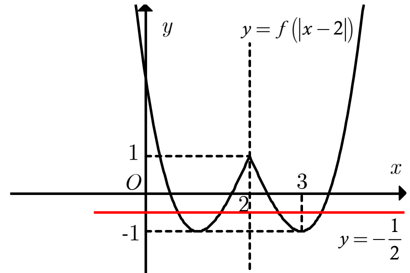


A. 2. **B.** 0.
C. 6. **D.** 4.

Lời giải. Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y = f(x-2)$.
Tiếp theo giữ phần đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = 2$, xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = 2$.

Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ lại ở trên qua đường thẳng $x=2$. Ta được toàn bộ phần đồ thị của hàm số $y=f(|x-2|)$. (hĩnh vẽ bên dưới)





Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(|x-2|)$, ta thấy đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(|x-2|)$ tại 4 điểm phân biệt $\longrightarrow$ phương trình $f(|x-2|)=-\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn D.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-1=m$ có đúng hai nghiệm.

A. $-2<m<-1$. **B.** $m>0$, $m=-1$. **C.** $m=-2$, $m>-1$. **D.** $m=-2$, $m\geq -1$.

Lời giải. Phương trình $f(x)-1=m \longleftrightarrow f(x)=m+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m+1$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m+1>0 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ 1	$\nearrow$	$+\infty$

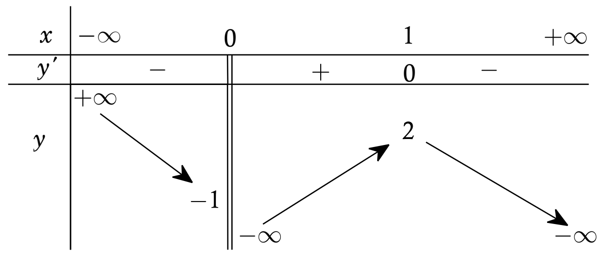
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1\leq m<\frac{3}{2}$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\leq m\leq\frac{3}{2}$. **D.** $1<m<\frac{3}{2}$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow 1<2m-1<2 \Leftrightarrow 1<m<\frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Sai lầm hay gặp là cho $1 \le 2m-1 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le m \le \frac{3}{2} \longrightarrow$ Chọn C. Lí do là giá trị của hàm số không bằng 2 mà chỉ tồn tại $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$ và giá trị của hàm số không bằng 1 mà chỉ tồn tại $\lim\limits_{x \to 1^+} y = 1$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

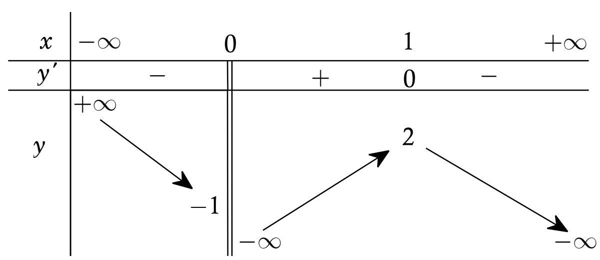


Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm.

A. $m < 2$. **B.** $m < -1$, $m = 2$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m \le -1$, $m = 2$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

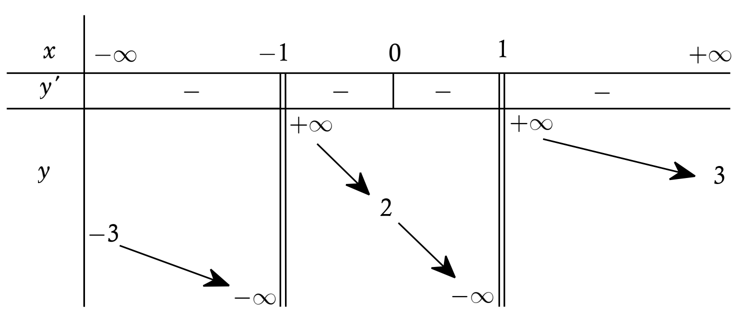


Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $-1 \le m \le 2$. **B.** $-1 < m < 2$. **C.** $-1 < m \le 2$. **D.** $m \le 2$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 2$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



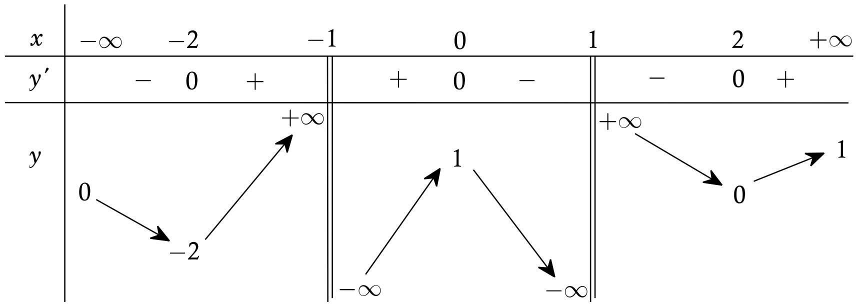
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng $y = 2m+1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m \le -2$. **B.** $m \ge 1$. **C.** $m \le -2$, $m \ge 1$. **D.** $m < -2$, $m > 1$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = 2m+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 2m+1>3 \\ 2m+1<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3 \le 2m+1 \le 3$.

Câu 21. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



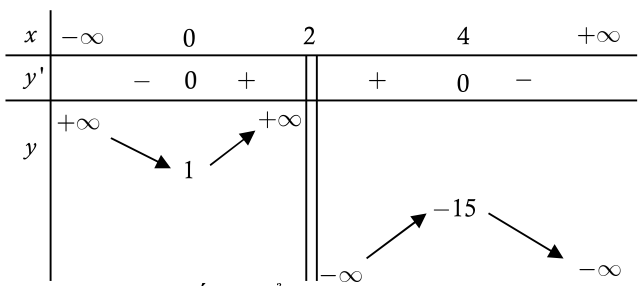
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm.

A. $-2 \le m \le 0$. **B.** $-2 < m < 0$, $m = 1$. **C.** $-2 < m \le 0$. **D.** $-2 < m < 0$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm khi và chỉ khi $-2 < m \le 0$. **Chọn C.**

Nhận xét. Học sinh rất dễ sai lầm vì cho rằng $-2 < m < 0$. Nếu bài toán yêu cầu có hai nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right.$, có ba nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$, có năm nghiệm $0 < m < 1$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

A. $m \in (-\infty; -1] \cup [15; +\infty)$. **B.** $m \in (-\infty; -15) \cup (1; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup (15; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -15] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải. Phương trình $f(x) + m = 0 \longleftrightarrow f(x) = -m$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -m$ (cùng phương với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có nhiều nghiệm thực nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} -m>1 \\ -m<-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>15 \end{array}\right.$.

Chọn C.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1			1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$		0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$4 \;\|\; -\infty$	$\nearrow$		3	$\searrow$	-1

Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ 3<m<4 \end{array}\right.$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba đường tiệm cận.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;1)$. Vì vậy khẳng đinh C là sai. **Chọn C.**

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=m(x-1)+1$ cắt đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-1$ tại ba điểm phân biệt $A(1;1)$, B, C.

A. $m\ne 0$. **B.** $m<\dfrac{9}{4}$. **C.** $0\ne m<\dfrac{9}{4}$. **D.** $m=0$, $m>\dfrac{9}{4}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x-1=m(x-1)+1$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+x-2+m=0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Để đường thẳng d cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-4m>0 \\ m\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4} \\ m\ne 0 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ (C) cắt đường thẳng $d: y=m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$.

A. $m>-3$. **B.** $m=-3$. **C.** $m>-2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3x^2+2=m(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m-2=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Để d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1+m+2>0 \\ 1^2-2.1-m-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-3 \\ m\ne -3 \end{cases} \Leftrightarrow m>-3$.

Giả sử $x_1=1$. Khi đó x_2, x_3 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ x_2x_3=-m-2 \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow x_2^2+x_3^2=4 \Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3=4 \Leftrightarrow 4+2(m+2)=4 \Leftrightarrow m=-2$ (thoả). **Chọn D.**

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4, với $M(1;3)$.

A. $m=2$, $m=3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-2$, $m=-3$. **D.** $m=-2$, $m=3$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+m+2=0 \ (*) \end{array}\right.$.

Để d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ -2\neq m<-1 \end{array}\right.$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1.x_2=m+2 \end{cases}$.

Giải sử $B(x_1;x_1+4), C(x_2;x_2+4)$.

Ta có $BC=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}$ và $d[M,d]=\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Theo đề: $S_{\triangle MBC}=4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(M,d)BC=4 \Leftrightarrow (x_2-x_1)^2=16$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16 \Leftrightarrow m^2-m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3(\text{thoả mãn}) \\ m=-2(\text{loại}) \end{array}\right.$.

Chọn B.

Câu 27. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB=BC$.

A. $m\in(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;3)$. **C.** $m\in(-\infty;-1)$. **D.** $m\in(-\infty;+\infty)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2-m+2=-mx$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+2+m(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+m-2=0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 1^2-2.1+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(m-2)>0 \\ m\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m<3.$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $x_1+x_2=2$ nên suy ra $x_1>1$ hoặc $x_2>1$. Giả sử $x_2>1$ thì $x_1=2-x_2<1$, suy ra $x_1<1<x_2$.

Theo giả thiết $BA=BC$ nên B là trung điểm của AC do đó $x_B=1$ và $x_A=x_1$, $x_C=x_2$. Khi đó ta có $x_A+x_C=2x_B$ nên d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn $AB=BC$.

Vậy với $m<3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx-8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=1$. **B.** $m=2, m=-1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+6mx-8=0.$ $(*)$

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=m.$

Thay $x=m$ vào phương trình $(*)$, ta được $m^3-3m.m^2+6m.m-8=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Thử lại:

● Với $m=-1$, ta được $x^3+3x^2-6x-8=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$: thỏa mãn.

● Với $m=2$, ta được $x^3-6x^2+12x-8=0 \leftrightarrow x=2$: không thỏa mãn.

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 29. Đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2$ có bao nhiêu điểm chung với trục hoành?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^4+2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm chung với trục hoành. **Chọn C.**

Câu 30. Với điều kiện nào của tham số k thì phương trình $4x^2\left(1-x^2\right)=1-k$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. $0<k<2$. **B.** $k<3$. **C.** $-1<k<1$. **D.** $0<k<1$.

Lời giải. Phương trình đã cô lập tham số nên ta nên giải theo cách 1.

Xét hàm số $y=4x^2\left(1-x^2\right)=-4x^4+4x^2$, có

$$y'=-16x^3+8x \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y(0)=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1 \end{array}\right..$$

Ycbt $\leftrightarrow y_{CT}<1-k<y_{CD} \longleftrightarrow 0<1-k<1 \longleftrightarrow 0<k<1$. **Chọn D.**

Câu 31. Cho hàm số $y=x^4-m(m+1)x^2+m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. $m>1$. **B.** $m>-\sqrt{2}$. **C.** $m>\sqrt{2}$. **D.** $0<m\neq 1$.

Lời giải. Bài này ta giải theo cách 2.

Xét hàm số $y=x^4-m(m+1)x^2+m^3$, có

$$y'=4x^3-2m(m+1)x=2x\left[2x^2-m(m+1)\right];\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y=m^3 \\ x^2=\dfrac{m(m+1)}{2} \longrightarrow y=-\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}+m^3 \end{array}\right..$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị y_{CT}, y_{CD} và $y_{CT}<0<y_{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m(m+1)}{2}>0 \\ -\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}+m^3<0<m^3 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m\neq 1.$$ **Chọn D.**

Câu 32. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-2x^2+2017-m=0$ có đúng ba nghiệm.

A. $m=2015$. **B.** $m=2016$. **C.** $m=2017$. **D.** $m=2018$.

Lời giải. Ta có $x^4-2x^2+2017-m=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2=m-2017$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2$, có

$$y'=4x^3-4x \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y(0)=0 \\ x=\pm1 \longrightarrow y(\pm1)=-1 \end{array}\right..$$

Ycbt $\Leftrightarrow m-2017=y_{CD} \Leftrightarrow m-2017=0 \Leftrightarrow m=2017$. **Chọn D.**

Câu 33. Cho hàm số $y=-x^4+2(2+m)x^2-4-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho không có điểm chung với trục hoành?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Hàm số $y=-x^4+2(2+m)x^2-4-m$ có hệ số của x^4 âm.

Ta có $y' = -4x^3 + 4(2+m)x = -4x\left[x^2 - (2+m)\right] \longrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2+m \end{array}\right.$.

Dựa vào dáng điệu của hàm trùng phương, ta có các trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

● Hàm số có một cực trị và cực trị đó âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \le 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m \le 0 \\ -4-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \le -2.$

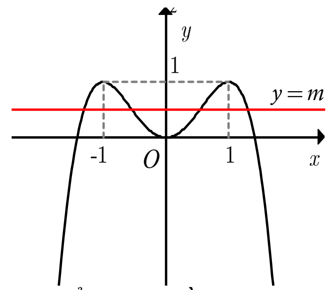
● Hàm số có hai cực trị và giá trị cực đại âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ y\left(\pm\sqrt{2+m}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m > 0 \\ m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m < 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-3; -2; -1\}$. **Chọn C.**

Câu 34. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $0 \le m \le 1$. **B.** $0 < m < 1$.
C. $m < 1$. **D.** $m > 0$.

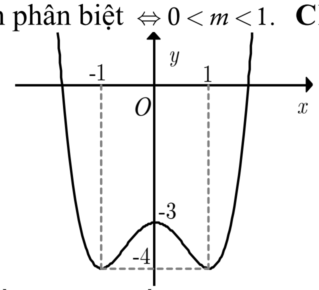


Lời giải. Phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ và đường thẳng $y = m$ (cùng phương với trục hoành).

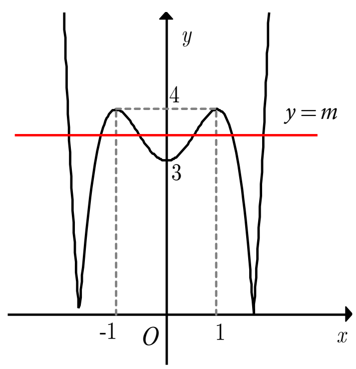
Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có sáu nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < 4$. **B.** $0 < m < 3$.
C. $3 < m < 4$. **D.** $-4 < m < -3$.



Lời giải. Trước tiên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình sau:



Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)| = m$ có sáu nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m < 4$. **Chọn C.**

Câu 36. Cho hàm số $y = x^4 - (2m+4)x^2 + m^2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m = 1$. **B.** $m = \frac{3}{4}$. **C.** $m = -\frac{3}{4}$, $m = 3$. **D.** $m = 3$.

Lời giải. Sử dụng công thức giải nhanh sau:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại bốn điểm lập thành một cấp số cộng thì điều kiện là $\begin{cases} ac>0 \\ ab<0 \\ b^2=\dfrac{100}{9}ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.m^2>0 \\ 1.\left[-(2m+4)\right]<0 \\ (2m+4)^2=\dfrac{100}{9}m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 & (1) \\ m>-2 & (2). \\ 9.(2m+4)^2=100m^2 & (3) \end{cases}$

Ta có $(3)\Leftrightarrow 64m^2-144m-144=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{3}{4} \\ m=3 \end{array}\right.$ (thoả mãn $(1)\,\&\,(2)$). **Chọn C.**

Câu 37. Tìm tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2018}{2x+1}$ với trục tung.

A. $M(0;0)$. **B.** $M(0;-2018)$. **C.** $M(2018;0)$. **D.** $M(2018;-2018)$.

Lời giải. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=\dfrac{x-2018}{2x+1} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow M(0;-2018)$. **Chọn B.**

Câu 38. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x}$ và đồ thị hàm số $y=x^2+x+1$ cắt nhau tại hai điểm. Kí hiệu $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ là tọa độ của hai điểm đó. Tìm y_1+y_2.

A. $y_1+y_2=4$. **B.** $y_1+y_2=6$. **C.** $y_1+y_2=0$. **D.** $y_1+y_2=2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x}=x^2+x+1 \quad (x\neq 0)$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x=2x+1\Leftrightarrow x^3+x^2-x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\longrightarrow y(1)=3 \\ x=-1\longrightarrow y(-1)=1 \end{array}\right.$.

Khi đó $y_1+y_2=y(1)+y(-1)=4$. **Chọn A.**

Câu 39. Đường thẳng $y=2x+2016$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1}=2x+2016 \quad (x\neq 1)$

$2x+1=(2x+2016)(x-1)\Leftrightarrow 2x^2+2012x-2017=0$.

Ta có $ac=2.(-2017)=-4034<0\rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt. **Chọn C.**

Câu 40. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $d: y=x+1$ và đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm x_I của đoạn thẳng MN.

A. $x_I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $x_I=2$. **C.** $x_I=1$. **D.** $x_I=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+4}{x-1}=x+1 \quad (x\neq 1)$

$\Leftrightarrow 2x+4=(x+1)(x-1)\Leftrightarrow x^2-2x-5=0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_1+x_2=2$. Suy ra $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$. **Chọn C.**

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=2mx+m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{2x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m>1$. **D.** $m<0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-2}{2x+1}=2mx+m+1\quad\left(x\neq-\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2x-2=(2mx+m+1)(2x+1)\Leftrightarrow 4mx^2+4mx+m+3=0.\qquad(*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=-12m>0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$. **Chọn D.**

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $0<m<1$. **B.** $m<-2,\ m>5$. **C.** $1<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $0<m<\dfrac{1}{3}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-3}{x+1}=x-2m\quad(x\neq-1)$

$\Leftrightarrow x-3=(x-2m)(x+1)\Leftrightarrow x^2-2mx-2m+3=0.\qquad(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+2m-3>0\\ S=2m>0\\ P=-2m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<\dfrac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 43. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

A. $m\neq 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m<0$. **D.** $0<m\neq 1$.

Lời giải. Đường thẳng d có dạng $y=m(x-1)=mx-m$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+2}{x-1}=mx-m\quad(x\neq 1)$

$\Leftrightarrow x+2=(mx-m)(x-1)\Leftrightarrow \underbrace{mx^2-(2m+1)x+m-2}_{g(x)}=0.\qquad(*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_1<1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ mg(1)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m[m-(2m+1)+m-2]<0\end{cases}\Leftrightarrow m>0$. **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{2}$.

A. $m=-2,\ m=1$. **B.** $m=-7,\ m=1$. **C.** $m=-7,\ m=5$. **D.** $m=-1,\ m=1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m\quad(x\neq-1)$

$\Leftrightarrow -2x+1=(-x+m)(x+1)\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+1-m=0.\qquad(*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=(m+1)^2-4(1-m)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-3+2\sqrt{3}\\ m<-3-2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m+1\\ x_1x_2=1-m\end{cases}$. Giả sử $A(x_1;-x_1+m)$ và $B(x_2;-x_2+m)$.

Yêu cầu bài toán $AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) = 4 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -7 \end{array}\right.$ (thỏa mãn). **Chọn B.**

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x}{x-1} = x - m + 2 \quad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow 2x = (x - m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0.$ $(*)$

Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 4(m-2) = m^2 - 2m + 9 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ giao điểm của d và (C).

Ta có $AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = 2(m+1)^2 - 8(m-2) = 2(m-1)^2 + 16 \geq 16.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$. **Chọn D.**

Công thức giải nhanh: AB ngắn nhất $\longrightarrow \Delta$ nhỏ nhất.

Mà $\Delta = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8 \geq 8$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Câu 46. Tìm giá trị thực của tham số k sao cho đường thẳng $d: y = x + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

A. $k = -1$. **B.** $k = -3$. **C.** $k = -4$. **D.** $k = -2$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x+1} = x + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x + 2k + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k = 0.$ $(*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = k^2 - 2k > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > 2 \\ k < 0 \end{array}\right.$.

Gọi $x_1 \neq x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Giả sử $A(x_1; x_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; x_2 + 2k + 1)$.

Yêu cầu bài toán: $d[A, Ox] = d[B, Ox] \Leftrightarrow |x_1 + 2k + 1| = |x_2 + 2k + 1|$

$\Leftrightarrow x_1 + 2k + 1 = -(x_1 + 2k + 1)$ (do $x_1 \neq x_2$)

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4k - 2 \Leftrightarrow -2k = -4k - 2 \Leftrightarrow k = -1$(thoả mãn).

Chọn A.

Câu 47. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, với O là gốc tọa độ.

A. $m = -2.$ **B.** $m = -\dfrac{1}{2}.$ **C.** $m = 0.$ **D.** $m = 1.$

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0.$ $(*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = (m-3)^2 - 4(1-m) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 5 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}.$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$.

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1-m) + m(3-m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$. **Chọn A.**

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m = -2$. **B.** $m = -\dfrac{1}{5}$. **C.** $m = -\dfrac{11}{5}$. **D.** $m = 0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1} = -3x + m \quad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = (-3x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - (1+m)x + m + 1 = 0. \qquad (*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 10m - 11 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 11 \end{array}\right.$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{1+m}{3}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{m+1}{3}$.

Giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$ và $B(x_2; -3x_2 + m)$. Suy ra $G\left(\dfrac{x_1 + x_2}{3}; \dfrac{-3(x_1 + x_2) + 2m}{3}\right)$.

Vì $G \in \Delta$ nên $\dfrac{x_1 + x_2}{3} - 2.\dfrac{-3(x_1 + x_2) + 2m}{3} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+m}{9} - 2.\dfrac{-(m+1) + 2m}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{11}{5}$(thoả mãn). **Chọn C.**

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $4S_{\Delta IAB} = 15$, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị.

A. $m = \pm 5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = -5$. **D.** $m = 0$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-4}{x-1} = 2x + m \quad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow 2x - 4 = (2x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m-4)x - m + 4 = 0. \qquad (*)$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 4 \end{array}\right.$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{4-m}{2}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{4-m}{2}$.

Giả sử $A(x_1; 2x_1 + m)$ và $B(x_2; 2x_2 + m)$.

Theo giả thiết: $4S_{IAB} = 15 \Leftrightarrow 2AB.d[I, AB] = 15 \Leftrightarrow 2AB.\dfrac{|m|}{\sqrt{5}} = 15 \Leftrightarrow 4AB^2 m^2 = 1125$

$\Leftrightarrow 20(x_1 - x_2)^2 m^2 = 1125 \Leftrightarrow 4\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2\right] m^2 = 225$

$\Leftrightarrow (m^2 - 16)m^2 = 225 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow m = \pm 5$(thoả mãn). **Chọn A.**

Câu 50. Tìm trên đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C) hai điểm $A,\ B$ mà chúng đối xứng nhau qua điểm $I(-1;3)$.

A. $A(-1;0)$ và $B(-1;6)$.
B. $A(0;2)$ và $B(-2;4)$.
C. $A(1;4)$ và $B(-3;2)$.
D. Không tồn tại.

Lời giải. Gọi $A\left(x_0;-x_0^3+3x_0+2\right)$ là điểm thuộc (C).

Do B đối xứng với A qua I nên suy ra $B\left(-2-x_0;4+x_0^3-3x_0\right)$.

Lại có B cũng thuộc (C) nên $4+x_0^3-3x_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Suy ra $A(0;2)$ và $B(-2;4)$ hoặc ngược lại. **Chọn B.**

Cách trắc nghiệm. Nhận thấy ba đáp án A, B, C đều có trung điểm là $I(-1;3)$.

Bây giờ ta thử đến $A\in(C)$ và $B\in(C)$.

Thử đáp án A, ta thấy $A\in(C)$ nhưng $B\notin(C)$. Vậy loại A.

Thử đáp án B, ta thấy $A\in(C)$ và $B\in(C)$. Vậy chọn B.

Câu 51. Tìm trên đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$ hai điểm phân biệt $A,\ B$ mà chúng đối xứng nhau qua trục tung.

A. $A\left(3;-\dfrac{16}{3}\right)$ và $B\left(-3;-\dfrac{16}{3}\right)$.
B. $A\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$ và $B\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.
C. $A\left(\dfrac{16}{3};3\right)$ và $B\left(-\dfrac{16}{3};3\right)$.
D. Không tồn tại.

Lời giải. Hai điểm $M(x_1;y)_1$, $N(x_2;y_2)$ thuộc đồ thị và đối xứng nhau qua trục tung nên

$$\begin{cases}x_2=-x_1\neq 0\\ y_1=y_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=-x_1\neq 0\\ -\dfrac{x_1^3}{3}+x_1^2+3x_1-\dfrac{11}{3}=-\dfrac{x_2^3}{3}+x_2^2+3x_2-\dfrac{11}{3}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=3\\x_2=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1=-3\\x_2=3\end{cases}$. Vậy $A\left(3;\dfrac{16}{3}\right)$ và $B\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$ hoặc ngược lại. **Chọn B.**

Câu 52. Cho hàm số $y=x^4+mx^2-m-1$ với m là tham số thực, có đồ thị là (C). Tìm tọa độ các điểm cố định thuộc đồ thị (C).

A. $(-1;0)$ và $(1;0)$.
B. $(1;0)$ và $(0;1)$.
C. $(-2;1)$ và $(-2;3)$.
D. $(2;1)$ và $(0;1)$.

Lời giải. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$.

Ta có $y_0=x_0^4+mx_0^2-m-1 \Leftrightarrow \left(x_0^2-1\right)m+x_0^4-y_0-1=0$.   (1)

Để M là điểm cố định của (C) khi và chỉ khi (1) luôn đúng với mọi $m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0^2-1=0\\x_0^4-y_0-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 1\\y=0\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) mà tọa độ là số nguyên?

A. 2. **B**. 4. **C**. 5. **D**. 6.

Lời giải. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\longrightarrow y_0=\dfrac{2x_0-2}{x_0+1}=2-\dfrac{4}{x_0+1}$.

Để $y_0\in\mathbb{Z}$ thì x_0+1 là ước của 4 hay $x_0+1=\{\pm1;\pm2;\pm4\}$.

Suy ra $x_0\in\{-5;-3;-2;0;1;3\}$. Vậy có 6 điểm thỏa mãn bài toán. **Chọn D.**

Câu 54. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến trục Oy bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Ox?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)$, với $a\neq 1$ là điểm thuộc đồ thị.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |a|=2.\left|\dfrac{a+2}{a-1}\right|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2.\dfrac{a+2}{a-1} \\ a=-2.\dfrac{a+2}{a-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-3a-4=0 \\ a^2+a+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a^2-3a-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right) \\ M(4;2) \end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 55. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành.

A. $M(2;1)$, $M(4;3)$. **B.** $M(0;-1)$, $M(4;3)$.

C. $M(0;-1)$, $M(3;2)$. **D.** $M(2;1)$, $M(3;2)$.

Lời giải. Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)$ (với $a\neq 1$) là điểm thuộc đồ thị.

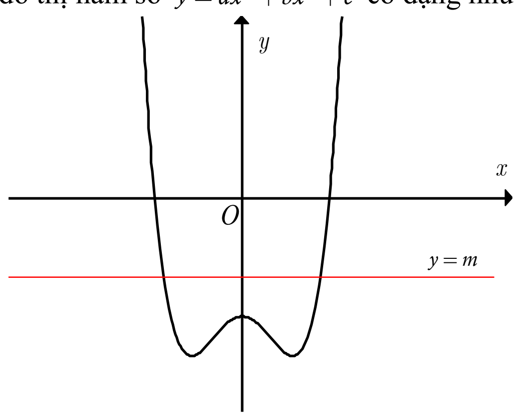
Phương trình đường TCĐ của đồ thị là $d: x-1=0$.

Ycbt: $d[M,d]=d[M,Ox] \Leftrightarrow |a-1|=\left|\dfrac{2a+1}{a-1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=4a \\ a^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;-1) \\ M(4;3) \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Biện luận số nghiệm của phương trình $ax^4+bx^2+c=m$ $(a>0,\ b<0)$. (1)

Cách 1. Phương trình $ax^4+bx^2+c=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ và đường thẳng $y=m$ (có phương song song với trục hoành)

Do hệ số $a>0,\ b<0$ nên đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có dạng như sau:

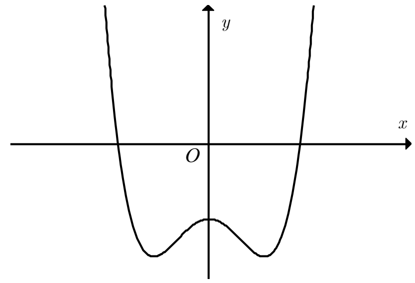


Dựa vào đồ thị ta có:

- (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m<y_{\text{CT}}$.
- (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=y_{\text{CT}} \\ m>y_{\text{CĐ}} \end{array}\right.$.
- (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow m=y_{\text{CĐ}}$.
- (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CT}}<m<y_{\text{CĐ}}$.

Cách 2. Phương trình $ax^4+bx^2+c=m \longleftrightarrow ax^4+bx^2+c-m=0$. (2)

Do hệ số $a>0,\ b<0$ nên đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c-m$ có dạng như sau:



Ta có các trường hợp sau:

- (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} > 0$.
- (2) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_{CT} = 0 \\ y_{CD} < 0 \end{array}\right.$.
- (2) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CD} = 0$.
- (2) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{CT} < 0 < y_{CD}$.

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x-4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2-1)(x^2-9)$ tại bốn điểm phân biệt?

A. 1 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 7

Đáp án B

Phương trình hoành độ giao điểm

$$(x^2-1)(x^2-9) = m(x-4) \Rightarrow \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-4)} = m \quad (1),(x \neq 4)$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-4)}$ và $y = m$

Ta có

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9)(x-4) + 2x(x^2-1)(x-4) - (x^2-9)(x^2-1)}{(x-4)^2} = \frac{3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9 = 0$$

Giải phương trình bằng MTBT ta được 4 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 \approx -2,169 \\ x_2 \approx 0,114 \\ x_3 \approx 2,45 \\ x_4 \approx 4,94 \end{array}\right.$. Các nghiệm này đã được lưu chính xác ở trong bộ nhớ của MTBT.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		4		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2,58$	↘	$-2,28$	↗	$9,67$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$383,5$	↗	$+\infty$

Từ BBT và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Bài 7. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI

1. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$ nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu $y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hoặc $f'(x_0)$

Lưu ý: Nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$ thì liên tục trên khoảng đó nhưng ngược lại thì chưa chắc đúng.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

Chú ý: $u = u(x), v = v(x)$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'.v + u.v'$ *và* $(ku)' = ku'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$ *và* $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{k.v'}{v^2}; (v \neq 0)$

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM THƯỜNG GẶP

Hàm số cơ bản	*Hàm số hợp*
$(C)' = 0$ *(C là hằng số)*	
$(x)' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ với $x \neq 0$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ với $u \neq 0$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ với x>0	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ với u>0
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ với $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ với $x \neq k\pi$	$(\cot u)' = -\dfrac{u}{\sin^2 u}$ với $u \neq k\pi$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ với $x > 0$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ với $u > 0$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ với $x > 0$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ với $u > 0$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$

3. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f\left(x\right) \le f\left(x_0\right), \forall x \in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f\left(x_0\right)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f\left(x\right) \ge f\left(x_0\right), \forall x \in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f\left(x_0\right)$.

4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:
Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.
Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:
1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ đã cho.
2. Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ trên đoạn $\left[a;b\right]$, tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định.
3. Tính: $f\left(a\right); f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(b)$.
4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right); \mathrm{m} = \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)$

Chú ý:

1. Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.

2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \ge 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \min f\left(x\right) = f\left(a\right) \\ \max f\left(x\right) = f\left(b\right) \end{cases}$

4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \le 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \min f\left(x\right) = f\left(b\right) \\ \max f\left(x\right) = f\left(a\right) \end{cases}$

Ngoài ra cần trang bị thêm một số kiến thức về bất đẳng thức cơ bản để giải quyết các bài này nhanh hơn:

5. Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số:

Hai số: Với $A, B \ge 0$ ta luôn có $A + B \ge 2\sqrt{AB}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B$

Ba số: Với $A, B, C \ge 0$ ta luôn có $A + B + C \ge 3\sqrt[3]{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1.

Câu 1: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

Lời giải:

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng ; $x \ge 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2\left(x-2.000.000\right)}{100.000} = \frac{x-2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x-2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F\left(x\right) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$, ĐK: $x \ge 2.000.000$

$$F'\left(x\right) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	$F_{\max}$	$\searrow$	

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A.

Nhận xét: Sau khi tìm được hàm $F\left(x\right) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 2: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ B. 43.000đ C. 42.000đ D. 41.000đ

Lời giải:

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$\left(50000-x\right).\frac{50}{5000}=\frac{1}{100}\left(50000-x\right).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40+\frac{1}{100}\left(50000-x\right)=-\frac{1}{100}x+540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).\left(x-30.000\right)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{50}x+840$$

$$F'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x+840=0 \Leftrightarrow x=42.000$$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$F\left(30.000\right)=0$

$F\left(42.000\right)=1.440.000$

$F\left(50.000\right)=800.000$

Vậy với $x=42.000$ thì $F\left(x\right)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng. Chọn C.

Câu 3. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là

$\left(30-\dfrac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

Lời giải:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được :

$$F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x=90.000x-1500x^2+\frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x)=90000-3000x+\frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 90000-3000x+\frac{75}{4}x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=120(loai)\\x=40(\text{t/ m})\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	$F_{\max}$	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

Câu 4. Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R=2(m),h=4(m)$ B. $R=4(m),h=2(m)$

C. $R=3(m),h=4(m)$ D. $R=4(m),h=4(m)$

Lời giải:

Do thùng phi có dạng hình trụ nên: $V_{tru}=\pi R^2h=16\pi\Leftrightarrow h=\dfrac{16}{R^2},(1)$

Diện tích toàn phần của thùng phi là: $S_{Tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R(h+R),(2)$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp}=2\pi R\left(\frac{16}{R^2}+R\right)=2\pi\left(\frac{16}{R}+R^2\right)$$

$$S'_{Tp}=2\pi\left(-\frac{16}{R^2}+2R\right)=\frac{4\pi}{R^2}\left(R^3-8\right),\ S'_{Tp}=0\Leftrightarrow\frac{4\pi}{R^2}\left(R^3-8\right)=0\Leftrightarrow R=2$$

Bảng biến thiên

R	0		2		$+\infty$
S'(R)		−	0	+	
S(R)	↘		$S_{\min}$	↗	

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì R= 2(m) và chiều cao là h = 4 (m).

Chọn A.

Câu 5. Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\dfrac{230}{3}kg$ B. $70kg$ C. $72kg$ D. $69kg$

Giải:

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: 100.1= 100(kg).

Gọi x (0<x<100) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống thu hoạch được: $2000:100=20\left(kg\right)$

Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2\left(kg/m^2\right)$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới $\left(F(x):kg\right)$

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F\left(x\right)=\left(100-x\right)\left(20+\frac{3}{8}x\right)=2000+\frac{35}{2}x-\frac{3}{8}x^2$$

Bìa toán trở thành tìm x để F(x) lớn nhất.

Ta có:

$$F'\left(x\right)=\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x,\qquad F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow x=\frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

X	0		$\frac{70}{3}$		100
F'(x)		+	0	−	
F(x)	↗		$F_{\max}$	↘	

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$100-\dfrac{70}{3}=\dfrac{230}{3}\approx 76,67\left(kg\right)$ Chọn A.

Nhận xét:

Làm sao ta có thể tìm được hàm F(x) và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20 = 2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100 - x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100 - x)(20 + mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm 0,2 (kg/m^2) thì $100m^2$ giảm $x = 20kg$, sản lượng thu được là $2200kg$.

Ta có: $(100 - 20)(20 + m20) = 2200 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó $x(mg)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

Giải:

Ta có: $G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$

$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$, $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(\text{loai}) \\ x = 20(\text{t/ m}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

X	0		20		$+\infty$
G'(x)		+	0	−	
G(x)	↗		100		↘

Dựa vào bảng biến thiên thì bênh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$. Chọn D.

Câu 7. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t): 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Giải:

Ta có: $G'(t) = 90t - 3t^2$, $G''(t) = 90 - 6t$, $G''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên:

T	0		15		$+\infty$
G''(t)		+	0	−	
G(t)	↗		675		↘

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15. Chọn D.

Câu 8: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$ B. $t = 14(h)$ C. $t = 15(h)$ D. $t = 22(h)$

Giải:

Ta có:

$$h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, \left(k \in Z_{(+)}\right)$$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được *h* đạt GTLN khi *t* =10 (*h*)

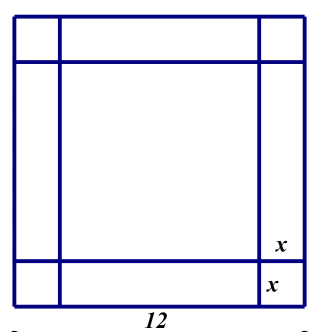
Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

Vì $-1 \le cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Rightarrow 9 \le 3cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \le 15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, \left(k \in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt GTLN khi *t* =10 (*h*)

Câu 9: (Đề minh họa Quốc gia 2017): Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6(cm)$ B. $x = 3(cm)$

C. $x = 2(cm)$ D. $x = 4(cm)$

Giải:

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gập thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12 - 2x$

Ta có: $V = S.h = (12 - 2x)^2.x = 4x^3 - 48x + 144x$ với $0 < x \le 6$

Bài toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$$V' = 12x^2 - 96x + 144, \quad V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		2		6
V'(x)		+	0	−	
V(x)		↗	128	↘	

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì x =2 cm. Chọn C.

Câu 10: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ B. Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ D. Dài $24cm$, rộng $19cm$

Giải:

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x>0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\dfrac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là : $\dfrac{384}{x}+4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\dfrac{384}{x}+4\right)=408+4x+\dfrac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x)=4-\dfrac{2304}{x^2}$

$S'=0 \Leftrightarrow 4-\dfrac{2304}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=24(\text{t/ m}) \\ \text{x}=-24(\text{loai}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Câu 11: Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $36cm^2$ B. $20cm^2$ C. $16cm^2$ D. $30cm^2$

Giải:

Gọi độ dài hình chữ nhật đó là: $x(cm)$. Chiều rộng của hình chữ nhật đó là: $(8-x)cm$. Suy ra $4\le x\le 8$

Diện tích hình chữ nhật đó là: $S=x(8-x)=8x-x^2$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt GTLN.

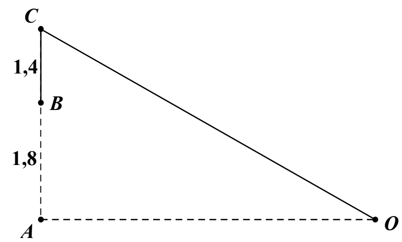
Ta có: $S'=8-2x; S'=0 \Leftrightarrow 8-2x=0 \Leftrightarrow x=4$

Vì hàm S(x) liên tục trên $4 \le x \le 8$, ta có: $S(4)=16; S(8)=0$

Kết luận: hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $16cm^2$

Lưu ý: Bìa này ta còn có thể sử dụng lí thuyết của lớp 10. Tìm GTLN của parapol với hệ số a<0 thì $S_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}=S\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=16$. Chọn C.

Câu 12: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ B. $AO=2m$

C. $AO=2,6m$ D. $AO=3m$

Giải:

Đặt độ dài cạnh $AO=x(cm),(x>0)$

Suy ra: $BO=\sqrt{3,24+x^2}, CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{\text{BOC}}=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2.OB.OC}=\frac{(3,24+x^2)+(10,24+x^2)-1,96}{2\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$$

$$=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F(x)=\dfrac{5,76+x^2}{\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$ đạt GTNN.

Đặt $(3,24+x^2)=t,(t>3,24)$. Suy ra $F(t)=\dfrac{t+\frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50\left(t^2+7t\right)-\left(25t+63\right)\left(2t+7\right)}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)$$

$F'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=9$

BBT

t	3,24		9		$+\infty$
F'(t)		−	0	+	
F(t)		↘	$F_{\min}$	↗	

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m. Chọn A.

Câu 13: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h=\frac{20}{3}\left(m\right)$ B. $h=\frac{22}{3}\left(m\right)$ C. $h=\frac{23}{3}\left(m\right)$ D. $h=\frac{25}{3}\left(m\right)$

Giải:

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và h, (x>0, h>0, m)

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở O, vậy O là tâm mặt câu. Ta có: $OS=5m$, nên $OI=h-5$, với I là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác OIC vuông nên ta có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-\left(h-5\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},\left(5<h<10\right)$$

Ta có thể tích khối chóp tứ giác đều: $V\left(h\right)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right)$

Bài toán trở thành tìm h để V(h) đạt GTNN.

$V'\left(h\right)=\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)$, $V'\left(h\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)=0\Leftrightarrow h=\frac{20}{3}$

BBT

h	5		$\frac{20}{3}$		10
$V'\left(h\right)$		+	0	−	
$V\left(h\right)$		↗	$V_{\max}$	↘	

Vậy chọn chiều cao đó là $h=\frac{20}{3}\left(m\right)$. Chọn A.

Câu 14: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

Giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n) = (480 - 20n).n = 480n - 20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

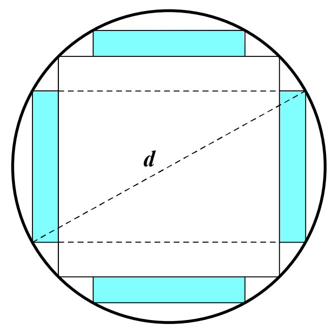
Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho F(x) đạt GTLN.

$F'(n) = 480 - 40n$, $F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất. Chọn C.

Câu 15: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.



A. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\dfrac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

Giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ và

$0 < x < \dfrac{d\left(2 - \sqrt{2}\right)}{4}, 0 < y < \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề bài ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$\left(2x + \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}x}$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$S(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}$ với $0<x<\dfrac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

Ta có:

$$S'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0\Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

X	0		$\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$		$\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}d$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		$\nearrow$	S_{max}	$\searrow$	

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d, y=\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$. Chọn A.

Câu 16: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, $\left(x>0,y>0,h>0,m\right)$. Ta có: $\dfrac{y}{x}=2\Leftrightarrow y=2x$

Thể tích hồ chứa nước $V=xyh\Leftrightarrow h=\dfrac{V}{xy}=\dfrac{576}{x(2x)}=\dfrac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x)=2xy+2xh+2yh=2x(2x)+2x\frac{288}{x^2}+2(2x)\frac{288}{x^2}=4x^2+\frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$$S\left(x\right)=4x^2+\frac{1728}{x},\ S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 8x-\frac{1728}{x^2}=0\Leftrightarrow x=6$$

BBT

X	0		6		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây: $432m^2$

Chi phí ít nhất là: $432x500.000=216.000.000$. Chọn A.

Câu 17: Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng ở bên trong có dạng hình hộp chữ nhật và không có nắp, có đáy là hình vuông. Thùng gỗ có thể chứ được $62,5m^3$. Hỏi các cạnh của hình hộp chữ nhật có độ dài là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là nhỏ nhất?

A. Cạnh bên: $2,5m$, cạnh đáy: $5m$.

B. Cạnh bên: 4m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{10}}{4}m$

C. Cạnh bên: 3m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{10}}{6}m$

D. Cạnh bên: 5m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$.

Giải.

Gọi x, h lần lượt là độ dài cạnh đáy hình vuông, chiều cao của thùng gỗ, $\left(x>0,h>0,\left(m\right)\right)$.

Thể tích thùng gỗ: $V=x^2h\Leftrightarrow h=\frac{V}{x^2}=\frac{62,5}{x^2}$

Diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là:

$$S\left(x\right)=x^2+4xh=x^2+4x.\frac{62,5}{x^2}=x^2+\frac{250}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'\left(x\right)=2x-\frac{250}{x^2},\ \ S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{250}{x^2}=0\Leftrightarrow x=5$$

BBT

X	0		5		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy để tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là nhỏ nhất thì cạnh đáy là 5m, chiều cao 2,5m. Chọn A.

Câu 18: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ B. $5R^2$ C. R^2 D. $3R^2$

Giải.

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $\left(0 < x < R\right)$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S\left(x\right) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

$$S'\left(x\right) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} (\text{t/ m}) \\ x = \dfrac{-R\sqrt{2}}{2} (\text{loai}) \end{array}\right.$$

BBT:

X	0		$\frac{R\sqrt{2}}{2}$		R
S'(x)		+	0	−	
S(x)			R^2		

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2

Câu 19: (Đề thi thử Việt Trì lần I): Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng B. 382.000 đồng C. 83.200 đồng D. 8.320.000 đồng.

Giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, \left(x > 0, m\right)$

Chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm chi phí để làm để cá. Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F\left(x\right) = 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x.70.000 + 2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000 = 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt GTNN.

$F'(x) = 84.000 - \dfrac{13440}{x^2}$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \dfrac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$

BBT

X	0		0,4		$+\infty$
F’(x)		−	0	+	
F(x)		$\searrow$	$F_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

Câu 20: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông không có có nắp có thể tích chứa được $4dm^3$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau:

A. Cạnh đáy: 2dm, cao: 1dm.
B. Cạnh đáy: 2dm, cao: 2dm.
C. Cạnh đáy: 1dm, cao: 2dm.
D. Cạnh đáy: 2dm, cao: 3dm.

Giải

Gọi: Độ dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, dm)$

Chiều cao của hộp là $h, (h > 0, dm)$. S(x) là diện tích của hộp cần mạ (dm^2)

Ta có khối lượng cần mạ là: $(P_{vang}.d).S(x) = C.S(x)$

Với C là hằng số, P_{vang} là khối lượng riêng của vàng.

Khối lượng vàng cần mạ tỉ lệ thuận với $S(x)$. Thể tích hộp $V = x^2h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{4}{x^2}$

$S(x) = 4xh + x^2 = \dfrac{16}{x} + x^2$. Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$S'(x) = \dfrac{-16}{x^2} + 2x$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-16}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

BBT

X	0		2		$+\infty$
S’(x)		−	0	+	
S(x)		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì chũng ta phải sản xuất hoppj có kích thước cạnh đáy: $x = 2dm,\ \ cao: h = 1dm$. Chọn A.

Câu 21: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

A. 512 con B. 511 con C. 510 con D. 509 con

Giải:

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000(con)$

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:
$1500 : 1000 = 1,5(kg)$.

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: $x(con), (x > 0)$

Theo đề bài, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5kg / con$

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x\ kg / con$.

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:
$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$.

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt GTLN.

Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61,\ F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

BBT

X	0		488		1000
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ này là: $1000 - 488 = 512con$.

Chọn A.

Câu 22: Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

A. $V = \frac{2}{27} dm^3$ B. $V = \frac{3}{27} dm^3$ C. $V = \frac{4}{27} dm^3$ D. $V = \frac{5}{27} dm^3$

Giải

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông x dm.

Khi đó chiều cao của hình hộp là $x(dm), \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

Và cạnh đáy của hộp là $(1 - 2x)dm$. Vậy thể tích của hộp là: $V = x(1 - 2x)^2\ dm^3$

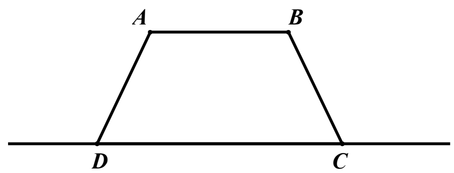
Ta có: $V' = 1 - 8x + 12x^2$, $V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

BBT

X	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'		+	0	−	
V		↗	$\frac{2}{27}$	↘	

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{2}{27}dm^3$. chọn A.

Câu 23: Một người nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a\left(m\right)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân ABCD như hình vẽ (Bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $\sqrt{3}a^2$ B. $\frac{5\sqrt{3}a^2}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Giải:

$AB = a, AA' = h, CD = x.$ Ta có:

$$h^2 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 3a^2 + 2ax - x^2 = 4h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 2ax - x^2} = 2h$$

$$S = \frac{a+x}{2}.h = \frac{a+x}{4}.\sqrt{3a^2+2ax-x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(3a-x\right)\left(x+a\right)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{27}}{4}\sqrt{\left(3a-x\right).\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}}$$

$$\le \frac{\sqrt{27}}{4}\left(\frac{\left(3a-x\right)+\frac{x+a}{3}+\frac{x+a}{3}+\frac{x+a}{3}}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{27}a^2}{4}.$$ Chọn D.

Câu 24: Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km B. 6,5km C. 5km D. 4km.

Giải:

Ta đặt: $B'C = x\left(km\right), \left(0 \le x \le 9\right)$

Ta có: $BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36+x^2}, AC = 9 - x$

Gọi F(x) là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

Ta có: $F\left(x\right) = 130.000.\sqrt{36+x^2} + 50.000\left(9-x\right)\left(USD\right)$

Bài toán trở thành tìm x sao cho F(x) đạt GTNN.

$F'(x)=\dfrac{130.000}{\sqrt{36+x^2}}x-50.000.$

$F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{130.000}{\sqrt{36+x^2}}x-50.000=0\Leftrightarrow 13x=5\sqrt{36+x^2}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}=2,5$

Vì F(x) là hàm liên tục trên đoạn $[0;9]$ nên ta có:

$F(0)=1.230.000, F(9)=1.406.000, F\left(\dfrac{5}{2}\right)=1.170.000$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng 9km-2,5km=6,5km. Chọn B.

Câu 25: Một gia đình cần xây một cái bể nước hình trụ có thể chứa được $150m^3$ có đáy được làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn, bề mặt làm bằng kính. Tính chi phí thấp nhất cần dùng để xây bể nước đó. biết giá thành vật liệu làm bằng bê tông có giá thành là 100.000 đồng/m^2, làm bằng tôn là 90.000 đồng/m^2, bề mặt làm làm bằng kính là 120.000 đồng/m^2. (số tiền để xây được tính lấy giá trị lớn hơn gần nhất với số tiền tính toán trên lí thuyết).

A. 15.041.000đ B. 15.040.000đ C. 15.039.000đ D. 15.038.000đ

Giải

Gọi $r(m), h(m)$ lần lượt là bán kính của đáy bể và chiều cao của bể.

Ta có: $V=\pi r^2h\Leftrightarrow h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{150}{\pi r^2}$

Gọi F(r) là hàm chi phí xây dựng bể nước

Ta có:

$F(r)=100.000\pi r^2+90.000.2\pi rh+120.000\pi r^2=220.000\pi r^2+\dfrac{27.000.000}{r}$

Bài toán trở thành tìm r để $F(r)$ đạt GTNN.

$F'(r)=440.000\pi r-\dfrac{27.000.000}{r^2}$

$F'(r)=0\Leftrightarrow 440.000\pi r-\dfrac{27.000.000}{r^2}=0\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$

BBT

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$		$+\infty$
F’		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	$F_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy chi phí thấp nhất là $F\left(\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}\right)\approx 15.038.287,97$ đồng. Chọn C.

Câu 26: Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

A. 0,8m B. 0,9m C. 1m D. 1,1m

Giải:

Giả sử tấm dỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền.

Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, \left(0 < x < 0,6\right)$

Khi đó, cạnh huyền $BC = 1,2 - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $AC = \sqrt{\left(1,2-x\right)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$

Ta có diện tích tam giác ABC: $S\left(x\right) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1,44-2,4x}$

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ đạt GTLN.

$$S'\left(x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1,44-2,4x} - \frac{1}{2}\frac{1,2x}{\sqrt{1,44-2,4x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1,44-3,6x}{\sqrt{1,44-2,4x}}\right)$$

$$S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0		0,4		0,6
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	S_{max}	↘	

Vậy cạnh BC=0,8m

Câu 27: Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứ được 3200cm^3, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

A. 170cm^2 B. 160cm^2 C. 150cm^2 D. 140cm^2

Giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga, $\left(x > 0, y > 0, h > 0, cm\right)$

Ta có: $\dfrac{h}{x} = 2 \Leftrightarrow h = 2x$

Thể tích hố ga: $V = xyh \Leftrightarrow y = \dfrac{V}{xh} = \dfrac{1600}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hố ga là:

$$S\left(x\right) = xy + 2xh + 2yh = x.\frac{1600}{x^2} + 2x2x + x\frac{1600}{x^2}2x = \frac{1600}{x} + 4x^2 + \frac{6400}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}, \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

BBT

X	0		10		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy chiều rộng của hố ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hố ga nhỏ nhất là: $S = 10.16 = 160cm^2$. Chọn B

Câu 28: Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100.000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200.000 đồng cộng thêm 90.000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng.

A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 ti vi
B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 125 ti vi
C. Đặt hàng 10 lần, mỗi lần 250 ti vi
D. Đặt hàng 50 lần, mỗi lần 50 ti vi

Giải:

Gọi x là số lượng ti vi mà trung tâm đặt mỗi lần $(x > 0)$ (đơn vị: cái)

Số lần đặt hàng mỗi năm của trung tâm: $\dfrac{2500}{x}$

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng: $\dfrac{2500}{x}.(200.000 + 90.000x)$

Số lượng tivi trung bình gửi kho là $\dfrac{x}{2}$, chi phí lưu trong kho tương ứng: $50.000x$

Gọi F(x) là hàm chi phí mà trung tâm đó phải trả.

Ta có:

$$F(x) = \frac{2500}{x}(200.000 + 90.000x) + 50.000x = \frac{500.000.000}{x} + 225.000.000 + 50.000x$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) nhỏ nhất

$$F'(x) = -\frac{500.000.000}{x} + 50.000, \quad F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{500.000.000}{x} + 50.000 = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

BBT

x	0		100		2500
F'(x)		−	0	+	
F(x)		↘	$F_{\min}$	↗	

Vậy trung tâm phải đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi. Chọn A.

Câu 29: Mùa này công ty sách định ra 2 cuốn trắc nghiệm Lý và Toán với giá sản xuất là 200.000 đồng và 300.000 đồng. Khi đó hàm lợi ích chúng ta là $u(x;y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$, với x, y là số lượng hai cuốn sách được in ra. Nhưng ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000

đồng. Theo bạn phải sản xuất số lượng như thế nào để đạt doanh thu cho công ty sách cao nhất?

A. $\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. B. $\left(\frac{2000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. C. $\left(\frac{3001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. D. $\left(\frac{2001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu.

Giải:

Ta có hàm lợi ích là: $u(x;y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$. Để cho gọn ta đặt $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt{y}$

Vì ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 triệu đồng nên , suy ra:

$200.000a^3+300.000b^2=300.000.000 \Leftrightarrow 2a^3+3b^2=3000(*)$

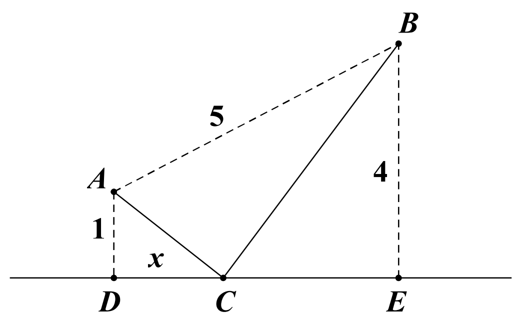
Lúc này ta có: $u(x;y)=v(a;b)$ ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thể tíchức này.

Ta có $(*)\Leftrightarrow a^3+a^3+b^2+b^2+b^2=3000\geq 5\sqrt[5]{a^6b^6} \Rightarrow ab\leq\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$. Chon A

Câu 30: Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.

A. $\sqrt{41}$ B. $\sqrt{37}$

C. $\sqrt{29}$ D. $3\sqrt{5}$



Giải

Đặt $CD=x, x>0$. Ta tính được $DE=\sqrt{5^2-(4-1)^2}=4$

Ta có $AC+BC=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(4-x)^2+16}=f(x)$

Khi đó: $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$

Giải phương trình $f'(x)=0$, ta thu được $x=\frac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x)=\sqrt{14}$,

chọn A.

Câu 31: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của hình hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8 B. 12. C. $8\sqrt{2}$ D. $24\sqrt{3}$.

Giải:

Đặt a,b,c là kích thước hình hộp thì ta có hệ:

$$\begin{cases}2(ab+bc+ca)=36\\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab+bc+ca=18\\ a^2+b^2+c^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab+bc+ca=18\\ a+b+c=6\sqrt{2}\end{cases}$$

Cần tìm GTLN của $V=abc$

Đặt $a = x\sqrt{2}, b = y\sqrt{2}, c = z\sqrt{2}$ thì có hệ mới $\begin{cases} xy + yz + zx = 9 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

Đến đây chặn được miên của từng biến vì:

$\begin{cases} y + z = 6 - x \\ yz = 9 - x(y+z) = 9 - x(6-x) \end{cases}$ *và* $(y+z)^2 \ge 4yz$

Nên $(6-x)^2 \ge 4\left[9 - x(6-x)\right] \Leftrightarrow x(4-x) \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 4$

Tương tự $0 < y, z \le 4$

Ta có: $V = 2\sqrt{2}xyz = 2\sqrt{2}x\left[9 - x(6-x)\right]$, đến đây khảo sát hàm số này tìm max.

GTLN là $V = 8\sqrt{2}$. chọn C.

Câu 32: Một ca sĩ có buổi diễn âm nhạc có giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì quản lí kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vẽ phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu?

A. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 800 000 đô la.
B. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 6400 000 đô la.
C. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 11 000 đô la.
D. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 110 000 đô la.

Giải.

Gọi x là số lần giảm bớt đi 20 đô la trong giá vé. Khi đó giá vé sẽ là $600 - 20x$ một người.

Số người mua vé sẽ là: $1000 + 100x$

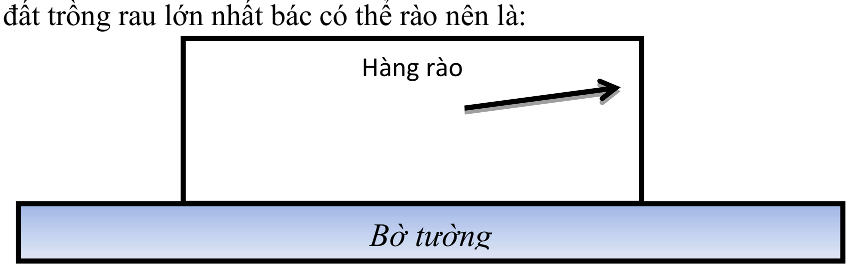
Khi đó số tiền thu được là:

$f(x) = (600 - 20x)(1000 + 100x) = -2000x^2 + 40\ 000x + 600\ 000$

Hàm số bậc 2 có hệ số $a = -2000 < 0$. Ta sẽ áp dụng kết quả đã được đưa ra đó là hàm số sẽ đạt GTLN tại $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-40000}{2.(-2000)} = 10$. Khi đó: $f(10) = 800\ 000$. Chọn A.

Câu 33. Bác nông dân muốn làm hàng rà trồng ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó.

Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



A. 1500m^2. B. 10 000m^2. C. 2500m^2. D. 5000m^2.

Giải:

Đề bài cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là $200m$. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r, đến đây ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có: $x+2r=200 \Leftrightarrow r=100-\frac{x}{2}$. Từ đây ta có $r>0 \Rightarrow x<200$.

Diện tích đất rào được tính bởi: $f(x)=x\left(100-\frac{x}{2}\right)=-\frac{x^2}{2}+100x$

Xét hàm số $f(x)=-\frac{x^2}{2}+100x$ trên khoảng $(0;200)$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x+100=0 \Leftrightarrow x=100$

Từ đó ta có $f(100)=5000$ là GTLN của diện tích đất rào được. chọn D.

Câu 34: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ B. $1000\pi\ cm^3$

C. $2500\pi\ cm^3$ D. $5000\pi\ cm^3$

Giải:

Gọi $x(cm);y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x,y>0;x<30)$

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $(2x+y).4=120 \Leftrightarrow y=30-2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V=\pi x^2.y=\pi x^2(30-2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x)=x^2(30-2x)$ với $0<x<30$ đạt GTLN

$f'(x)=-6x^2+60x$, cho $f'(x)=-6x^2+60x=0 \Leftrightarrow x=10$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là: $V=1000\pi\left(cm^3\right)$. Chọn B

Câu 35: Thể tích nước của một bề bơi sau t phút bơm tính theo công thức

$$V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)\ (0\le t\le 90)$$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90. B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75. D. Cả A, B, C đều sai.

Giải:

Xét hàm $V'=\frac{9}{10}t^2-\frac{1}{100}t^3\ \ (0\le t\le 90)$

$V''=\frac{9}{5}t-\frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V''=0$ khi $t=0, t=60$

Dựa vào bảng biến thiên, Ta có hàm số V' đồng biến trên (0;60), nghịch biến trên (60;90). Chọn A.

Câu 36: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỉ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,7 B. 0,6 C. 0,8. D. 0,5.

Giải.

Ta có $S_{tp}=S_{xq}+2S_d=2\pi rl+2\pi r^2 \quad (1)$

$V=\pi r^2 l=2 \Rightarrow l=\frac{2}{\pi r^2}$ thay vào (1) ta được:

$S_{tp}=\frac{4}{r}+2\pi r^2=f(r),\ f'(r)=-\frac{4}{r^2}+4\pi r$

$f'(r)=0$ khi r gần bằng 0,68. Chọn A.

Câu 37: Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h, có thể tích là $1m^3$. Với a,h như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

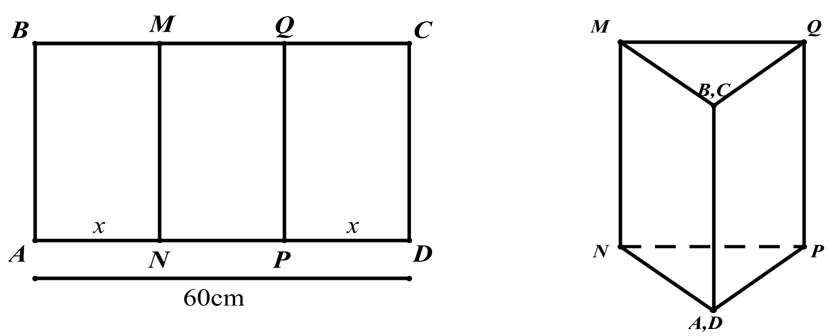
A. $a=1;h=1$. B. $a=\frac{1}{3};h=\frac{1}{3}$ C. $a=\frac{1}{2};h=\frac{1}{2}$ D. $a=2;h=2$.

Giải.

$V=a^2h=1 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{h}},\ S=4ah+2a^2=\frac{4}{a}+2a^2=f(a),\ f'(a)=-\frac{4}{a^2}+4a$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1$. Chọn A.

Câu 38: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD=60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



A. $x=20$ B. $x=30$ C. $x=45$ D. $x=40$

Giải:

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác NAP = S_{NAP}

Ta có: $m_a = \sqrt{\dfrac{4x^2 - (60-2x)^2}{4}} = \sqrt{-900+60x}$

$V = h.m_A.NP$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{60x-900}(60-2x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{60(60-2x)}{2\sqrt{60x-900}} - 2\sqrt{60x-900}$

$f'(x) = 0,\ f(x) \to \max$ khi x=20. Chọn A.

Câu 39. Một sợi dây kim loại 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1.

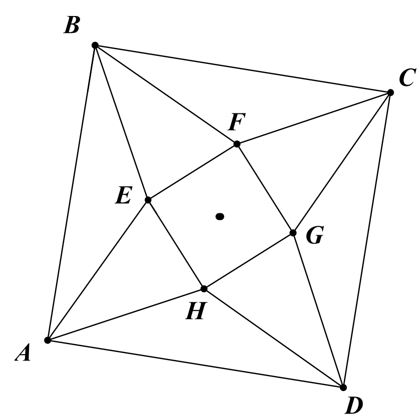
Giải:

$C = 2\pi r = 60 - a \Rightarrow r = \dfrac{60-a}{2\pi}$

$S_{hv} + S_{ht} = \dfrac{a^2}{16} + \dfrac{(60-a)^2}{4\pi} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a}{8} - \dfrac{30}{\pi} + \dfrac{a}{2\pi} \Rightarrow f'(x) = 0$ khi $a = \dfrac{30.8}{\pi+4}$

Suy ra $\dfrac{a}{r} = \dfrac{60r}{2\pi(\pi+4)} = 4$. Chọn C.

Câu 40: Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông ABCD có cạnh bằng a, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB; BFC; CGD; DHA; sau đó gò các tam giác AEH; BEF; CFG; DGH sao cho 4 đỉnh A, B, C, D trùng nhau như hình vẽ. Thể tích lớn nhất của khối tứ giác đều tạo được là:



A. $\dfrac{a^3}{36}$ B. $\dfrac{a^3}{24}$ C. $\dfrac{a^3}{54}$ D. $\dfrac{a^3}{81}$

Giải:

Gọi h là chiều cao hình chóp, x là độ dài đáy, I là trung điểm EH.

$SI = \sqrt{h^2 + 0,25x^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{x}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$, $V = \dfrac{1}{3}hx^2$.

Xét $f(x) = x^2.\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{-a}{\sqrt{2}}.x^2}{2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ax}{\sqrt{2}}}} + 2x\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ax}{\sqrt{2}}} \Rightarrow f'(x) = 0\ khi\ a = \dfrac{3x}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\sqrt{2}.x^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 a^3 = \frac{4a^3}{81}$. Chọn D.

Câu 41: Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ B. $\frac{5\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ C. $\frac{7\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{8\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Giải:

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. khi đó:

$V = h\pi r^2$. Vì $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V = h\pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi\left(hR^2 - \frac{h^3}{4}\right)$

Bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $V(h) = \pi\left(hR^2 - \frac{h^3}{4}\right), h \in (0;2R)$

Ta có: $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

BBT

h	0		$\frac{2r}{\sqrt{3}}$		2R
V'(h)		+	0	−	
V(h)		$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;2R)} V = V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi đó, Thể tích khối trụ là: $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 42: Cho số dương m, hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

A. $\frac{m}{5}$ B. $\frac{m}{4}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $\frac{m}{2}$

Giải:

Cho m>0. Đặt x là số thứ nhất, 0<x<m, số thứ hai là m-x .

Xét tích $P(x) = x(m-x), x \in (0;m)$. Ta có: $P'(x) = -2x + m = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

BBT

x	0		$\frac{m}{2}$		m
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	$\frac{m^2}{4}$	$\searrow$	

Suy ra: $\max\limits_{(0;m)} P(x) = P\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}$. vậy phân tich m thành tổng hai số $\frac{m}{2}$. Chọn D.

Câu 43: Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

A. $-\frac{13}{2} \text{ và } \frac{13}{2}$ B. $-\frac{13}{4} \text{ và } \frac{39}{4}$ C. $-\frac{13}{5} \text{ và } \frac{52}{5}$ D. $-\frac{13}{6} \text{ và } \frac{65}{6}$

Giải:

Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x+13$

Xét tích $P(x) = x(13-x)$. tc: $P'(x) = 2x+13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13}{2}$

BBT

X	$-\infty$		$\frac{-13}{2}$		$+\infty$
P'(x)		$-$	0	$+$	
P(x)		$\searrow$	$\frac{-169}{4}$	$\nearrow$	

Suy ra: $\min P(x) = P\left(\frac{-13}{2}\right) = \frac{-169}{4}$. Vậy tích hia số bé nhất khi một trong hai số là $\frac{-13}{2}$ và số kia là $\frac{13}{2}$. Chọn A.

Câu 44: Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $a(a>0)$.

A. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}} \; khi \; AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$ B. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{5\sqrt{3}} \; khi \; AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

C. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \; khi \; AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$ D. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{3\sqrt{3}} \; khi \; AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

Giải:

Kí hiệu cạnh góc vuông AB là $x, x \in \left(0;\frac{a}{2}\right)$. Khi đó cạnh huyền $BC = a-x$

Cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \frac{1}{2}x.\sqrt{a^2 - 2ax}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

BBT

X	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Suy ra $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ $khi\ AB = \frac{a}{3}, BC = \frac{2a}{3}$. Chọn A.

Câu 45: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

A. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

B. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{7}$

C. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

D. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{13}$

Giải: Đặt $BM = x; x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$ ta được $MN = a - 2x; QM = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật MNPQ là: $S(x) = MN.PQ = (a-2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(ax - 2x^2\right)$.

Ta có: $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

BBT

X	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$\searrow$	

Suy ra S(x) đạt GTLN tại điểm $x=\frac{a}{4}$ và GTLN của diện tích hình chữ nhật là $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$. Chọn A.

Câu 46: Cho một parapol $(P): y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm M thuộc parapol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

A. $M_0(-1;3); AM_0=\sqrt{7}$

B. $M_0(-1;1); AM_0=\sqrt{5}$

C. $M_0(-2;1); AM_0=\sqrt{5}$

D. $M_0(-2;3); AM_0=\sqrt{11}$

Giải

Gọi $M(x;x^2)$ là một điểm bất kì của parapol (P).

Ta có: $AM^2=(x+3)^2+x^4=x^4+x^2+6x+9$.

Khoảng cách AM đạt GTNN khi và chỉ khi $f(x)=AM^2$ đạt GTNN.

Xét $f(x)=x^4+x^2+6x+9$

$\Rightarrow f'(x)=4x^3+2x+6=(x+1)(4x^2-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=-1$

BBT

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Suy ra f(x) đạt GTNN tại điểm x=-1 và $f(-1)=5$. Do đó, khoảng cách AM đạt GTNN khi M nằm ở vị trí điểm $M_0(-1;1); AM_0=\sqrt{5}$. CHọn B.

Câu 47: Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: Lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức $C(x)=0{,}0001x^2-0{,}2x+10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1) a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí

b) Tỉ số $M(x)=\frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

2) Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là $L(x)=-0{,}0001x^2+1{,}8x-1000$.

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi.

c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất? tính số tiền lãi.

Giải.

1)a) Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là: $T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000$.

b) Ta có: $M(x) = 0,0001x + \dfrac{10000}{x} + 0,2$ với $x = 1, 2, ...$ (6)

ta xét hàm số $y = M(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Trong đó $M(x)$ được xác định bởi công thức (6) với mọi $x > 0$, trong đó hàm số M đạt GTNN trên $(0; +\infty)$

Ta có: $M'(x) = 0,0001 - \dfrac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10000$

BBT

x	0		10 000		$+\infty$
$M'(x)$		$-$	0	$+$	
M(x)		$\searrow$	2,2	$\nearrow$	

Suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} M(x) = M(10000) = 2,2$

Vậy chi phí trung bình cho x cuốn tạp chí thấp nhất khi $x = 10000$ (cuốn). chi phí cho mỗi cuốn khi đó là $2,2$ van đồng $= 22000$ (đồng).

2) a) Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí $(x \in \mathbb{N}^*)$ là: $2x + 9000$ (vạn đồng)

Số tiền lãi khi bán x cuốn là:

$$L(x) = 2x + 9000 - T(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000$$

b) có lãi khi $L(x) > 0 \Rightarrow -0,0001x^2 + 1,8x - 1000 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{0,9 - \sqrt{0,71}}{0,0001} < x < \dfrac{0,9 + \sqrt{0,71}}{0,0001}$

$\Leftrightarrow 9000 - \sqrt{71\ 000\ 000} < x < 9000 + \sqrt{71\ 000\ 000}$

Vì x lấy giá trị nguyên dương và $9000 - \sqrt{71\ 000\ 000} \approx 573,85$ *và* $9000 + \sqrt{71\ 000\ 000} \approx 17426,15$

Nên $573 < x < 17427$

c) xét hàm số: $L(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000$, $x \in (0; +\infty)$ và tìm x>0 để tại đó $L(x)$ đạt GTLN trên $(0; +\infty)$

Ta có: $L'(x) = -0,0002x + 1,8 = 0 \Leftrightarrow x = 9000$

BBT.

X	0		9 000		$+\infty$
L'(x)		$+$	0	$-$	
L(x)		$\nearrow$	7100	$\searrow$	

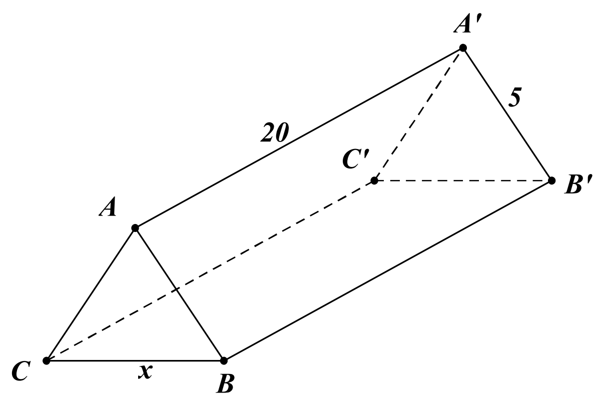
Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x) = L(9000) = 7100$

Vậy muốn lãi nhiều nhất thì phải in 9000 cuốn khi đó tiền lãi thu được là: 7100 vạn đồng $71\ 000\ 000$ (đồng).

Câu 48: Một hành lang giữa hai toàn nhà có hình dạng của hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên ABB'A' và ACC'A" là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 m, rộng 5 m, Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC.

a) Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x.

b) Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



Giải:

a) $V = 5x\sqrt{100 - x^2}\left(m^3\right); 0 < x < 10$

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2}\,(m)$ và $\max\limits_{(0;10)} V = V\left(5\sqrt{2}\right) = 250\left(m^3\right)$

Câu 49: Cho hình vuông ABCD với cạnh có độ dài cạnh bằng 1 và cung $\overset{\frown}{AB}$ là một phần tư đường tròn tâm A, bán kính AB chứ trong hình vuông. Tiếp tuyến tại điểm M của cung $\overset{\frown}{BD}$ cắt đoạn thẳng CD tại điểm P và cắt đoạn thẳng BC tại điểm Q. Đặt $x = DP$ và $y = PQ$

a) Chứng minh rằng $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ và $PQ = x + y$. Từ đó tính y theo x.

b) Tính PQ theo x và tìm x để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

a) $y = \dfrac{1-x}{1+x}; 0 < x < 1$

b) $PQ = \dfrac{x^2+1}{x+1}; 0 < x < 1$, đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x = \sqrt{2} - 1$

Câu 50: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7(km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đó từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.

Giải:

Đặt $x = BM; 0 \le x \le 7$. Khi đó $AM = \sqrt{x^2 + 25}, MC = 7 - x$.

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$ (giờ), $0\le x\le 7$

Hàm số T đạt GTNN tại điểm $x=2\sqrt{5}\simeq 4,472(km)$

Câu 51: Một hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu bán kính a.

a) Chứng minh rằng thể tích của hình chóp là: $V=\dfrac{4a^2x^2}{3(x-2a)}$, trong đó x là chiều cao của hình chóp.

b) Với giá trị nảo của x, hình chóp có thể tích nhỏ nhất.

Giải:

a) Mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của một cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo hình tròn tâm O, bán kính *a* nội tiếp tam giác SMN.

Có thể tính thể tích hình chóp theo x và $\alpha=\widehat{SNH}$. Sau đó sử dụng đẳng thức $x=a+SO$. Để tìm hệ thức giữa a,x và α.

Ta có: $HN=x\cot\alpha; MN=2x\cot a$. thể tích hình chóp là:

$$V=\frac{1}{3}MN^2.SH=\frac{4}{3}x^3\cot^2\alpha$$

Ta tính $\cot^2\alpha$ theo a và x.

Từ đẳng thức:

$$SH=OH+SO\Rightarrow x=a+\frac{a}{\cos\alpha}\Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{x^2-2ax}{(x-a)^2};$$

$$\cot^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{a^2}{x(x-2a)}.$$ Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

b) Cần chú ý V xác định khi x>2a.

Câu 52: Một sợi dây kim loại dài $60(cm)$ được cắt thành hai đoạn, đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông, đoạn thứ hai uốn thành hình tròn. Phải cắt sợi dây như thế nào để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất.

Giải:

Độ dài cạnh hình vuông là $x=\dfrac{60}{\pi+4}(cm)$. Đoạn dây được uốn thành hình vuông là $\dfrac{240}{\pi+4}\approx 33,6(cm)$. Bán kính đường tròn là $r=\dfrac{30}{\pi+4}(cm)$.

Đoạn dây dây được uốn thành vòng tròn có độ dài là: $\dfrac{60}{\pi+4}\approx 26,4(cm)$

Ta có: $4x+2\pi r=60\Rightarrow x=\dfrac{30-\pi r}{2};0<r<\dfrac{30}{\pi}$

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn là $S=\pi r^2+x^2=\pi r^2+\frac{1}{4}(30-\pi r)^2$

Dễ thấy S đạt GTNN tại điểm $r=\frac{30}{\pi+4}$

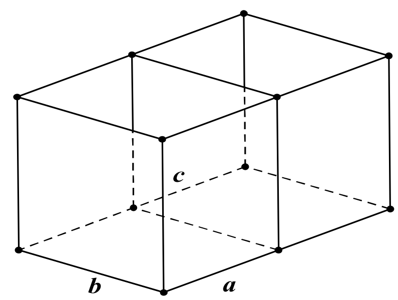
Câu 53: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn bằng nhau, không có nắp ở phía trên với thể tích 1,296m^3. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước mỗi ngăn là a, b, c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, ,b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.

A. $a=3,6cm;\ b=0,6cm;\ c=0,6cm$.

B. $a=2,4cm;\ b=0,9cm;\ c=0,6cm$

C. $a=0,9cm;\ b=1,2cm;\ c=0,6cm$

D. $a=1,2cm;\ b=1,2cm;\ c=0,9cm$.



Giải:

$V=2(abc)=1,296$

Ta có:

$S=2(ac+bc)+ab+2ac+bc+ab=4ac+3bc+2ab$ (1)

Theo đề bài $V=2(abc)=1,296\Leftrightarrow abc=\frac{81}{125}$ (2)

Bài toán trở thành tìm a,b,c để $S_{\min}$ với ĐK (2)

Từ (1) Ta có:

$$S=\frac{4abc}{b}+\frac{3abc}{a}+\frac{2abc}{c}=4\frac{81}{125}.\frac{1}{b}+3.\frac{81}{125}.\frac{1}{a}+2.\frac{81}{125}.\frac{1}{c}=\frac{81}{125}\left(\frac{4}{b}+\frac{3}{a}+\frac{2}{c}\right)$$

$\geq\frac{81}{125}3\sqrt[3]{\frac{4.3.2}{abc}}\geq\frac{81}{125}\sqrt[3]{\frac{24}{\frac{81}{125}}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{4}{b}=\frac{3}{a}=\frac{2}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3b}{4}\\c=\frac{b}{2}\end{cases}$

Thay vào (2): $\frac{3b}{4}.b.\frac{b}{2}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow\frac{3b^3}{8}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow b=1,2$. Vậy $a=0,9;c=0,6$. Chọn C.

Câu 54: Một bác nông dân được giao canh tác cây ăn quả trên một khu đất hình chữ nhật có chu vi không đổi là 200*m*, trong đó bác nông dân được tùy ý lựa chọn chiều dài và chiều rộng khu đất. Giả sử rằng sản lượng trái cây thu được tỷ lệ thuận với diện tích của khu đất. Bác nông dân đã nghĩ ra một phương án lựa chọn độ dài chiều dài: chiều rộng theo tỷ lệ *T* sao cho sản lượng trái cây thu được là cao nhất. Tìm tỷ lệ *T*.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1,5

Giải:

Chọn đáp án A

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x,y $(x,y>0)$.

Ta có $2(x+y)=200\Rightarrow100=x+y\geq2\sqrt{xy}\Rightarrow S=xy\leq50^2=2500$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=50\Rightarrow T=\frac{x}{y}=1$.

Dạng 2: Một số bài toán ứng dụng về chuyển động

Câu 55: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Giải.

a. Ta có $v(t)=S'(t)=10t$.

Vậy vận tốc thời điểm $t=6(s)$ là: $v(6)=S'(6)=10.6=60(m/s)$

b. Vậy để vận tốc của vật rơi do đạt $50(m/s)$ thì: $50=10t \Leftrightarrow t=5(s)$

Câu 56: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(\text{s}))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Giải:

a) Ta có: $a(t)=v'(t)=10t+7$. Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$

$$a(2)=v'(2)=10.2+2=27\left(m/s^2\right)$$

b) Vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s:

$$v(t)=12 \Leftrightarrow 5t^2+7t=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \quad (\text{t/ m}) \\ t=-2,4(\text{loai}) \end{array}\right.$$

Với $t=1(s): a(1)=v'(1)=10+7=17\left(m/s^2\right)$

Câu 57: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3, t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ B. $t=3$ C. $t=2$ D. $t=1$

Giải:

Ta có: $v(t)=S'(t)=6t-3t^2$, $v'(t)=6-6t$. $v'(t)=0 \Leftrightarrow 6-6t=0 \Leftrightarrow t=1$

BBT

t	0		1		$+\infty$
$V'(t)$		+	0	−	
V(t)		↗	V_{max}	↘	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt GTLN khi t=1. Chọn D.

Câu 58: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. $15h$ B. $16h$ C. $17h$ D. $18h$

Giải:

Ta có:

$$h'(t) = 24 + 10t - t^2,\ h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{(loai)} \\ t = 12 \ \ \text{(t/ m)} \end{array}\right.$$

BBT

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	−	
$h(t)$		$\nearrow$	$h_{\max}$	$\searrow$	

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày. Chọn A.

Câu 59: (đề minh họa Quốc gia 2017). Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10, (t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m B. 2m C. 10m D. 20m.

Giải:

Ta có: $v_0 = 10(m/s)$

Gia tốc của ô tô chuyển động chậm dần đều: $a = v'(t) = -5$.

Tại thời điểm ô tô dừng lại thì vận tốc bằng 0.

Ta có: $v_{(t)}^2 - v_0^2 = 2aS \Leftrightarrow 0 - 10^2 = 2(-5)S \Leftrightarrow S = 10(m)$

Vậy ô tô còn có thể đi được quãng đường là $10m$. **Chọn C.**

Lưu ý: Bài này còn có thể áp dụng tích phân để tìm quãng đường di chuyển của ô tô khi dừng lại.

Câu 60: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

A. 9km/h B. 6km/h C. 10km/h D. 12km/h

Giải:

Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng: $v - 6(km/h), (v \geq 6)$

Thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản: $t = \dfrac{300}{v-6}(h)$

Năng lượng tiêu thụ của con cá khi bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản:

$$E(v)=cv^2\frac{900}{v-6}-cv^3\frac{300}{(v-6)^2}=\frac{300cv^2}{v-6}\left(3-\frac{v}{v-6}\right).$$

$$E'(v)=0\Leftrightarrow\frac{300cv^2}{v-6}\left(3-\frac{v}{v-6}\right)=0\Leftrightarrow 3-\frac{v}{v-6}=0\Leftrightarrow \text{v}=9.$$

BBT

X	6		9		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
E(x)		$\searrow$	$E_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng $v=9(km/h)$. Chọn. A

Nhận xét:

Đối với bài này có rất nhiều em tìm nhầm hàm $E(v)=c(v-6)^3\frac{300}{v-6}(J)$. Và sẽ tìm được chọn $v=6km/h$ đó là Chọn sai hoàn toàn vì vận tốc v trong biểu thức $E(v)=cv^3t$, v là vận tốc thực của con cá khi di chuyển, còn t là thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản ứng với vận tốc của con cá đã trừ đi vận tốc dòng nước.

Câu 61: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h B. 15km/h C. 20km/h D. 25km/h

Giải:

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x}.480$ (ngàn đồng).

Khi vận tốc $v=10km/h$ thì chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là:

$$\frac{1}{10}.30=3 \text{ (ngàn đồng).}$$

Xét tại vận tốc $x(km/h)$, gọi y (ngàn đồng) chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x thì chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x, ta có: $y=kx^3$

Ta có: $3=k10^3\Leftrightarrow k=\frac{3}{10^3}$. Suy ra $y=\frac{3x^3}{1000}$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1 km đường là: $P(x)=\frac{480}{x}+\frac{3x^3}{1000}$.

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.

$$P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000},\ P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

$$P''(x) = \frac{960}{x^3} + \frac{18x}{1000},\ P''(20) = \frac{960}{20^3} + \frac{18.20}{1000} > 0$$

Suy ra $P(x)$ đạt GTNN tại $x = 20$

Vậy vận tốc của tàu $x = 20(km/h)$. Chọn C.

Câu 62: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s B. 25m/s C. 10m/s D. 18m/s

Giải:

$v = S' = gt$ nên tại thời điểm $t = 5s$.

Vận tốc của vật là: $v = 9{,}8.5 = 49(m/s)$. Chọn A.

Câu 63: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ B. $6m/s^2$ C. $8m/s^2$ D. $12m/s^2$

Giải:

$a = S'' = 6\mathrm{t} - 6$ nên tại thời điểm t=2s thì gia tốc của chất điểm là: $a = 6.2 - 6(m/s^2)$. Chọn B.

Câu 64: Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ B. $6m/s^2$ C. $24m/s^2$ D. $12m/s^2$

Giải:

$v = S' = 3t^2 + 6t - 9; a = S'' = 6t + 6$

Tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3(loai) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì gia tốc của chuyển động là: $a = 6.1 + 6 = 12(m/s^2)$. Chọn D.

Câu 65: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 100$, trong đó t tính bằng giây (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t = 1$ B. $t = 16$ C. $t = 5$ D. $t = 3$

Giải:

$$S' = t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2(l) \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Vậy chất điểm đạt GTNN tại t = 1s.

Chọn A.

Câu 66: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ B. $\dfrac{6800}{3}m$ C. $\dfrac{4300}{3}m$ D. $\dfrac{5800}{3}m$

Giải:

$$a(t)=3t+t^2,\ v'(t)=a(t);\quad S'(t)=v(t)$$

Theo đề ta có: vận tốc ban đầu là $10(m/s)$

$\Rightarrow v(t)=\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+10(m/s)$. $S(t)=\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{1}{12}t^4+10t(m)$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S(10)=\dfrac{4300}{3}(m)$. Chọn C.

Câu 67: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$, có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s B. 13m/s C. 11m/s. D. 12m/s.

Giải:

Vận tốc của vật sau 10 giây là $v=6+7=13(m/s)$. Chọn B

Câu 68: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Giải

a) Ta có: $v(t)=S'(t)=40\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)'.cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)=40\pi cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

vậy: $v(4)=S'(4)=40\pi cos\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=40\pi\dfrac{1}{2}=20\pi(m/s)$

b) Ta có:

$$a(t)=v'(t)=-40\pi\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

Vậy: $a(6)=v'(6)=-40\pi^2\sin\left(6\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-20\sqrt{3}\pi^2\left(m/s^2\right)$.

Bài 7. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI

1. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;b\right)$ và điểm $x_0\in\left(a;b\right)$ nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại x_0.

Ký hiệu $y'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hoặc $f'\left(x_0\right)$

Lưu ý: Nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng $\left(a;b\right)$ thì liên tục trên khoảng đó nhưng ngược lại thì chưa chắc đúng.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

Chú ý: $u=u\left(x\right),v=v\left(x\right)$

- $\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$
- $(u.v)'=u'.v+u.v'$ và $\left(ku\right)'=ku'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$ và $\left(\dfrac{k}{v}\right)'=-\dfrac{k.v'}{v^2};\left(v\neq 0\right)$

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM THƯỜNG GẶP

Hàm số cơ bản	*Hàm số hợp*
$\left(C\right)'=0$ *(C là hằng số)*	
$\left(x\right)'=1$	
$\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ với $x\neq 0$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ với $u\neq 0$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ với x>0	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ với u>0
$\left(\sin x\right)'=\cos x$	$\left(\sin u\right)'=u'.\cos u$
$\left(\cos x\right)'=-\sin x$	$\left(\cos u\right)'=-u'.\sin u$
$\left(\tan x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ với $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$\left(\tan u\right)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ với $u\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\left(\cot x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ với $x\neq k\pi$	$\left(\cot u\right)'=-\dfrac{u}{\sin^2 u}$ với $u\neq k\pi$
$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ với $x>0$	$\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$ với $u>0$
$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ với $x>0$	$\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$ với $u>0$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$\left(e^u\right)'=u'.e^u$
$\left(a^x\right)'=a^x.\ln a$	$\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$

3. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \le f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f(x_0)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f(x_0)$.

4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đã cho.
2. Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ trên đoạn $[a;b]$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Tính: $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x); \mathrm{m} = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý:

1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.

2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \ge 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(a) \\ \max f(x) = f(b) \end{cases}$

4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \le 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(b) \\ \max f(x) = f(a) \end{cases}$

Ngoài ra cần trang bị thêm một số kiến thức về bất đẳng thức cơ bản để giải quyết các bài này nhanh hơn:

5. Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số:

Hai số: Với $A, B \ge 0$ ta luôn có $A + B \ge 2\sqrt{AB}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B$

Ba số: Với $A, B, C \ge 0$ ta luôn có $A + B + C \ge 3\sqrt[3]{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1.

Câu 1: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

Lời giải:

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng ; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2\left(x-2.000.000\right)}{100.000} = \frac{x-2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x-2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F\left(x\right) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$, ĐK: $x \geq 2.000.000$

$$F'\left(x\right) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0		−
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A.

Nhận xét: Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 2: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ B. 43.000đ C. 42.000đ D. 41.000đ

Lời giải:

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$\left(50000-x\right).\frac{50}{5000}=\frac{1}{100}\left(50000-x\right).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40+\frac{1}{100}\left(50000-x\right)=-\frac{1}{100}x+540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).\left(x-30.000\right)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{50}x+840$$

$$F'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x+840=0 \Leftrightarrow x=42.000$$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$$F\left(30.000\right)=0$$

$$F\left(42.000\right)=1.440.000$$

$$F\left(50.000\right)=800.000$$

Vậy với $x=42.000$ thì $F\left(x\right)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng. Chọn C.

Câu 3. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là

$\left(30-\dfrac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

Lời giải:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được :

$$F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120(loai) \\ x = 40(\text{t/ m}) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

Câu 4. Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 2(m), h = 4(m)$ B. $R = 4(m), h = 2(m)$

C. $R = 3(m), h = 4(m)$ D. $R = 4(m), h = 4(m)$

Lời giải:

Do thùng phi có dạng hình trụ nên: $V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{R^2}, (1)$

Diện tích toàn phần của thùng phi là: $S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h+R), (2)$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi R\left(\frac{16}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{16}{R} + R^2\right)$$

$$S'_{Tp} = 2\pi\left(-\frac{16}{R^2} + 2R\right) = \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right),\ \ S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right) = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0		2		$+\infty$
S'(R)		−	0	+	
S(R)	↘		$S_{\min}$	↗	

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì R= 2(m) và chiều cao là h = 4 (m).
Chọn A.

Câu 5. Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\dfrac{230}{3}kg$ B. $70kg$ C. $72kg$ D. $69kg$

Giải:

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: 100.1= 100(kg).

Gọi x (0<x<100) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống thu hoạch được: $2000:100=20\left(kg\right)$

Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2\left(kg/m^2\right)$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới $\left(F(x):kg\right)$

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F\left(x\right)=\left(100-x\right)\left(20+\frac{3}{8}x\right)=2000+\frac{35}{2}x-\frac{3}{8}x^2$$

Bìa toán trở thành tìm x để F(x) lớn nhất.

Ta có:

$$F'\left(x\right)=\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x,\qquad F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow x=\frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

X	0		$\frac{70}{3}$		100
F'(x)		+	0	−	
F(x)	↗		$F_{\max}$	↘	

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$100-\dfrac{70}{3}=\dfrac{230}{3}\approx 76,67\left(kg\right)$ Chọn A.

Nhận xét:

Làm sao ta có thể tìm được hàm F(x) và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20 = 2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100 - x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100 - x)(20 + mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm 0,2 (kg/m^2) thì $100m^2$ giảm $x = 20kg$, sản lượng thu được là $2200kg$.

Ta có: $(100-20)(20+m20) = 2200 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó $x(mg)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

Giải:

Ta có: $G(x) = 0,25x^2(30-x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$

$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$, $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(\text{loai}) \\ x = 20(\text{t/ m}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

X	0		20		$+\infty$
G'(x)		+	0	−	
G(x)			100		

Dựa vào bảng biến thiên thì bênh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$. Chọn D.

Câu 7. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t): 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Giải:

Ta có: $G'(t) = 90t - 3t^2$, $G''(t) = 90 - 6t$, $G''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên:

T	0		15		$+\infty$
G''(t)		+	0	−	
G(t)			675		

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15. Chọn D.

Câu 8: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t=10(h)$ B. $t=14(h)$ C. $t=15(h)$ D. $t=22(h)$

Giải:

Ta có:

$h'=-3\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right).$

$h'=0\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow t=-2+6k,\left(k\in Z_{(+)}\right)$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

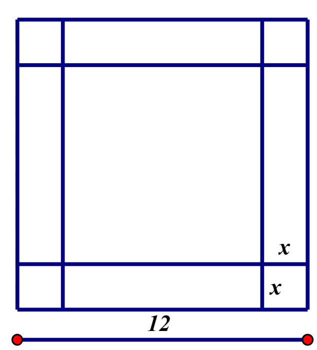
Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

Vì $-1\le cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow 9\le 3cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12\le 15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow t=-2+12k,\left(k\in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Câu 9: (Đề minh họa Quốc gia 2017): Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A. $x=6(cm)$ B. $x=3(cm)$

C. $x=2(cm)$ D. $x=4(cm)$

Giải:

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gập thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12-2x$

Ta có: $V=S.h=(12-2x)^2.x=4x^3-48x+144x$ với $0<x\le 6$

Bài toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$V'=12x^2-96x+144,\quad V'=0\Leftrightarrow 12x^2-96x+144=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=6\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		2		6
V'(x)		+	0	−	
V(x)		↗	128	↘	

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì x =2 cm. Chọn C.

Câu 10: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ B. Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ D. Dài $24cm$, rộng $19cm$

Giải:

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x>0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\dfrac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là : $\dfrac{384}{x}+4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\dfrac{384}{x}+4\right)=408+4x+\dfrac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x)=4-\dfrac{2304}{x^2}$

$S'=0\Leftrightarrow 4-\dfrac{2304}{x^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=24(\text{t/ m})\\ x=-24(\text{loai})\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Câu 11: Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $36cm^2$ B. $20cm^2$ C. $16cm^2$ D. $30cm^2$

Giải:

Gọi độ dài hình chữ nhật đó là: $x(cm)$. Chiều rộng của hình chữ nhật đó là: $(8-x)cm$. Suy ra $4\le x\le 8$

Diện tích hình chữ nhật đó là: $S=x(8-x)=8x-x^2$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt GTLN.

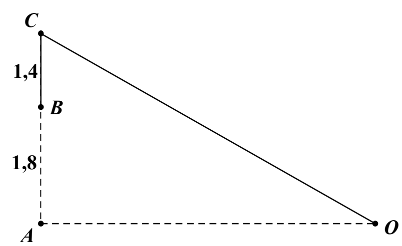
Ta có: $S'=8-2x; S'=0 \Leftrightarrow 8-2x=0 \Leftrightarrow x=4$

Vì hàm S(x) liên tục trên $4\le x\le 8$, ta có: $S(4)=16; S(8)=0$

Kết luận: hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $16cm^2$

Lưu ý: Bìa này ta còn có thể sử dụng lí thuyết của lớp 10. Tìm GTLN của parapol với hệ số a<0 thì $S_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}=S\left(-\frac{b}{2a}\right)=16$. Chọn C.

Câu 12: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ B. $AO=2m$

C. $AO=2,6m$ D. $AO=3m$

Giải:

Đặt độ dài cạnh $AO=x(cm),(x>0)$

Suy ra: $BO=\sqrt{3,24+x^2}, CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2.OB.OC}=\frac{(3,24+x^2)+(10,24+x^2)-1,96}{2\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$$

$$=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F(x)=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$ đạt GTNN.

Đặt $(3,24+x^2)=t,(t>3,24)$. Suy ra $F(t)=\frac{t+\frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}=\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50\left(t^2+7t\right)-\left(25t+63\right)\left(2t+7\right)}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)$$

$F'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=9$

BBT

t	3,24		9		$+\infty$
F'(t)		−	0	+	
F(t)	↘		F_{min}	↗	

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m. Chọn A.

Câu 13: Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h=\frac{20}{3}\left(m\right)$ B. $h=\frac{22}{3}\left(m\right)$ C. $h=\frac{23}{3}\left(m\right)$ D. $h=\frac{25}{3}\left(m\right)$

Giải:

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và h, (x>0, h>0, m)

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở O, vậy O là tâm mặt câu. Ta có: $OS=5m$, nên $OI=h-5$, với I là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác OIC vuông nên ta có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-\left(h-5\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},\left(5<h<10\right)$$

Ta có thể tích khối chóp tứ giác đều: $V\left(h\right)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right)$

Bài toán trở thành tìm h để V(h) đạt GTNN.

$V'\left(h\right)=\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)$, $V'\left(h\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)=0\Leftrightarrow h=\frac{20}{3}$

BBT

h	5		$\frac{20}{3}$		10
$V'\left(h\right)$		+	0	−	
$V\left(h\right)$	↗		V_{max}	↘	

Vậy chọn chiều cao đó là $h=\frac{20}{3}\left(m\right)$. Chọn A.

Câu 14: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

Giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n)=(480-20n).n=480n-20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

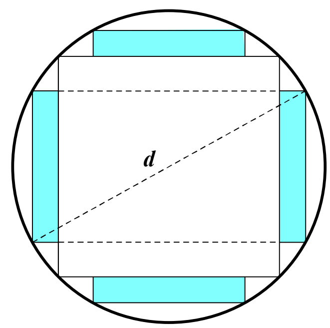
Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho F(x) đạt GTLN.

$F'(n)=480-40n$, $F'(n)=0 \Leftrightarrow 480-40n=0 \Leftrightarrow n=12$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất. Chọn C.

Câu 15: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.



A. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

Giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ và

$0<x<\dfrac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}, 0<y<\dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề bài ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$\left(2x+\dfrac{d}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=d^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx} \text{ với } 0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

Ta có:

$$S'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0\Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

X	0		$\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$		$\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}d$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	$S_{\max}$	↘	

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d, y=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$. Chọn A.

Câu 16: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, $\left(x>0, y>0, h>0, m\right)$. Ta có: $\frac{y}{x}=2\Leftrightarrow y=2x$

Thể tích hồ chứa nước $V=xyh\Leftrightarrow h=\frac{V}{xy}=\frac{576}{x(2x)}=\frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x)=2xy+2xh+2yh=2x(2x)+2x\frac{288}{x^2}+2(2x)\frac{288}{x^2}=4x^2+\frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$$S\left(x\right)=4x^2+\frac{1728}{x},\ S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 8x-\frac{1728}{x^2}=0\Leftrightarrow x=6$$

BBT

X	0		6		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây: $432m^2$

Chi phí ít nhất là: $432x500.000=216.000.000$. Chọn A.

Câu 17: Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng ở bên trong có dạng hình hộp chữ nhật và không có nắp, có đáy là hình vuông. Thùng gỗ có thể chứ được $62,5m^3$. Hỏi các cạnh của hình hộp chữ nhật có độ dài là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là nhỏ nhất?

A. Cạnh bên: $2,5m$, cạnh đáy: $5m$.

B. Cạnh bên: 4m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{10}}{4}m$

C. Cạnh bên: 3m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{10}}{6}m$

D. Cạnh bên: 5m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$.

Giải.

Gọi x, h lần lượt là độ dài cạnh đáy hình vuông, chiều cao của thùng gỗ, $\left(x>0,h>0,\left(m\right)\right)$.

Thể tích thùng gỗ: $V=x^2h\Leftrightarrow h=\frac{V}{x^2}=\frac{62,5}{x^2}$

Diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là:

$$S\left(x\right)=x^2+4xh=x^2+4x.\frac{62,5}{x^2}=x^2+\frac{250}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'\left(x\right)=2x-\frac{250}{x^2},\quad S'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{250}{x^2}=0\Leftrightarrow x=5$$

BBT

X	0		5		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy để tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là nhỏ nhất thì cạnh đáy là 5m, chiều cao 2,5m. Chọn A.

Câu 18: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ B. $5R^2$ C. R^2 D. $3R^2$

Giải.

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $(0 < x < R)$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \text{(t/ m)} \\ x = \dfrac{-R\sqrt{2}}{2} \text{(loai)} \end{array}\right.$$

BBT:

X	0		$\frac{R\sqrt{2}}{2}$		R
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	R^2	↘	

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2

Câu 19: (Đề thi thử Việt Trì lần I): Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng B. 382.000 đồng C. 83.200 đồng D. 8.320.000 đồng.

Giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \dfrac{V}{h} = \dfrac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, m)$

Chiều rộng của hộp là $\dfrac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm để cá. Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x.70.000 + 2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000 = 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt GTNN.

$F'(x) = 84.000 - \dfrac{13440}{x^2}$, $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \dfrac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$

BBT

X	0		0,4		$+\infty$
F'(x)		−	0	+	
F(x)		$\searrow$	$F_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

Câu 20: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông không có có nắp có thể tích chứa được $4dm^3$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau:

A. Cạnh đáy: 2dm, cao: 1dm.

B. Cạnh đáy: 2dm, cao: 2dm.

C. Cạnh đáy: 1dm, cao: 2dm.

D. Cạnh đáy: 2dm, cao: 3dm.

Giải

Gọi: Độ dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, dm)$

Chiều cao của hộp là $h, (h > 0, dm)$. S(x) là diện tích của hộp cần mạ (dm^2)

Ta có khối lượng cần mạ là: $(P_{vang}.d).S(x) = C.S(x)$

Với C là hằng số, P_{vang} là khối lượng riêng của vàng.

Khối lượng vàng cần mạ tỉ lệ thuận với $S(x)$. Thể tích hộp $V = x^2h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{4}{x^2}$

$S(x) = 4xh + x^2 = \dfrac{16}{x} + x^2$. Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$S'(x) = \dfrac{-16}{x^2} + 2x$, $S'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-16}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

BBT

X	0		2		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì chũng ta phải sản xuất hoppj có kích thước cạnh đáy: $x = 2dm$, $cao: h = 1dm$. Chọn A.

Câu 21: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

A. 512 con B. 511 con C. 510 con D. 509 con

Giải:

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000(con)$

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:
$1500 : 1000 = 1,5(kg)$.

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: $x(con), (x > 0)$

Theo đề bài, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5kg / con$

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x\ kg / con$.

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:
$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$.

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt GTLN.

Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61,\ F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

BBT

X	0		488		1000
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$	

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ này là: $1000 - 488 = 512con$.
Chọn A.

Câu 22: Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

A. $V = \frac{2}{27}dm^3$ B. $V = \frac{3}{27}dm^3$ C. $V = \frac{4}{27}dm^3$ D. $V = \frac{5}{27}dm^3$

Giải

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông x dm.

Khi đó chiều cao của hình hộp là $x(dm), \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

Và cạnh đáy của hộp là $(1 - 2x)dm$. Vậy thể tích của hộp là: $V = x(1 - 2x)^2\ dm^3$

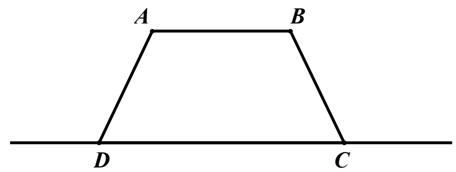
Ta có: $V' = 1 - 8x + 12x^2$, $V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

BBT

X	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'		+	0	−	
V		$\nearrow$	$\frac{2}{27}$	$\searrow$	

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{2}{27}dm^3$. chọn A.

Câu 23: Một người nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân ABCD như hình vẽ (Bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $\sqrt{3}a^2$ B. $\frac{5\sqrt{3}a^2}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Giải:

$AB = a, AA' = h, CD = x.$ Ta có:

$$h^2 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 3a^2 + 2ax - x^2 = 4h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 2ax - x^2} = 2h$$

$$S = \frac{a+x}{2}.h = \frac{a+x}{4}.\sqrt{3a^2+2ax-x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(3a-x)(x+a)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{27}}{4}\sqrt{(3a-x).\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{27}}{4}\left(\frac{(3a-x)+\frac{x+a}{3}+\frac{x+a}{3}+\frac{x+a}{3}}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{27}a^2}{4}.$$ Chọn D.

Câu 24: Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km B. 6,5km C. 5km D. 4km.

Giải:

Ta đặt: $B'C = x(km), (0 \leq x \leq 9)$

Ta có: $BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36+x^2}, AC = 9 - x$

Gọi F(x) là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

Ta có: $F(x) = 130.000.\sqrt{36+x^2} + 50.000(9-x)(USD)$

Bài toán trở thành tìm x sao cho F(x) đạt GTNN.

$F'(x) = \dfrac{130.000}{\sqrt{36+x^2}}x - 50.000.$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{130.000}{\sqrt{36+x^2}}x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36+x^2} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} = 2,5$

Vì F(x) là hàm liên tục trên đoạn $[0;9]$ nên ta có:

$F(0) = 1.230.000, F(9) = 1.406.000, F\left(\dfrac{5}{2}\right) = 1.170.000$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng 9km-2,5km=6,5km.   Chọn B.

Câu 25: Một gia đình cần xây một cái bể nước hình trụ có thể chứa được $150m^3$ có đáy được làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn, bề mặt làm bằng kính. Tính chi phí thấp nhất cần dùng để xây bể nước đó. biết giá thành vật liệu làm bằng bê tông có giá thành là 100.000 đồng/m^2, làm bằng tôn là 90.000 đồng/m^2, bề mặt làm làm bằng kính là 120.000 đồng/m^2. (số tiền để xây được tính lấy giá trị lớn hơn gần nhất với số tiền tính toán trên lí thuyết).

A. 15.041.000đ   B. 15.040.000đ   C. 15.039.000đ   D. 15.038.000đ

Giải

Gọi $r(m), h(m)$ lần lượt là bán kính của đáy bể và chiều cao của bể.

Ta có: $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{150}{\pi r^2}$

Gọi F(r) là hàm chi phí xây dựng bể nước

Ta có:

$F(r) = 100.000\pi r^2 + 90.000.2\pi rh + 120.000\pi r^2 = 220.000\pi r^2 + \dfrac{27.000.000}{r}$

Bài toán trở thành tìm r để $F(r)$ đạt GTNN.

$F'(r) = 440.000\pi r - \dfrac{27.000.000}{r^2}$

$F'(r) = 0 \Leftrightarrow 440.000\pi r - \dfrac{27.000.000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$

BBT

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$		$+\infty$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	$F_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy chi phí thấp nhất là $F\left(\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}\right) \approx 15.038.287,97$ đồng. Chọn C.

Câu 26: Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

A. 0,8m B. 0,9m C. 1m D. 1,1m

Giải:

Giả sử tấm dỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền.

Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, (0 < x < 0,6)$

Khi đó, cạnh huyền $BC = 1,2 - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $AC = \sqrt{(1,2-x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$

Ta có diện tích tam giác ABC: $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1,44-2,4x}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1,44-2,4x} - \frac{1}{2}\frac{1,2x}{\sqrt{1,44-2,4x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1,44-3,6x}{\sqrt{1,44-2,4x}}\right)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0		0,4		0,6
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	S_{max}	↘	

Vậy cạnh BC=0,8m

Câu 27: Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứ được 3200cm^3, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

A. 170cm^2 B. 160cm^2 C. 150cm^2 D. 140cm^2

Giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga, $(x > 0, y > 0, h > 0, cm)$

Ta có: $\frac{h}{x} = 2 \Leftrightarrow h = 2x$

Thể tích hố ga: $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{1600}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hố ga là:

$$S(x) = xy + 2xh + 2yh = x.\frac{1600}{x^2} + 2x2x + x\frac{1600}{x^2}2x = \frac{1600}{x} + 4x^2 + \frac{6400}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}, \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

BBT

X	0		10		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)		↘	$S_{\min}$	↗	

Vậy chiều rộng của hố ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hố ga nhỏ nhất là: $S = 10.16 = 160cm^2$. Chọn B

Câu 28: Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100.000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200.000 đồng cộng thêm 90.000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng.

A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 ti vi

B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 125 ti vi

C. Đặt hàng 10 lần, mỗi lần 250 ti vi

D. Đặt hàng 50 lần, mỗi lần 50 ti vi

Giải:

Gọi x là số lượng ti vi mà trung tâm đặt mỗi lần $(x > 0)$ (đơn vị: cái)

Số lần đặt hàng mỗi năm của trung tâm: $\dfrac{2500}{x}$

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng: $\dfrac{2500}{x}.(200.000 + 90.000x)$

Số lượng tivi trung bình gửi kho là $\dfrac{x}{2}$, chi phí lưu trong kho tương ứng: $50.000x$

Gọi F(x) là hàm chi phí mà trung tâm đó phải trả.

Ta có:

$$F(x) = \frac{2500}{x}(200.000 + 90.000x) + 50.000x = \frac{500.000.000}{x} + 225.000.000 + 50.000x$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) nhỏ nhất

$$F'(x) = -\frac{500.000.000}{x} + 50.000, \quad F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{500.000.000}{x} + 50.000 = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

BBT

x	0		100		2500
F'(x)		−	0	+	
F(x)		↘	$F_{\min}$	↗	

Vậy trung tâm phải đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi. Chọn A.

Câu 29: Mùa này công ty sách định ra 2 cuốn trắc nghiệm Lý và Toán với giá sản xuất là 200.000 đồng và 300.000 đồng. Khi đó hàm lợi ích chúng ta là $u(x;y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$, với x, y là số lượng hai cuốn sách được in ra. Nhưng ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000

đồng. Theo bạn phải sản xuất số lượng như thế nào để đạt doanh thu cho công ty sách cao nhất?

A. $\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. B. $\left(\frac{2000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. C. $\left(\frac{3001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. D. $\left(\frac{2001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu.

Giải:

Ta có hàm lợi ích là: $u(x;y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$. Để cho gọn ta đặt $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt{y}$

Vì ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 triệu đồng nên , suy ra:

$200.000a^3+300.000b^2=300.000.000 \Leftrightarrow 2a^3+3b^2=3000(*)$

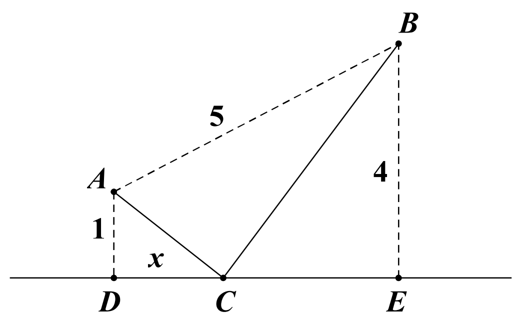
Lúc này ta có: $u(x;y)=v(a;b)$ ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thể tíchức này.

Ta có $(*) \Leftrightarrow a^3+a^3+b^2+b^2+b^2=3000 \geq 5\sqrt[5]{a^6b^6} \Rightarrow ab \leq \left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$. Chon A

Câu 30: Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.

A. $\sqrt{41}$ B. $\sqrt{37}$

C. $\sqrt{29}$ D. $3\sqrt{5}$



Giải

Đặt $CD=x, x>0$. Ta tính được $DE=\sqrt{5^2-(4-1)^2}=4$

Ta có $AC+BC=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(4-x)^2+16}=f(x)$

Khi đó: $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$

Giải phương trình $f'(x)=0$, ta thu được $x=\frac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x)=\sqrt{14}$, chọn A.

Câu 31: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của hình hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8 B. 12. C. $8\sqrt{2}$ D. $24\sqrt{3}$.

Giải:

Đặt a,b,c là kích thước hình hộp thì ta có hệ:

$$\begin{cases}2(ab+bc+ca)=36\\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab+bc+ca=18\\ a^2+b^2+c^2=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}ab+bc+ca=18\\ a+b+c=6\sqrt{2}\end{cases}$$

Cần tìm GTLN của $V=abc$

Đặt $a = x\sqrt{2}, b = y\sqrt{2}, c = z\sqrt{2}$ thì có hệ mới $\begin{cases} xy + yz + zx = 9 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

Đến đây chặn được miền của từng biến vì:

$\begin{cases} y + z = 6 - x \\ yz = 9 - x(y+z) = 9 - x(6-x) \end{cases}$ và $(y+z)^2 \geq 4yz$

Nên $(6-x)^2 \geq 4\left[9 - x(6-x)\right] \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 4$

Tương tự $0 < y, z \leq 4$

Ta có: $V = 2\sqrt{2}xyz = 2\sqrt{2}x\left[9 - x(6-x)\right]$, đến đây khảo sát hàm số này tìm max.

GTLN là $V = 8\sqrt{2}$. chọn C.

Câu 32: Một ca sĩ có buổi diễn âm nhạc có giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì quản lí kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vẽ phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu?

A. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 800 000 đô la.
B. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 6400 000 đô la.
C. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 11 000 đô la.
D. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 110 000 đô la.

Giải.

Gọi x là số lần giảm bớt đi 20 đô la trong giá vé. Khi đó giá vé sẽ là $600 - 20x$ một người.

Số người mua vé sẽ là: $1000 + 100x$

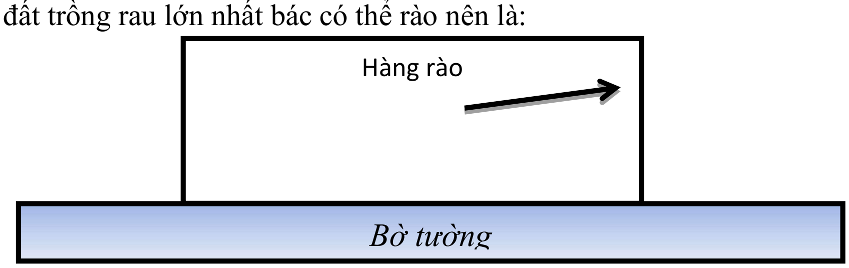
Khi đó số tiền thu được là:

$f(x) = (600 - 20x)(1000 + 100x) = -2000x^2 + 40\ 000x + 600\ 000$

Hàm số bậc 2 có hệ số $a = -2000 < 0$. Ta sẽ áp dụng kết quả đã được đưa ra đó là hàm số sẽ đạt GTLN tại $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-40000}{2.(-2000)} = 10$. Khi đó: $f(10) = 800\ 000$. Chọn A.

Câu 33. Bác nông dân muốn làm hàng rà trồng ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó.

Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



A. $1500m^2$. B. $10\ 000m^2$. C. $2500m^2$. D. $5000m^2$.

Giải:

Đề bài cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là $200m$. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r, đến đậy ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có: $x+2r=200 \Leftrightarrow r=100-\frac{x}{2}$. Từ đây ta có $r>0 \Rightarrow x<200$.

Diện tích đất rào được tính bởi: $f\left(x\right)=x\left(100-\frac{x}{2}\right)=-\frac{x^2}{2}+100x$

Xét hàm số $f\left(x\right)=-\frac{x^2}{2}+100x$ trên khoảng $\left(0;200\right)$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn.

Ta có: $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -x+100=0 \Leftrightarrow x=100$

Từ đó ta có $f\left(100\right)=5000$ là GTLN của diện tích đất rào được. chọn D.

Câu 34: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ B. $1000\pi\ cm^3$

C. $2500\pi\ cm^3$ D. $5000\pi\ cm^3$

Giải:

Gọi $x\left(cm\right);y\left(cm\right)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $\left(x,y>0;x<30\right)$

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $\left(2x+y\right).4=120 \Leftrightarrow y=30-2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V=\pi x^2.y=\pi x^2\left(30-2x\right)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x)=x^2\left(30-2x\right)$ với $0<x<30$ đạt GTLN

$f'\left(x\right)=-6x^2+60x$, cho $f'\left(x\right)=-6x^2+60x=0 \Leftrightarrow x=10$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là: $V=1000\pi\left(cm^3\right)$. Chọn B

Câu 35: Thể tích nước của một bề bơi sau t phút bơm tính theo công thức

$$V\left(t\right)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)\ \left(0\le t\le 90\right)$$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v\left(t\right)=V'\left(t\right)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90. B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75. D. Cả A, B, C đều sai.

Giải:

Xét hàm $V'=\frac{9}{10}t^2-\frac{1}{100}t^3\ \ \left(0\le t\le 90\right)$

$V''=\frac{9}{5}t-\frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V''=0$ khi $t=0,t=60$

Dựa vào bảng biến thiên, Ta có hàm số V' đồng biến trên (0;60), nghịch biến trên (60;90). Chọn A.

Câu 36: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỉ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,7 B. 0,6 C. 0,8. D. 0,5.

Giải.

Ta có $S_{tp}=S_{xq}+2S_d=2\pi rl+2\pi r^2 \quad (1)$

$V=\pi r^2 l=2 \Rightarrow l=\frac{2}{\pi r^2}$ thay vào (1) ta được:

$S_{tp}=\frac{4}{r}+2\pi r^2=f(r),\ f'(r)=-\frac{4}{r^2}+4\pi r$

$f'(r)=0$ khi r gần bằng 0,68. Chọn A.

Câu 37: Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h, có thể tích là $1m^3$. Với a,h như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

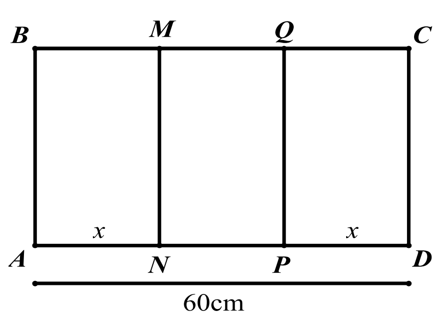
A. $a=1;h=1$. B. $a=\frac{1}{3};h=\frac{1}{3}$ C. $a=\frac{1}{2};h=\frac{1}{2}$ D. $a=2;h=2$.

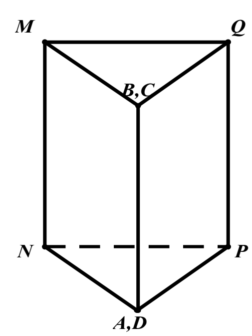
Giải.

$V=a^2h=1 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{h}},\ S=4ah+2a^2=\frac{4}{a}+2a^2=f(a),\ f'(a)=-\frac{4}{a^2}+4a$

Dấu "=" xẩy ra khi $a=1$. Chọn A.

Câu 38: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD=60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?





A. $x=20$ B. $x=30$ C. $x=45$ D. $x=40$

Giải:

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác NAP = S_{NAP}

Ta có: $m_a = \sqrt{\dfrac{4x^2 - (60-2x)^2}{4}} = \sqrt{-900+60x}$

$V = h.m_A.NP$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{60x-900}(60-2x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{60(60-2x)}{2\sqrt{60x-900}} - 2\sqrt{60x-900}$

$f'(x) = 0,\ f(x) \to \max$ khi x=20. Chọn A.

Câu 39. Một sợi dây kim loại 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1.

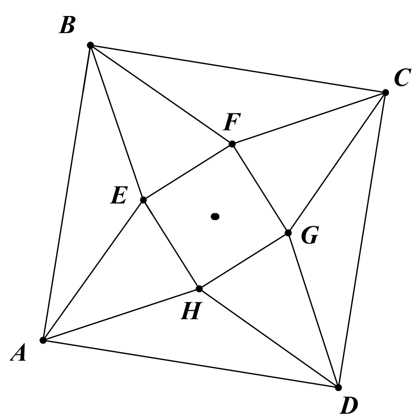
Giải:

$C = 2\pi r = 60 - a \Rightarrow r = \dfrac{60-a}{2\pi}$

$S_{hv} + S_{ht} = \dfrac{a^2}{16} + \dfrac{(60-a)^2}{4\pi} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a}{8} - \dfrac{30}{\pi} + \dfrac{a}{2\pi} \Rightarrow f'(x) = 0$ khi $a = \dfrac{30.8}{\pi+4}$

Suy ra $\dfrac{a}{r} = \dfrac{60r}{2\pi(\pi+4)} = 4$. Chọn C.

Câu 40: Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông ABCD có cạnh bằng a, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB; BFC; CGD; DHA; sau đó gò các tam giác AEH; BEF; CFG; DGH sao cho 4 đỉnh A, B, C, D trùng nhau như hình vẽ. Thể tích lớn nhất của khối tứ giác đều tạo được là:



A. $\dfrac{a^3}{36}$ B. $\dfrac{a^3}{24}$ C. $\dfrac{a^3}{54}$ D. $\dfrac{a^3}{81}$

Giải:

Gọi h là chiều cao hình chóp, x là độ dài đáy, I là trung điểm EH.

$SI = \sqrt{h^2 + 0,25x^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{x}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)},\quad V = \dfrac{1}{3}hx^2.$

Xét $f(x) = x^2.\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{-a}{\sqrt{2}}.x^2}{2\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ax}{\sqrt{2}}}} + 2x\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ax}{\sqrt{2}}} \Rightarrow f'(x) = 0\ khi\ a = \dfrac{3x}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\sqrt{2}.x^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 a^3 = \frac{4a^3}{81}$. Chọn D.

Câu 41: Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ B. $\frac{5\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ C. $\frac{7\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{8\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Giải:

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. khi đó:

$V = h\pi r^2$. Vì $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V = h\pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi\left(hR^2 - \frac{h^3}{4}\right)$

Bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $V(h) = \pi\left(hR^2 - \frac{h^3}{4}\right), h \in (0;2R)$

Ta có: $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

BBT

h	0		$\frac{2r}{\sqrt{3}}$		2R
V'(h)		+	0	−	
V(h)			$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$		

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;2R)} V = V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi đó, Thể tích khối trụ là: $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 42: Cho số dương m, hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

A. $\frac{m}{5}$ B. $\frac{m}{4}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $\frac{m}{2}$

Giải:

Cho m>0. Đặt x là số thứ nhất, 0<x<m, số thứ hai là m-x .

Xét tích $P(x) = x(m-x), x \in (0;m)$. Ta có: $P'(x) = -2x + m = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

BBT

x	0		$\frac{m}{2}$		m
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	$\frac{m^2}{4}$	$\searrow$	

Suy ra: $\max\limits_{(0;m)} P(x) = P\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}$. vậy phân tich m thành tổng hai số $\frac{m}{2}$. Chọn D.

Câu 43: Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

A. $-\frac{13}{2} và \frac{13}{2}$ B. $-\frac{13}{4} và \frac{39}{4}$ C. $-\frac{13}{5} và \frac{52}{5}$ D. $-\frac{13}{6} và \frac{65}{6}$

Giải:

Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x+13$

Xét tích $P(x) = x(13-x)$. tc: $P'(x) = 2x+13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13}{2}$

BBT

X	$-\infty$		$\frac{-13}{2}$		$+\infty$
P'(x)		$-$	0	$+$	
P(x)		$\searrow$	$\frac{-169}{4}$	$\nearrow$	

Suy ra: $\min P(x) = P\left(\frac{-13}{2}\right) = \frac{-169}{4}$. Vậy tích hia số bé nhất khi một trong hai số là $\frac{-13}{2}$ và số kia là $\frac{13}{2}$. Chọn A.

Câu 44: Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $a(a>0)$.

A. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$ B. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{5\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

C. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$ D. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{3\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

Giải:

Kí hiệu cạnh góc vuông AB là $x, x \in \left(0;\frac{a}{2}\right)$. Khi đó cạnh huyền $BC = a-x$

Cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \frac{1}{2}x.\sqrt{a^2 - 2ax}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

BBT

X	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	↘	

Suy ra $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ *khi* $AB = \frac{a}{3}, BC = \frac{2a}{3}$. Chọn A.

Câu 45: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

A. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

B. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{7}$

C. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

D. $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{13}$

Giải: Đặt $BM = x; x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$ ta được $MN = a - 2x; QM = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật MNPQ là: $S(x) = MN.PQ = (a-2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(ax - 2x^2\right)$.

Ta có: $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

BBT

X	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	↘	

Suy ra S(x) đạt GTLN tại điểm $x=\frac{a}{4}$ và GTLN của diện tích hình chữ nhật là $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} S(x)=S\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$. Chọn A.

Câu 46: Cho một parapol $(P): y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm M thuộc parapol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

A. $M_0(-1;3); AM_0=\sqrt{7}$

B. $M_0(-1;1); AM_0=\sqrt{5}$

C. $M_0(-2;1); AM_0=\sqrt{5}$

D. $M_0(-2;3); AM_0=\sqrt{11}$

Giải

Gọi $M(x;x^2)$ là một điểm bất kì của parapol (P).

Ta có: $AM^2=(x+3)^2+x^4=x^4+x^2+6x+9$.

Khoảng cách AM đạt GTNN khi và chỉ khi $f(x)=AM^2$ đạt GTNN.

Xét $f(x)=x^4+x^2+6x+9$

$\Rightarrow f'(x)=4x^3+2x+6=(x+1)(4x^2-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=-1$

BBT

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Suy ra f(x) đạt GTNN tại điểm x=-1 và $f(-1)=5$. Do đó, khoảng cách AM đạt GTNN khi M nằm ở vị trí điểm $M_0(-1;1); AM_0=\sqrt{5}$. CHọn B.

Câu 47: Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: Lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,…) được cho bởi công thức $C(x)=0{,}0001x^2-0{,}2x+10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1) a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí

b) Tỉ số $M(x)=\frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

2) Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là $L(x)=-0{,}0001x^2+1{,}8x-1000$.

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi.
c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất? tính số tiền lãi.
Giải.
1)a) Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là: $T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000$.

b) Ta có: $M(x) = 0,0001x + \dfrac{10000}{x} + 0,2$ với $x = 1,2,...$ (6)

ta xét hàm số $y = M(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Trong đó $M(x)$ được xác định bởi công thức (6) với mọi $x > 0$, trong đó hàm số M đạt GTNN trên $(0;+\infty)$

Ta có: $M'(x) = 0,0001 - \dfrac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10000$

BBT

x	0		10 000		$+\infty$
$M'(x)$		$-$	0	$+$	
M(x)		$\searrow$	2,2	$\nearrow$	

Suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} M(x) = M(10000) = 2,2$

Vậy chi phí trung bình cho x cuốn tạp chí thấp nhất khi $x = 10000$ (cuốn). chi phí cho mỗi cuốn khi đó là $2,2$ van đồng $= 22000$ (đồng).

2) a) Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí $(x \in \mathbb{N}^*)$ là: $2x + 9000$ (vạn đồng)
Số tiền lãi khi bán x cuốn là:

$L(x) = 2x + 9000 - T(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000$

b) có lãi khi $L(x) > 0 \Rightarrow -0,0001x^2 + 1,8x - 1000 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{0,9 - \sqrt{0,71}}{0,0001} < x < \dfrac{0,9 + \sqrt{0,71}}{0,0001}$

$\Leftrightarrow 9000 - \sqrt{71\ 000\ 000} < x < 9000 + \sqrt{71\ 000\ 000}$

Vì x lấy giá trị nguyên dương và $9000 - \sqrt{71\ 000\ 000} \approx 573,85$ *và* $9000 + \sqrt{71\ 000\ 000} \approx 17426,15$

Nên $573 < x < 17427$

c) xét hàm số: $L(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000$, $x \in (0;+\infty)$ và tìm x>0 để tại đó $L(x)$ đạt GTLN trên $(0;+\infty)$

Ta có: $L'(x) = -0,0002x + 1,8 = 0 \Leftrightarrow x = 9000$

BBT.

X	0		9 000		$+\infty$
L'(x)		$+$	0	$-$	
L(x)		$\nearrow$	7100	$\searrow$	

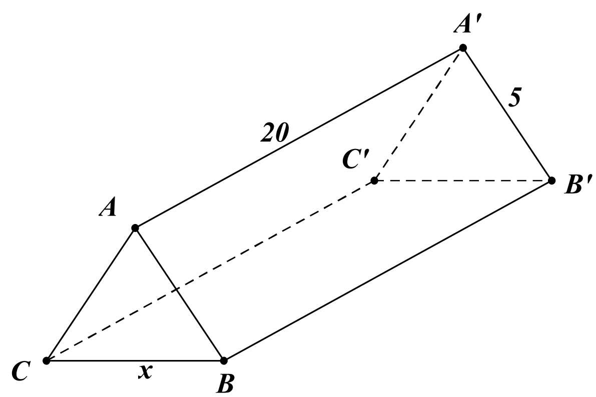
Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x) = L(9000) = 7100$

Vậy muốn lãi nhiều nhất thì phải in 9000 cuốn khi đó tiền lãi thu được là: 7100 vạn đồng $71\ 000\ 000$ (đồng).

Câu 48: Một hành lang giữa hai toàn nhà có hình dạng của hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên ABB'A' và ACC'A" là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 m, rộng 5 m, Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC.

a) Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x.

b) Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



Giải:

a) $V = 5x\sqrt{100-x^2}\left(m^3\right); 0 < x < 10$

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2}\,(m)$ và $\max\limits_{(0;10)} V = V\left(5\sqrt{2}\right) = 250\left(m^3\right)$

Câu 49: Cho hình vuông ABCD với cạnh có độ dài cạnh bằng 1 và cung $\overset{\frown}{AB}$ là một phần tư đường tròn tâm A, bán kính AB chứ trong hình vuông. Tiếp tuyến tại điểm M của cung $\overset{\frown}{BD}$ cắt đoạn thẳng CD tại điểm P và cắt đoạn thẳng BC tại điểm Q. Đặt $x = DP \text{ và } y = PQ$

a) Chứng minh rằng $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \text{ và } PQ = x + y$. Từ đó tính y theo x.

b) Tính PQ theo x và tìm x để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

a) $y = \dfrac{1-x}{1+x}; 0 < x < 1$

b) $PQ = \dfrac{x^2+1}{x+1}; 0 < x < 1$, đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x = \sqrt{2} - 1$

Câu 50: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7(km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đó từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.

Giải:

Đặt $x = BM; 0 \le x \le 7$. Khi đó $AM = \sqrt{x^2+25}, MC = 7 - x$.

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $T\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$ (giờ), $0\le x\le 7$

Hàm số T đạt GTNN tại điểm $x=2\sqrt{5}\simeq 4,472\left(km\right)$

Câu 51: Một hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu bán kính a.

a) Chứng minh rằng thể tích của hình chóp là: $V=\dfrac{4a^2x^2}{3\left(x-2a\right)}$, trong đó x là chiều cao của hình chóp.

b) Với giá trị nảo của x, hình chóp có thể tích nhỏ nhất.

Giải:

a) Mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của một cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo hình tròn tâm O, bán kính a nội tiếp tam giác SMN.

Có thể tính thể tích hình chóp theo x và $\alpha=\widehat{SNH}$. Sau đó sử dụng đẳng thức $x=a+SO$. Để tìm hệ thức giữa a,x và α.

Ta có: $HN=x\cot\alpha;MN=2x\cot a$. thể tích hình chóp là:

$$V=\frac{1}{3}MN^2.SH=\frac{4}{3}x^3\cot^2\alpha$$

Ta tính $\cot^2\alpha$ theo a và x.

Từ đẳng thức:

$$SH=OH+SO\Rightarrow x=a+\frac{a}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{x^2-2ax}{\left(x-a\right)^2};$$

$$\cot^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{a^2}{x\left(x-2a\right)}.$$ Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

b) Cần chú ý V xác định khi x>2a.

Câu 52: Một sợi dây kim loại dài $60\left(cm\right)$ được cắt thành hai đoạn, đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông, đoạn thứ hai uốn thành hình tròn. Phải cắt sợi dây như thế nào để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất.

Giải:

Độ dài cạnh hình vuông là $x=\dfrac{60}{\pi+4}\left(cm\right)$. Đoạn dây được uốn thành hình vuông là $\dfrac{240}{\pi+4}\approx 33,6\left(cm\right)$. Bán kính đường tròn là $r=\dfrac{30}{\pi+4}\left(cm\right)$.

Đoạn dây dây được uốn thành vòng tròn có độ dài là: $\dfrac{60}{\pi+4}\approx 26,4\left(cm\right)$

Ta có: $4x+2\pi r=60\Rightarrow x=\dfrac{30-\pi r}{2};0<r<\dfrac{30}{\pi}$

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn là $S=\pi r^2+x^2=\pi r^2+\frac{1}{4}(30-\pi r)^2$

Dễ thấy S đạt GTNN tại điểm $r=\frac{30}{\pi+4}$

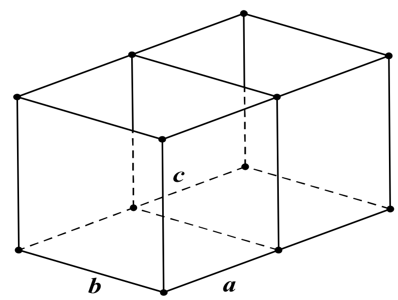
Câu 53: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn bằng nhau, không có nắp ở phía trên với thể tích 1,296m³. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước mỗi ngăn là a, b, c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, ,b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.

A. $a=3,6cm;\ b=0,6cm;\ c=0,6cm$.

B. $a=2,4cm;\ b=0,9cm;\ c=0,6cm$

C. $a=0,9cm;\ b=1,2cm;\ c=0,6cm$

D. $a=1,2cm;\ b=1,2cm;\ c=0,9cm$.



Giải:

$V=2(abc)=1,296$

Ta có:

$S=2(ac+bc)+ab+2ac+bc+ab=4ac+3bc+2ab$ (1)

Theo đề bài $V=2(abc)=1,296\Leftrightarrow abc=\frac{81}{125}$ (2)

Bài toán trở thành tìm a,b,c để $S_{\min}$ với ĐK (2)

Từ (1) Ta có:

$$S=\frac{4abc}{b}+\frac{3abc}{a}+\frac{2abc}{c}=4\frac{81}{125}.\frac{1}{b}+3.\frac{81}{125}.\frac{1}{a}+2.\frac{81}{125}.\frac{1}{c}=\frac{81}{125}\left(\frac{4}{b}+\frac{3}{a}+\frac{2}{c}\right)$$

$\geq\frac{81}{125}3\sqrt[3]{\frac{4.3.2}{abc}}\geq\frac{81}{125}\sqrt[3]{\frac{24}{\frac{81}{125}}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{4}{b}=\frac{3}{a}=\frac{2}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3b}{4}\\ c=\frac{b}{2}\end{cases}$

Thay vào (2): $\frac{3b}{4}.b.\frac{b}{2}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow\frac{3b^3}{8}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow b=1,2$. Vậy $a=0,9;c=0,6$. Chọn C.

Câu 54: Một bác nông dân được giao canh tác cây ăn quả trên một khu đất hình chữ nhật có chu vi không đổi là 200*m*, trong đó bác nông dân được tùy ý lựa chọn chiều dài và chiều rộng khu đất. Giả sử rằng sản lượng trái cây thu được tỷ lệ thuận với diện tích của khu đất. Bác nông dân đã nghĩ ra một phương án lựa chọn độ dài chiều dài: chiều rộng theo tỷ lệ *T* sao cho sản lượng trái cây thu được là cao nhất. Tìm tỷ lệ *T*.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1,5

Giải:

Chọn đáp án A

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là $x,y\ (x,y>0)$.

Ta có $2(x+y)=200\Rightarrow 100=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow S=xy\leq 50^2=2500$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=50\Rightarrow T=\frac{x}{y}=1$.

Dạng 2: Một số bài toán ứng dụng về chuyển động

Câu 55: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Giải.

a. Ta có $v(t)=S'(t)=10t$.

Vậy vận tốc thời điểm $t=6(s)$ là: $v(6)=S'(6)=10.6=60(m/s)$

b. Vậy để vận tốc của vật rơi do đạt $50(m/s)$ thì: $50=10t \Leftrightarrow t=5(s)$

Câu 56: Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(\text{s}))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

Giải:

a) Ta có: $a(t)=v'(t)=10t+7$. Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$

$$a(2)=v'(2)=10.2+2=27\left(m/s^2\right)$$

b) Vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s:

$$v(t)=12 \Leftrightarrow 5t^2+7t=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \ \ (\text{t/ m}) \\ t=-2,4(\text{loai}) \end{array}\right.$$

Với $t=1(s): a(1)=v'(1)=10+7=17\left(m/s^2\right)$

Câu 57: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3,t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ B. $t=3$ C. $t=2$ D. $t=1$

Giải:

Ta có: $v(t)=S'(t)=6t-3t^2$, $v'(t)=6-6t$. $v'(t)=0 \Leftrightarrow 6-6t=0 \Leftrightarrow t=1$

BBT

t	0		1		$+\infty$
$V'(t)$		+	0	−	
V(t)		↗	V_{max}	↘	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt GTLN khi t=1. Chọn D.

Câu 58: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\dfrac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. $15h$ B. $16h$ C. $17h$ D. $18h$

Giải:

Ta có:

$$h'(t) = 24 + 10t - t^2,\ h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 (\text{loai}) \\ t = 12 \ \ (\text{t/ m}) \end{array}\right.$$

BBT

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	$h_{\max}$	$\searrow$	

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày. Chọn A.

Câu 59: (đề minh họa Quốc gia 2017). Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10, (t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m B. 2m C. 10m D. 20m.

Giải:

Ta có: $v_0 = 10(m/s)$

Gia tốc của ô tô chuyển động chậm dần đều: $a = v'(t) = -5$.

Tại thời điểm ô tô dừng lại thì vận tốc bằng 0.

Ta có: $v_{(t)}^2 - v_0^2 = 2aS \Leftrightarrow 0 - 10^2 = 2(-5)S \Leftrightarrow S = 10(m)$

Vậy ô tô còn có thể đi được quãng đường là $10m$. **Chọn C.**

Lưu ý:Bài này còn có thể áp dụng tích phân để tìm quãng đường di chuyển của ô tô khi dừng lại.

Câu 60: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

A. 9km/h B. 6km/h C. 10km/h D. 12km/h

Giải:

Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng: $v - 6(km/h), (v \geq 6)$

Thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản: $t = \dfrac{300}{v-6}(h)$

Năng lượng tiêu thụ của con cá khi bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản:

$$E(v) = cv^2\frac{900}{v-6} - cv^3\frac{300}{(v-6)^2} = \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right).$$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{v}{v-6} = 0 \Leftrightarrow \text{v} = 9.$$

BBT

X	6		9		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
E(x)		↘	$E_{\min}$	↗	

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng $v = 9(km/h)$. Chọn. A

Nhận xét:

Đối với bài này có rất nhiều em tìm nhầm hàm $E(v) = c(v-6)^3\frac{300}{v-6}(J)$. Và sẽ tìm được chọn $v = 6km/h$ đó là Chọn sai hoàn toàn vì vận tốc v trong biểu thức $E(v) = cv^3t$, v là vận tốc thực của con cá khi di chuyển, còn t là thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản ứng với vận tốc của con cá đã trừ đi vận tốc dòng nước.

Câu 61: Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h B. 15km/h C. 20km/h D. 25km/h

Giải:

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\frac{1}{x}.480$ (ngàn đồng).

Khi vận tốc $v = 10km/h$ thì chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là:

$$\frac{1}{10}.30 = 3 \text{ (ngàn đồng)}.$$

Xét tại vận tốc $x(km/h)$, gọi y (ngàn đồng) chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x thì chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x, ta có: $y = kx^3$

Ta có: $3 = k10^3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10^3}$. Suy ra $y = \frac{3x^3}{1000}$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1 km đường là: $P(x) = \frac{480}{x} + \frac{3x^3}{1000}$.

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.

$$P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000},\ P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

$$P''(x) = \frac{960}{x^3} + \frac{18x}{1000},\ P''(20) = \frac{960}{20^3} + \frac{18.20}{1000} > 0$$

Suy ra $P(x)$ đạt GTNN tại $x = 20$

Vậy vận tốc của tàu $x = 20(km/h)$. Chọn C.

Câu 62: Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s B. 25m/s C. 10m/s D. 18m/s

Giải:

$v = S' = gt$ nên tại thời điểm $t = 5s$.

Vận tốc của vật là: $v = 9{,}8.5 = 49(m/s)$. Chọn A.

Câu 63: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ B. $6m/s^2$ C. $8m/s^2$ D. $12m/s^2$

Giải:

$a = S'' = 6\text{t} - 6$ nên tại thời điểm t=2s thì gia tốc của chất điểm là: $a = 6.2 - 6(m/s^2)$. Chọn B.

Câu 64: Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ B. $6m/s^2$ C. $24m/s^2$ D. $12m/s^2$

Giải:

$v = S' = 3t^2 + 6t - 9; a = S'' = 6t + 6$

Tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3(loai) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì gia tốc của chuyển động là: $a = 6.1 + 6 = 12(m/s^2)$. Chọn D.

Câu 65: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 100$, trong đó t tính bằng giây (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t = 1$ B. $t = 16$ C. $t = 5$ D. $t = 3$

Giải:

$$S' = t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2(l) \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Vậy chất điểm đạt GTNN tại t = 1s.

Chọn A.

Câu 66: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ B. $\dfrac{6800}{3}m$ C. $\dfrac{4300}{3}m$ D. $\dfrac{5800}{3}m$

Giải:

$$a(t)=3t+t^2,\ v'(t)=a(t);\quad S'(t)=v(t)$$

Theo đề ta có: vận tốc ban đầu là $10(m/s)$

$\Rightarrow v(t)=\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+10(m/s)$. $S(t)=\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{1}{12}t^4+10t(m)$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S(10)=\dfrac{4300}{3}(m)$. Chọn C.

Câu 67: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$, có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s B. 13m/s C. 11m/s. D. 12m/s.

Giải:

Vận tốc của vật sau 10 giây là $v=6+7=13(m/s)$. Chọn B

Câu 68: Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Giải

a) Ta có: $v(t)=S'(t)=40\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)'.cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)=40\pi cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

vậy: $v(4)=S'(4)=40\pi cos\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=40\pi\dfrac{1}{2}=20\pi(m/s)$

b) Ta có:

$$a(t)=v'(t)=-40\pi\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

Vậy: $a(6)=v'(6)=-40\pi^2\sin\left(6\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-20\sqrt{3}\pi^2\left(m/s^2\right)$.

Bài 8. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN MIỀN D

Cho hàm số $y = f\left(x,m\right)$, m là tham số, có tập xác định D.

- Hàm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow f' \ge 0, \forall x \in D$.
- Hàm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f' \le 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

1. Sử dụng GTLN, GTNN của hàm số trên tập D để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu.

Lí thuyết nhắc lại:

Cho bất phương trình:

$f(x,m) \ge 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f\left(x\right) \ge g\left(m\right), \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f\left(x\right) \ge g\left(m\right)$

Cho bất phương trình:

$f(x,m) \le 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f\left(x\right) \le g\left(m\right), \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f\left(x\right) \le g\left(m\right)$

Phương pháp: Để điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc từng khoảng xác định) của hàm số $y = f(x,m)$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.
- Bước 2: Tính y'. Để hàm số đồng biến $y' \ge 0, \forall x \in D$, (để hàm số nghịch biến $y' \le 0, \forall x \in D$) thì ta sử dụng lý thuyết nhắc lại phần trên.
- Bước 3: Kết luận giá trị của tham số.

Chú ý:

+ Phương pháp trên chỉ sử dụng được khi ta có thể tách được thành $f\left(x\right) và\ g\left(m\right)$ riêng biệt.

+ Nếu ta không thể tách được thì phải sử dụng dấu của tam thức bậc 2.

2. Sử dụng phương pháp tham thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số:

Lý thuyết nhắc lại:

1) $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

2) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

- $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3) Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g\left(x\right) = ax^2 + bx + c$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $g\left(x\right)$ luôn cùng dấu với a.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $g\left(x\right)$ luôn cùng dấu với a, trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì $g\left(x\right)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g\left(x\right)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g\left(x\right)$ cùng dấu với a.

4) So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0.

• $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ • $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ • $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

5) Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

- Tính y'.
- Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và ngịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)
- Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)
- Sử dụng định kí Vi-et đưa (2) thành phương trình theo m.
- Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

CÂU HỎI VẬN DỤNG

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m+1)x - 3m^2 + 2 \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \text{ ?}$$

A. $m \leq 2$. B. $m \leq -\frac{5}{2}$ C. $m \geq -\frac{5}{2}$ D. $m \leq 3$

Giải: TXĐ : $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 4x + (2x+1)$, $\Delta' = 2m + 5$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}$

Chọn B.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$$y = mx^3 - 3x^2 + (m-2)x - 3m + 2 \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \text{ ?}$$

A. $m \leq 2$ B. $m \leq 1$ C. $m \geq -1$ D. $m \leq -1$

Giải:

TXĐ : $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3mx^2 - 6x + (m-2)$

Hàm số nghịch biến trên R khi và chỉ khi $y' = 3mx^2 - 6x + (m-2) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $m = 0$, khi đó $y' = -6x - 2 \leq 0, x \in \mathbb{R}$

$y' = -6x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy m=0 không thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$y'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 9 - 3m(m-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -3m^2+6m+9\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le -1$$. Chọn D.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y=\dfrac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m\le 1$ hoặc $m\ge -1$.
B. $m<-1$ hoặc $m>1$.
C. $m\le 2$ hoặc $m\ge -1$.
D. $m\le 2$ hoặc $m\ge 1$.

Giải: TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y'>0,\forall x\ne -m \Leftrightarrow m^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right.$. Chọn B.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$$y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3} \text{ đồng biến trên } [2;+\infty)$$

A. $m\ge \dfrac{2}{3}$
B. $m\le 1$
C. $m\ge -1$
D. $m\le -1$

Giải: Ta có: $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$ thì

$y'\ge 0 \Leftrightarrow mx^2-2(m-1)x+3(m-2)\ge 0,\forall \in[2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow m(x^2-2x+3)+2x-6\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{6-2x}{x^2-2x+3},\forall \in[2;+\infty)$$

Đặt $f(x)=\dfrac{6-2x}{x^2-2x+3},\forall x\in[2;+\infty)$ ta tìm GTLN của hàm: $f(x),\forall x\in[2;+\infty)$

Ta có:

$$f'(x)=\frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2},\forall x\in[2;+\infty)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-2x+3)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6} \\ x=3-\sqrt{6}\,(loai) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(2)=\dfrac{2}{3}, f\left(3+\sqrt{6}\right)=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le m.$ Chọn A.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$$y=-x^3+3x^2+3mx-1 \text{ nghịch biến trên khoảng } (0;+\infty) \text{ ?}$$

A. $m \le 1$ B. $m \le -1$ C. $m \ge -1$ D. $m \le 0$

Giải:

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3m$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì :

$y' \le 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3m \le 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x \ge m, \forall x \in (0;+\infty)$

Đặt $f(x) = x^2 - 2x, \forall x \in (0;+\infty)$ Ta đi tìm GTNN của hàm $f(x), \forall x \in (0;+\infty)$

Ta có:

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Ta có: $f(0) = 0; f(1) = -1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Vậy để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ thì: $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) \ge m \Leftrightarrow m \le -1$.

Chọn B.

Câu 6: (Đề minh họa 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$. B. $m \le 0$ C. $1 \le m < 2$. D. $m \ge 2$.

Giải: Đặt $t = \tan x$, với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Hàm số đã cho trở thành tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng (0;1)

Ta có: $y'(t) = \dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$

Để hàm số đồng biến trong khoảng (0;1) thì:

$$\begin{cases} y'(t) > 0 \\ t \ne m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 2 \\ m \le 0 \end{array}\right. .$$ Chọn A.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y = x^3 - mx^2 - (2m^2 - 7m + 7)x + 2(m-1)(2m-3)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. $-1 \le m \le \dfrac{5}{2}$ B. $-1 < m \le \dfrac{5}{2}$ C. $-1 < m < \dfrac{5}{2}$ D. $-\dfrac{1}{2} < m \le \dfrac{5}{2}$

Giải: Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - (2m^2 - 7m + 7)$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ thì ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số luôn đồng biến trên R:

$\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 3(2m^2 - 7m + 7) \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 3 \le 0, (VL)$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn đồng biến trên R, TH2: Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$

$\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-3m+3>0,(\forall x\in\mathbb{R})$.

Giả sử $x_1,x_2,(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, để Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$x_1<x_2\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{S}{2}\le 2\\ (x_1-2)(x_2-2)\ge 0 \Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0,(1)\end{cases}$$

Theo định lí vi-et ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2m}{3}\\ x_1x_2=\dfrac{-2m^2+7m-7}{3}\end{cases} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{cases}m\le 6\\ \dfrac{-2m^2+7m-7}{3}-2\left(\dfrac{2m}{3}\right)+4\ge 0 \Leftrightarrow -2m^2+3m+5\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m\le 6\\ -1\le m\le \dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le\dfrac{5}{2}$$

Vậy với $-1\le m\le\dfrac{5}{2}$ thì hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$. Chọn A.

Câu 8. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)-mx+3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty,+\infty)$.

Đáp án C

Ta có: $y=\dfrac{x}{x^2+4}-m$

Để hàm số nghịch biến với mọi x => $y'\le 0\ \ \forall x$ => $Max(\dfrac{x}{x^2+4})\le m$

Dễ thấy $Max(\dfrac{x}{x^2+4})=\dfrac{1}{4}$ => $m\ge\dfrac{1}{4}$.

Bài 9. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Kiến thức cơ bản

Cho f(x) là hàm số xác định và liên tục trên D, thì:

$f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{x \in D} f(x)$

$f(x) \le g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \ge \min\limits_{x \in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{x \in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \le \max\limits_{x \in D} f(x)$

CÂU HỎI VẬN DỤNG

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2 \le 0$ có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m \le \dfrac{2}{3}$. B. $m \le -1$. C. $m \ge \dfrac{2}{3}$. D. $m \le 0$.

Giải: Bpt $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x) \le 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}+1}$,(1)

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow x^2-2x=t^2-2$.

Ta xác đinhk ĐK của t:

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ với $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$, ta đi tìm ĐK ràng buộc của t.

Ta có: $t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}, t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $1 \le t \le 2$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1;2]$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1;2]$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+2)^2}>0, \forall x \in [1;2]$.

Vậy hàm số f tăng trên [1;2].

Do đó, yêu cầu của bài toán trở thành tìm m để (1) có nghiệm $t \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m \le \max\limits_{t \in [1;2]} f(t) = f(2) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $m \le \dfrac{2}{3}$ thì pt có nghiệm. Chọn A.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$$ có nghiệm.

A. $m \le \sqrt{2}-1$. B. $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$. C. $m \ge 1$. D. $m \le 1$.

Giải: ĐK: $x \in [-1;1]$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Với $x \in [-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1;1]$.

Ta có: $t' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$, cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có $t(-1) = \sqrt{2}, t(0) = 0, t(1) = \sqrt{2}$

Vậy với $x \in [-1;1]$ thì $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$

Từ $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\dfrac{-t^2+t+2}{t+2} = m$ có nghiệm $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ với $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) = f(0) = 1,\ \min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) \le m \le \max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \le m \le 1$

Vậy với $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$ thảo yêu cầu bài toán. Chọn B.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}\ (1) \text{ có nghiệm.}$$

A. $m \le \sqrt{2}-1$. B. $\sqrt{2}-1 \le m \le 1$. C. $-1 < m \le \dfrac{1}{3}$. D. $m \le -1$.

Giải: ĐK xác định của phương trình : $x \ge 1$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}\ (2)$

Đặt $t = 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}, (t \ge 0)$. Vì $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}} < 1$ nên t<1.

Vậy với $x \ge 1$ thì $0 \le t < 1$

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow 3t^2 + m = 2t \Leftrightarrow -3t^2 + 2t = m, (3)$.

Bây giờ bài toán trở thành tìm m để (3) có nghiệm $t \in [0;1)$.

Xét hàm $f\left(t\right)=-3t^2+2t$ trên $\left[0;1\right)$. $f'\left(t\right)=-6t+2, f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow -6t+2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

BBT

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1

Vậy với $-1<m\le\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn C.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m\le 9$. B. $m\ge\dfrac{9}{2}$. C. $-1<m$. D. $m\le 7$.

Giải: Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1\ \left(1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge-\dfrac{1}{2} \\ 3x^2+4x-1=mx\ \ \left(2\right)\end{array}\right.\qquad\left(*\right)$

Nhận xét: $x=0$ không phải là nghiệm của (2). Do vậy, ta tiếp tục biến đổi:

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x^2+4x-1}{x}=m\ \ \left(3\right)\end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm m để (3) có 2 nghiệm thực phân biệt: $x\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{0\right\}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{0\right\}$. Ta có:

$f'\left(x\right)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0,\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\left\{0\right\}$

BBT

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với $m \geq \frac{9}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt. Chọn B.

Câu 5: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m, \left(m \in \mathbb{R}\right)$

A. $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

B. $2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 8$

C. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

D. $\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$

Giải: ĐK: $0 \leq x \leq 6$

Đặt vế trái của phương trình là $f\left(x\right), x \in \left[0;6\right]$.

Ta có:

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt[4]{\left(2x\right)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{\left(6-x\right)^3}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\left(2x\right)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x\right)^3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - -\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right), x \in \left(0;6\right)$$

Đặt: $u\left(x\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\left(2x\right)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x\right)^3}}\right), v(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - -\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right), x \in \left(0;6\right)$

Ta thấy $u\left(2\right) = v\left(2\right) = 0, x \in \left(0;6\right) \Rightarrow f'\left(2\right) = 0$. Hơn nữa $u\left(x\right), v\left(x\right)$ cùng dương trên khoảng (0;2) và cùng âm trên khoảng (2;6).

BBT

X	0		2		6
$f'\left(x\right)$	$\Vert$	+	0	−	$\Vert$
$f\left(x\right)$	$2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$	↗	$3\sqrt{2} + 6$	↘	$\sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$

Vậy với $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m \leq 3\sqrt{2} + 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn A.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $\mathrm{y = 2mx - \ 2m - 2028}$ cắt đồ thị hàm số $\mathrm{y = x^3 - 3x^2 - 9x - 2017}$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $\mathrm{AB = BC}$.

A. $-6 < \mathrm{m} < 1$ **B.** $\mathrm{m} < -6$ hoặc $\mathrm{m} > 1$ **C.** $\mathrm{m} \geq 1$ **D.** $\mathrm{m} > -6$

Đáp án D

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 2017 = 2mx - 2m - 2028 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - \left(9 + 2m\right)x + 2m + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2 - 2x - 2m - 11\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2m - 11 = 0\left(2\right) \end{array}\right.$$

2 đồ thị hàm số cắt nhau tại 3 điểm nếu (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 2m + 11 > 0 \Leftrightarrow m > -6$. Khi đó 2 nghiệm của phương trình là $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$ nên chắc chắn 3 điểm cắt nhau sẽ thỏa mãn $AB = BC$ (B là trung điểm của AC).

Bài 10. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in D$.

1) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

2) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $\left(a;b\right)\subset D$ và $x_0\in\left(a;b\right)$ sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

3) Nếu $f\left(x_0\right)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$

1) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

2) Nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0 .

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0, $f'\left(x_0\right)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

1) Nếu $f''\left(x_0\right)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0. 2) Nếu $f''\left(x_0\right)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

Kiến thức cần nhớ:

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$:

$$d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3) Diện tích tam giác ABC: $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right);\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

CÂU HỎI VẬN DỤNG

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ có cực đại, cực tiểu.

A. $(-3;-2)\cup(-2;1)$. B. $(-3;-2)$. C. $-1<m$. D. $(-2;1)$.

Giải: Ta có: $y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Khi đó y' là tam thức bậc hai có $\Delta'=-3(m^2+2m-3)$. Hàm số có có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m+2\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ m^2+2m-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ -3<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-3;-2)\cup(-2;1)$$

Vậy $m\in(-3;-2)\cup(-2;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$.

A. $m=\frac{2}{3}$. B. $m=5$. C. $-1<m$. D. $m=7$.

Giải: Ta có: $y'=2x^2-2mx-2(3m^2-1)=2(x^2-mx-3m^2+1)$,

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta=13m^2-4>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.(1)$

$x_1;x_2$ là các nghiệm của $y'=0$ nên theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$

Do đó: $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1\Leftrightarrow -3m^2+2m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (1) ta thấy chỉ có $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho: $|x_1-x_2|\geq 8$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq\frac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m\leq\frac{1-\sqrt{64}}{2} \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m\geq\frac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m\leq\frac{1-\sqrt{63}}{2} \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} m\geq\frac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m\leq\frac{1-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m\geq\frac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m\leq\frac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$.

Giải: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-2mx+m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khi và chỉ khi:

$\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right., \ (2)$

Ta có: $|x_1-x_2|\geq 8 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2\geq 64 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\geq 64, (1)$

Theo Đl vi-et Ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được: $(2m^2)-4m\geq 64 \Leftrightarrow 4m^2-4m-64\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m\leq \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right., (3)$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $\left[\begin{array}{l} m\geq \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m\leq \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán. Chọn D.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho: $x_1+2x_2=1$.

A. $m=\dfrac{2}{3}$ hoặc $m=2$. B. $m=3$. C. $m=-5$. D. $m=2$.

Giải: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y'=0$ cos2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -2m^2+4m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} (*)$

Theo đl viet và đề bài, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} & (1) \\ x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m} & (2) \\ x_1+2x_2=1 & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (3) ta có: $x_1=\dfrac{3m-4}{m}, x_2=\dfrac{2-m}{m}$

Thế vào (2) ta được: $\left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right)=\dfrac{3(m-2)}{m}\quad (m\neq 0)$

$\Leftrightarrow 3m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$ (thỏa (*).

Vậy giá trị cần tìm là: $m=\dfrac{2}{3}$ hoặc $m=2$. Chọn A.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m=2$. B. $m=\pm 2$ C. $m=-2$ D. $m=\pm 3$

Giải: Ta có: $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m), y'=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0.(1)$

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;3m^3);B(2m;-m^3)$

Ta có: $\overrightarrow{OA}(0;3m^3)\Rightarrow OA=3|m^3|.\qquad (2)$

Ta thấy $A\in Oy \Leftrightarrow OA\equiv Oy \Rightarrow d(B,OA)=d(B,Oy)=2|m|.\quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.d(B,OA)=3m^4$

Do đó: $S_{OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4 \Leftrightarrow 48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ thỏa mãn (1)

Vậy $m=\pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn B.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $m=\sqrt[5]{16}$. B. $m=\sqrt[5]{17}$. C. $m=\sqrt[5]{18}$. D. $m=\sqrt[5]{19}$.

Giải: Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$

$y'=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình y'=0 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương m>0

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số:

$$A(0;m^4+2m);B(\sqrt{m};m^4-m^2+2m);C(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m)$$

Gọi $(0;m^4-m^2+2m)$ là trung điểm BC.

$AH=\sqrt{(-m^2)^2}=m^2, BC=\sqrt{(2\sqrt{m})^2}=2\sqrt{m}$

Vì ba điểm cực trị luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh A, nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$

vậy với $m = \sqrt[5]{16}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \pm\frac{1}{3}$. C. $m = \pm\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Giải: Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3\left(m^2 - 1\right) = -3\left(x^2 - 2x - m^2 + 1\right)$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó: $y' = 0$ có các nghiệm là: $x = 1 \pm m \Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1 - m; -2 - 2m^3\right)$ và $B\left(1 + m; -2 + 2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1 - m; -2 - 2m^3\right) \Rightarrow OA^2 = \left(1 - m\right)^2 + 4\left(1 + m^3\right)^2$;

$\overrightarrow{OB}\left(1 + m; -2 + 2m^3\right) \Rightarrow OB^2 = \left(1 + m\right)^2 + 4\left(1 - m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2$

$$\Leftrightarrow \left(1 - m\right)^2 + 4\left(1 + m^3\right)^2 = \left(1 + m\right)^2 + 4\left(1 - m^3\right)^2 \Leftrightarrow -4m + 16m^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m = \pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn C.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có cực đại, cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = -3x^2 + 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình y'=0 có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $m \neq 0$.

Hai điểm cực trị là $A\left(0; -3m - 1\right); B\left(2m; 4m^3 - 3m - 1\right)$

Trung điểm I của đoạn thawngt Ab là $I\left(m; 2m^3 - 3m - 1\right)$

Vectơ $\overrightarrow{AB} = \left(2m; 4m^3\right)$; một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = \left(8; -1\right)$.

Hai điểm cực đại, cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8\left(2m^3 - 3m - 1\right) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2\left(t/m\right)$. Chọn C.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \left(m+1\right)x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m = 0$. B. $-1 \le m < 0$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.

Giải:

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. khi đó: $y = x^2 + \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực tiểu $\left(x = 0\right)$ mà không có cực đại $\Rightarrow m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

TH2: $m = 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm bậc 4 có

$$y' = 4\left(m+1\right)x^3 - 2mx = 4\left(m+1\right)x\left[x^2 - \frac{m}{2\left(m+1\right)}\right]$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi y'=0 có đúng 1 nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này.

Nghĩa là: $\begin{cases} 4\left(m+1\right) > 0 \\ \dfrac{m}{2\left(m+1\right)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$

Kết hợp với những giá trị m tìm được, ta có: $-1 \le m < 0$. Chọn B.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hia điểm cực trị càn lại.

A. $m = 0$. B. $m = 2 - \sqrt{8}$. C. $m = 2$. D. $m = 2 \pm \sqrt{8}$.

Giải: Ta có: $y' = 4x^3 - 4\left(m+1\right)x = 4x\left(x^2 - \left(m+1\right)\right)$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi y'=0 có 3 nghiệm phân biệt.

$h\left(x\right) = x^2 - \left(m+1\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. (*).

Khi đó, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m+1} \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(0; m\right) \\ B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right) \\ C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right) \end{cases}$

Vì vai trò của B và C là tương tự nhau nên ta chọn

$B\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right), C\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$

Ta có: $\overrightarrow{OA} = \left(0; m\right) \Rightarrow OA = \left|m\right|; \overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1}; 0\right) \Rightarrow BC = 2\sqrt{m+1}$

Do đó: $OA = BC \Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0, (\Delta' = 8)$

$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{8}$ (thỏa mãn (*)). Vậy $m = 2 \pm \sqrt{8}$ thỏa ycbt. Chọn D.

Câu 11: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Giải: Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x\underbrace{\left[x^2 - (m+1)\right]}_{t(x)}$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi đó phương trình $t(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 nên:

$m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1.$ (*)

Khi đó, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m+1} \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases}$

Suy ra các điểm cực trị của đồ thi hàm số là $A(0; m^2), B(-\sqrt{m+1}; -2m-1), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Ta thấy $A \in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A. Do đó tam giác cỉ có thể vuông tại A.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2\right), \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m+1}; -(m+1)^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (m+1)^4 - (m+1)$$

Ta giác ABC vuông kh và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 = 0 \\ m+1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với ĐK (*) ta có m=0. Chọn A.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{3}$. C. $m = \frac{1}{4}$. D. $m = \frac{1}{5}$.

Giải:

$$y' = x^3 - 2(3m+1)x = x\left(x^2 - (6m+2)\right),\ y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - (6m+2)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 6m + 2 (*) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y’=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $6m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số $A\left(0;2m+2\right)$; $B\left(\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$;

$C\left(-\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$.

Theo công thức trọng tâm ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_O \\ y_A+y_B+y_C=3y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0\left(t/\mathrm{m}\right) \\ -18m^2-6m+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{3} \\ m=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Với m=1/3 thỏa ycbt. Chọn B.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m=-1$. C. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m=1$.

Giải:

$$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right),\ y'=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\left(*\right) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y’=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $m>0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A\left(0;1\right), B\left(\sqrt{m};3m^2+1\right), C\left(-\sqrt{m};3m^2+1\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m};3m^2\right), \overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};3m^2\right)$

Vì 3 điểm cực trị của hàm trùng phương trên luôn tạo thành 1 tam giác cân tại A, nên tam giác ABC vuông tại A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-m+9m^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} \end{array}\right.$. So với ĐK suy ra $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ thỏa ycbt.

Chọn C.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-m$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120^0

A. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ B. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ C. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ D. $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

Giải:

$$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right),\ y'=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\left(*\right) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y’=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $m>0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A\left(0;m^2-m\right), B\left(\sqrt{m};-m\right), C\left(-\sqrt{m};-m\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m}; -m^2\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m}; -m^2\right)$

Theo đề bài ta có:

$$cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-m+m^4}{\sqrt{m^4+m}.\sqrt{m^4+m}} = \frac{m^3-1}{m^3+1} = cos120^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^3-1}{m^3+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3m^3 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Vậy với $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa ycbt.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + +2m + m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = \sqrt[3]{3}$. B. $m = \sqrt[3]{9}$ C. $m = \sqrt[3]{13}$ D. $m = \sqrt[3]{14}$

Giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right), \quad y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m(*) \end{array}\right.$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow$ pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m^4 + 2m \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - m^2 + 2m \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có một điểm cực đại là $A\left(0; m^4 + 2m\right)$ và hai điểm cực tiểu là

$B\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right), C\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right)$

Các điểm A, B, C lập thành 1 tam giac đều $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m\left(m^3 - 3\right) = 0$. Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ (m>0). Chọn A.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C) và $m = m_0$ là giá trị thỏa mãn A, B, C đều thuộc các trục tọa độ, khi đó m_0 gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. -1. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 5.

Đáp án A.

$$y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 + m + 2 \to y' = 4a^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó, hàm số có 3 điểm cực trị là $A\left(0; m^2 + m + 2\right); B\left(-\sqrt{m+1}; 1-m\right); C\left(\sqrt{m+1}; 1-m\right)$

$A \in Oy \to B; C \in Ox \to 1 - m = 0 \to m = 1.$

Bài 11. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HAI HÀM SỐ GIAO NHAU THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

Để biện luận theo *m* về số giao điểm của hai đồ thị hàm số và thỏa mãn các điều kiện về tính chất hình học phẳng *Oxy* thì ta làm các bước sau:

Bước 1: TXĐ:

Bước 2: Phương trình hoành độ giao điểm và đưa về dạng: $f(x,m)=g(x,m)\Leftrightarrow F(x,m)=0$

Sử dụng biệt thức Δ, hoặc đưa về phương trình tích để biện luận số giao điểm của hai hàm số.

Bước 3: Dựa theo yêu cầu của đề bài mà ta sử dụng các công thức biến đổi của hình học phẳng như: vectơ, tích vô hướng, khoảng cách, hình chiếu, điểm đối xứng,…

Bước 4: Giải và kết luận giá trị của tham số *m*.

CÂU HỎI VẬN DỤNG

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{m-x}{x+2}\left(H_m\right)$ và đường thẳng $d: 2x+2y-1=0$ giao nhau tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\dfrac{3}{8}$.

A. $m=3$. B. $m=\dfrac{1}{2}$. C. $m=2$. D. $m=1$.

Giải:

Hoành độ giao điểm A, B của d và $\left(H_m\right)$ là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{-x+m}{x+2}=-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x+2(m-1)=0, x\neq -2, \quad (1)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác -2:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=17-16m>0\\ 2.(-2)^2-2+2(m-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{17}{16}\\ m\neq -2\end{cases}$$

Ta có:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}.\sqrt{(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2}.\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến d là $h=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}.h.AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn)

Chọn A.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{2x}{x-2}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $m=4$ và $\sqrt{30}$. B. $m=\frac{1}{2}$ và $\sqrt{31}$. C. $m=0$ và $\sqrt{32}$. D. $m=-1$ và $\sqrt{33}$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x}{x-2}=x+m \Leftrightarrow x^2+(m-4)x-2m=0, \quad (1)$

Để d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=m^2+16 \\ -4\neq 0 \end{cases}, \forall m \quad (2)$

Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1)

Thei viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=4-m \\ x_1.x_2=-2m \end{cases} \quad (3) \quad y_1=x_1+m,\ y_2=x_2+m$

Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$.

A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$ khi và chỉ khi $(x_1-2)(x_2-2)<0$ hay $x_1.x_2-2(x_1+x_2)+4<0, \quad (4)$

Tahy (3) vào (4) ta được $-4<0$ luôn đúng (5). Mặt khác ta lại có

$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2} \quad (6)$

Tahy (3) vào (6) ta được: $AB=\sqrt{2m^2+32}\geq\sqrt{32}$ vậy $AB=\sqrt{32}$ nhỏ nhất khi $m=0 \quad (7)$

Từ (1), (5), (7) ta có $m=0$ và $AB=\sqrt{32}$ thỏa mãn. Chọn C.

Nhận xét: Đối với các bài khoảng cách như bài 1 và 2, thì có cách nào tính khoảng cách AB nhanh nhất không? Chúng ta khẳng định là có. Thật vậy, ta có bài tổng quát: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $y=mx+n, (m\neq 0)$

Gọi A, B là hai điểm mà đường thẳng cắt hàm số. Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là 2 giao điểm, khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình: $f(x)=mx+n, (1)$

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(m(x_1-x_2))^2}=\sqrt{(1+m^2)(x_1-x_2)^2}$$

$$=\sqrt{(1+m)^2\left((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right)}=\frac{1}{m}\sqrt{(1+m^2)\Delta}$$

Với Δ được tính từ phương trình (1).

+Nếu AB nhỏ nhất thì Δ nhỏ nhất.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* thuộc 2 nhánh khác nhau . Xác định *m* để đoạn *AB* có độ dài ngắn nhất.

A. $m=5$. B. $m=-3$. C. $m=0$. D. $m=-1$.

Giải:

Để đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x-1}=2x+m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $x_1<1<x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-1)(2x+m) \\ x\neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m-3)x-m-1=0(*) \\ x\neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2+16>0, \forall m \\ f(1)=2+(m-3)-m-1=-2<0 \end{cases}$

Vậy với mọi giá trị m thì đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau.

Gọi $A(x_1;2x_1+m), B(x_2;2x_2+m)$ là giao điểm giữa d và (H).

(x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình (*))

Ta có:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(2(x_2-x_1))^2}=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5((x_2+x_1)^2-4x_1x_2)}$$

Theo viet ta có: $AB=\frac{1}{2}\sqrt{5\left[(m+1)^2+16\right]}\geq 2\sqrt{5}$, $AB_{min}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow m=-1$

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Vậy ta có thể tính theo công thức tính nhanh ở trên:

$$AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1+2^2)\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5((m+1)^2+16)}\to \min$$

Khi $\Delta\to\min$. vậy $m=-1$. Chọn D.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho $AB=\sqrt{5}$.

A. $m=4$. B. $m=3$. C. $m=0$. D. $\left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2+mx+m+2=0,(x\neq -1),\quad (1)$

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m-16>0(2) \\ x\neq -1 \end{cases}$$

Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ là giao điểm giữa d và (H). Ta có x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

$$AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1+2^2)\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5(m^2-8m-16)}=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow m^2-8m-20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Thỏa mãn (2). Chọn D.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của a và b sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}(C)$ và đường thẳng $d:y=ax+b$ giao nhau tại hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta:x-2y+3=0$.

A. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \end{cases}$

Giải:

Phương trình của Δ được viết lại dưới dạng $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

Để giao điểm đối xứng qua Δ thì $\Delta\perp d\Leftrightarrow a.\dfrac{1}{2}=-1\Leftrightarrow a=-2$.

Suy ra đường thẳng $d:y=-2x+b$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C):

$$\frac{x-1}{x+1}=-2x+b\Leftrightarrow 2x^2-(b-3)x-(b+1)=0.\quad (1)$$

Để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow b^2+2b+17>0\Rightarrow \forall b\in\mathbb{R}$

Goi I là trung điểm của AB, ta có: $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{b-3}{4} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{b+3}{2} \end{cases}$

Vì A, B đối xứng nhau qua Δ nên trung điểm I thuộc vào đường thẳng Δ, ta có:

$$x_I-2y_I+3=0\Leftrightarrow \frac{b-3}{4}-(b+3)+3=0\Leftrightarrow b=-1.$$

Vậy $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ thỏa ycbt. Chọn A.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y=mx+3$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. (O là gốc tọa độ)

A. $m=3\pm\sqrt{5}$. B. $m=3-\sqrt{5}$. C. $m=3+\sqrt{5}$. D. $m=2\pm\sqrt{5}$.

Giải:

Pt hoành độ gia điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1}=mx+3,(x\neq 1)\Leftrightarrow mx^2-(m-1)x-4=0,(1)$

(d) cắt đồ thị hàm số (C) tại A, B khi và chỉ khi pt (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, nên:

$$\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-1}=mx+3,(x\neq 1)\Leftrightarrow mx^2-(m-1)x-4=0,(1)\\ m.1^2-(m-1).1-4\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta>0\\ g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}m<-7-4\sqrt{3}\\ m>-7+4\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_A.x_B+(mx_A+3)(mx_B+3)=0$

$$\Leftrightarrow(m^2+1)(x_A.x_B)+3m(x_A+x_B)+9=0,(2)$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=\dfrac{m-1}{m}\\ x_A.x_B=-\dfrac{4}{m}\end{cases},(3)$

Thay (3) vào (2) ta được: $m^2-6m+4=0\Leftrightarrow m=3\pm\sqrt{5}$

Vậy với $m=3\pm\sqrt{5}$. thỏa mãn ycbt. Chọn A.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2(C)$ và đường thẳng $\Delta: y=-x+2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=3\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=2\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=3\end{array}\right.$.

Giải:

Pt hoành độ giao điểm của đồ thị với Δ là $x^3+2mx^2+3(m-1)+2=-x+2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=2\\ x^2+2mx+3m-2=0\quad(1)\end{cases}$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2)$, B, C thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0, khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\ 3m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<1\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Gọi $B(x_1;y_1)$ và $C(x_2;y_2)$, trong đó x_1,x_2 là nghiệm của (1);

$y_1=-x_1+2$ và $y_2=-x_2+2$

Ta có: $h=d(M;(\Delta))=\dfrac{|3+1-2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow BC=\dfrac{2S_{MBC}}{h}=\dfrac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$

Mà $BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]=8(m^2-3m+2)$

Suy ra $8(m^2-3m+2)=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=3\end{array}\right.$ thỏa ycbt. Chọn A.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\dfrac{2}{3}$ (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>4\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>2\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>1\end{array}\right.$.

Giải:

Pt hoành độ giao điểm: $\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\dfrac{2}{3}=0\Leftrightarrow x^3-3mx^2-3x+3m+2=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[x^2+(1-3m)x-3m-2\right]=0\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+(1-3m)x-3m-2=0(2)\end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt thì pt (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases}\Delta=(1-3m)^2+4(3m+2)>0\\ g(1)=-6m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m^2+2m+3>0,\forall m\\ m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0\ (3)$$

Giả sử $x_3=1,x_1,x_2$ là nghiệm của (2). Ta có: $x_1+x_2=3m-1;x_1x_2=-3m-2$.

Khi đó: $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1>15$

$$\Leftrightarrow(3m-1)^2+2(3m+2)-14>0\Leftrightarrow m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.(4)$$

Từ (3) và (4) ta có giá trị cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.$. Chọn B.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m = 11$. B. $m = 10$. C. $m = 9$. D. $m = 8$.

Giải:

Pt hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 (*)$

Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ thì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của pt(*)

Khi đó: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \ (1)$

Ta có:

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2 \quad (2)$

Thế (2) vào (1) ta được $x_2 = 1$, thay vào pt (*) ta được: $m = 11$.

Với $m = 11: (*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 11) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$. Vậy m=11 thỏa ycbt. Chọn A.

Câu 10: Cho hàm số $y = ax^3 - x^2 + bx - 1$ với a, b là các số thực, $a \neq 0, a \neq b$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt sao cho hoành độ giao điểm đều là số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b-a)}$.

A. $15\sqrt{3}$ **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** $11\sqrt{6}$ **D.** Không tồn tại

Đáp án D. Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{1}{a} \end{cases} <=> \begin{cases} \dfrac{b}{a} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}} \geq 9 \\ \dfrac{1}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}} \end{cases}$

$<=> \dfrac{1}{a^3} \geq 27.\dfrac{1}{a} => \dfrac{1}{a^2} \geq 27 <=> 0 < a \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$$P = \frac{5a^2 - 3a^2.\dfrac{b}{a} + 2}{a^3(\dfrac{b}{a} - 1)} \leq \frac{5a^2 - 27a^2 + 2}{a^3(9-1)} = \frac{-22a^2 + 2}{8a^3} = \frac{-11}{4}.\frac{1}{a} + \frac{1}{4}.\frac{1}{a^3}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{a} => t \geq 3\sqrt{3} => P \leq f(\text{t}) = \dfrac{-11}{4}t + \dfrac{1}{4}t^3$

Khảo sát hàm trên ta không tìm được P max => Đáp án D.

Bài 12. TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$

Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ biết Δ có hệ số góc k cho trước

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$

Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k \quad (1)$

Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = kx + m$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$$

Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$

+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b\,(a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$.

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0), y_0' = f'(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0) \quad (2)$

Giải phương trình (2), tìm được x_0 . từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A\left(x_A;y_A\right)$ và có hệ số góc $k: y-y_A=k\left(x-x_A\right)$

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_A\right)+y_A \\ f'\left(x\right)=k \end{cases} (*)$$

Giải hệ (*), tìm được *x* (suy ra *k*). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Bài toán 4: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1,2,3,… tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=f(x)$.

Giả sử $d: ax+by+c=0. M\left(x_M;y_M\right)\in d$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (1) \\ f'\left(x\right)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f\left(x\right)=\left(x-x_M\right).f'\left(x\right)+y_M \quad \left(C\right)$

+ Số tiếp tuyến của $\left(C\right)$ vẽ từ M = số nghiệm của x của (C).

Bài toán 5: Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị $\left(C\right): f=f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (1) \\ f'\left(x\right)=k & (2) \end{cases}$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f\left(x\right)=\left(x-x_M\right).f'\left(x\right)+y_M \quad \left(C\right)$

+ Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'\left(x_1\right).f'\left(x_2\right)=-1$.

Từ đó ta tìm được M.

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$$\begin{cases} \text{(C) có 2 nghiệm phân biệt } x_1,x_2 \\ f\left(x_1\right).f\left(x_2\right)<0 \end{cases}$$

Bài toán 6: Tìm giá trị tham số mà tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các tính chất hình học Oxy ta sử dụng cách viết phương trình tiếp tuyến của các dạng trên

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & (1) \\ f'\left(x\right)=k & (2) \end{cases}$

Sử dụng công thức cơ bản của hình học Oxy về công thức khoảng cách, độ dài, vectơ,…

CÂU HỎI ÁP DỤNG

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m^2 + 2m - 5 \,(C)$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ góc α, biết $cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

A. $m \le -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{2}$.

B. $m \le -1$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{3}$.

C. $m \le -\dfrac{1}{3}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{4}$.

D. $m \le -\dfrac{1}{5}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{3}$.

Giải: $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến $y = kx + b$. Suy ra tiếp tuyến có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (k;-1)$, đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (1;1)$

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{26}} = \dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{3}{2} \\ k_2 = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Để hàm số (C) có tiếp tuyến thỏa mãn ycbt thì ít nhất một trong hai phương trình: $y' = k_1 \;(1)$ hoặc $y' = k_2 \;(2)$ có nghiệm thực x.

Nghĩa là: $\left[\begin{array}{l} 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{3}{2} \\ 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1' \ge 0 \\ \Delta_2' \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2 - 2m - 1 \ge 0 \\ 4m^2 - m - 3 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{1}{4}; m \ge \dfrac{1}{2} \\ m \le -\dfrac{3}{4}; m \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{4} \text{hoặc } m \ge \dfrac{1}{2}$$

Vậy với $m \le -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m \ge \dfrac{1}{2}$. thỏa ycbt. Chọn A.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = -3$

D. $m = -4$

Giải: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \;\; (1) \\ x \ne 1 \end{cases}$$

Đề hàm số (C) và d giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta = (m-3)^2 + 8(m+1) = (m+1)^1 + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ g(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số (C) và d luôn luôn giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $x_1, x_2\ (x_1 \neq x_2)$ lần lượt là hoành độ của A và B thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-et: $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(3-m)(*)$, tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 tại A, B của hàm số (C) có hệ số góc lần lượt là: $k_1 = y'(x_1) = \frac{-2}{(x_1-1)^2}$ $và$ $k_2 = y'(x_2) = \frac{-2}{(x_2-1)^2}$

Theo đề bài: $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \Leftrightarrow -\frac{2}{(x_1-1)^2} = -\frac{2}{(x_2-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - 1 = x_2 - 1 \\ x_1 - 1 = -x_2 + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2\ (loai) \\ x_1 + x_2 = 2,\quad (2) \end{array}\right.$$

Thay (*) vào (2) ta được: $\frac{1}{2}(3-m) = 2 \Leftrightarrow m = -1$

Vậy $m = -1$ thỏa ycbt. Chọn A.

Câu 3: Cho điểm $A(0;m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases} -2 < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \frac{-2}{3} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \frac{-2}{5} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \frac{-2}{7} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$

Giải: Phương trình tiếp tuyến qua $A(0;m)$, có dạng: $y = kx + m, (1)$

ĐK có 2 tiếp tuyến đi qua A: $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = kx + m & (2) \\ \frac{-3}{(x-1)^2} = k & (3) \end{cases}$ có hai nghiệm $x \neq 1$.

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được: $(m-1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2 = 0 \quad (4)$

Để (4) có 2 nghiệm $x \neq 1$ là: $\begin{cases} m \neq 1 \\ f(1) = -3 \neq 0 \\ \Delta' = 3m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -2 \end{cases} (*)$

Gọi hoành độ tiếp điểm $x_1; x_2$ là nghiệm của (4), tung độ tiếp điểm là

$$y_1 = \frac{x_1 + 2}{x_1 - 1}, y_2 = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1}$$

Để hai tiếp điểm nằm khác phía trục Ox là: $y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2 - (x_1+x_2)+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9m+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

So với điều kiện (*), vậy $\begin{cases} -\frac{2}{3} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ thỏa ycbt. Chọn B.

Câu 4: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x+2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = -4x$.

A. $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

B. $M\left(2;\frac{1}{5}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(3;\frac{1}{4}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

D. $M\left(5;\frac{1}{3}\right), M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Giải: Ta có: $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$. Gọi $M\left(a;\frac{a-1}{2a+2}\right) \in (C), (a \neq -1)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M, ta có phương trình Δ :

$$\Delta: y = f'(a)(x-a) + \frac{a-1}{2a+2} \Rightarrow y = \frac{1}{(a+1)^2}(x-a) + \frac{a-1}{2(a+1)}$$

Gọi $A = Ox \cap \Delta \Rightarrow A\left(-\frac{a^2-2a-1}{2};0\right)$

$B = Oy \cap \Delta \Rightarrow B\left(0;\frac{a^2-2a-1}{2(a+1)^2}\right)$.

Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là: $G\left(-\frac{a^2-2a-1}{6};\frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}\right)$

Do $G \in d$ nên: $-4.\frac{a^2-2a-1}{6} + \frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(a+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 = \frac{1}{2} \\ a+1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$ (Vì A, B $\neq 0$ nên $a^2 - 2a - 1 \neq 0$).

Với $a=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$; với $a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. Chọn A.

Câu 5: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4;\dfrac{5}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$

B. $M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ *và* $M(3;3)$

C. $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$

D. $M\left(5;\dfrac{7}{3}\right)$ *và* $M(3;3)$

Giải: Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2, y'(a)=\dfrac{-1}{(a-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $\Delta: y=\dfrac{-1}{(a-2)^2}(x-a)+\dfrac{2a-3}{a-2}$

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là: $A\left(2;\dfrac{2a-2}{a-2}\right)$; $B(2a-2;2)$

Ta thấy $\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+2a-2}{2}=a=x_M\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2a-3}{a-2}=y_M\end{cases}$, Suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác $I(2;2)$ và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(a-2)^2+\left(\frac{2a-3}{a-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^2=\dfrac{1}{(a-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=3\end{array}\right.$

Do đó hai điểm M cần tìm là: $M(1;1)$ *và* $M(3;3)$. Chọn C.

Câu 6: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}(C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M(0;-1), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

C. $M(2;1), M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

D. $M(0;-1), M(2;1)$

Giải: Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-1}{a+1}\right)\in(C), a\neq -1$, thì tiếp tuyến tại M với (C) có phương trình:

$y=\dfrac{3}{(a+1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a+1} \Leftrightarrow 3(x-a)-(a+1)^2(y-2)-3(a+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là:

$$d=\frac{|3(-1-a)-3(a+1)|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=\frac{6|a+1|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $\dfrac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, Vậy $d\leq\sqrt{6}$

Khoảng cách lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi:

$\dfrac{9}{(a+1)^2}+(a+1)^2 \Leftrightarrow (a+1)^2=3 \Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$. Chọn A.

Câu 7: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M(3;3), M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

B. $M(3;3), M\left(4;\dfrac{5}{2}\right)$

C. $M\left(6;\dfrac{9}{4}\right), M(1;1)$

D. $M(3;3), M(1;1)$.

Giải: Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

Giả sử $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-2}\right)\in(C), a\neq 2$. Ta có: $y'(a)=-\dfrac{1}{(a-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $\Delta: y=-\dfrac{1}{(x-2)^2}(x-a)+\dfrac{2a-3}{a-2}$

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\dfrac{2}{a-2}\right)$

Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2a-2;2)$

Ta có: $AB^2 = 4\left[\left(a-2\right)^2 + \dfrac{1}{\left(a-2\right)^2}\right] \geq 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $\left(a-2\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=1 \\ a-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M\left(3;3\right), M\left(1;1\right)$.

Chọn D.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1\left(C\right)$, đường thẳng $d: y = mx + m + 3$ giao nhau tại $A\left(-1;3\right), B, C$ và tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3 - \left(m+3\right)x - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2 - x - m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=3 \\ x^2 - x - m - 2 = 0\left(*\right) \end{array}\right.$

Để hàm số (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1, nên:

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f\left(-1\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Giả sử $x_B; x_C$ là nghiệm của (*), hệ số góc của tiếp tuyến: $k_B = 3x_B^2 - 3; k_C = 3x_C^2 - 3$

Theo giả thiết: $k_B.k_C = -1 \Leftrightarrow \left(3x_B^2 - 3\right)\left(3x_C^2 - 3\right) = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$. Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ thỏa ycbt.

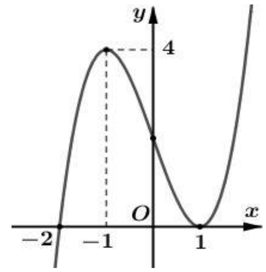
Chọn A.

Bài 13. MỘT SỐ CÂU HỎI VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO (PHẦN 1)

Phần 1. Tính đơn điệu của hàm số

Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai ?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy:

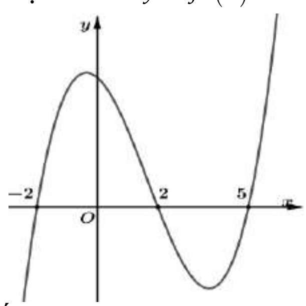
● $f'(x)>0$ khi $\left[\begin{array}{l}-2<x<1\\ x>1\end{array}\right. \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$, $(1;+\infty)$.

Suy ra A đúng, B đúng.

● $f'(x)<0$ khi $x<-2 \longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Suy ra D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ, ta **chọn C.**

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(0;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<2\\ x>5\end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=-2f'(3-2x)$.

Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-2x<2\\ 3-2x>5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}\\ x<-1\end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3-2x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l}3-2x=-2\\ 3-2x=2\\ 3-2x=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\\ x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

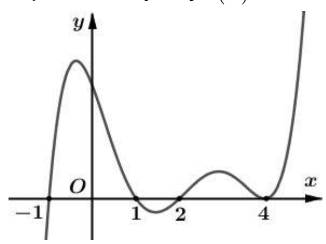
x	$-\infty$		-1		$0,5$		$2,5$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ ta chọn $x=0\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, suy ra $3-2x=3$ $\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(3-2x)=f'(3)<0$. Khi đó $g'(0)=-f'(3)>0$.

Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<2\end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=-2f'(1-2x)$.

Xét $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(1-2x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x<-1\\1<1-2x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\-\frac{1}{2}<x<0\end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$. **Chọn D.**

Cách 2. Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow-2f'(1-2x)=0\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}1-2x=-1\\1-2x=1\\1-2x=2\\1-2x=4\,(\text{nghiem kep})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

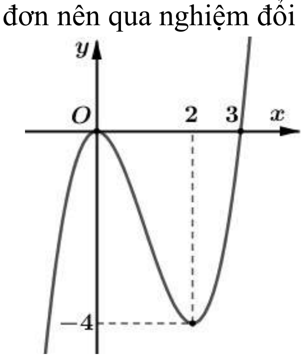
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,5$		$-0,5$		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=2\in(1;+\infty)$, suy ra $1-2x=-3$ $\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(1-2x)=f'(-3)<0$. Khi đó $g'(2)=-2f'(-3)>0$.

Nhận thấy các nghiệm $x=-\frac{1}{2};x=0$ và $x=1$ của $g'(x)$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu; nghiệm $x=-\frac{3}{2}$ là nghiệm kép nên qua nghiệm không đổi dấu.



Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(2+e^x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

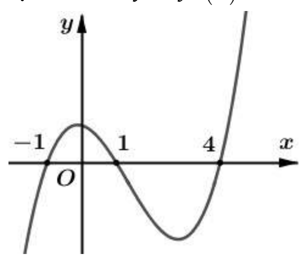
Xét $g'(x)=e^x.f'\left(2+e^x\right)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(2+e^x\right)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} 2+e^x=0 \\ 2+e^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=2^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=-2f'(3-2x).2^{f(3-2x)}.\ln 2$.

Xét $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x<-1 \\ 1<3-2x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ -\dfrac{1}{2}<x<1 \end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$, $(2;+\infty)$. **Chọn B.**

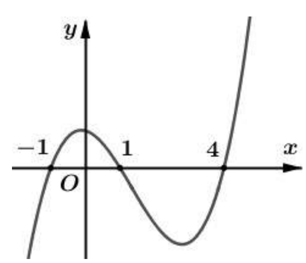
Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3-2x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} 3-2x=-1 \\ 3-2x=4 \\ 3-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-0,5$		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(4;7)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>4 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$.

● Với $x>3$ khi đó $g(x)=f(x-3) \longrightarrow g'(x)=f'(x-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x-3<1 \\ x-3>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x>7 \end{array}\right.$

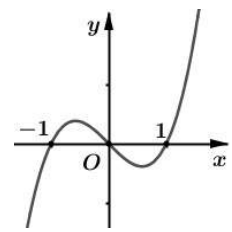
$\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3;4)$, $(7;+\infty)$.

● Với $x<3$ khi đó $g(x)=f(3-x) \longrightarrow g'(x)=-f'(3-x)>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x<-1 \\ 1<3-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \text{ (loại)} \\ -1<x<2 \end{array}\right.$

$\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$. **Chọn B.**

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến

$$\Leftrightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ f'\left(x^2\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ f'\left(x^2\right)<0 \end{cases} \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ -1<x^2<0 \vee x^2>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2<-1 \vee 0<x^2<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ -1<x<0 \end{array}\right.. \text{ **Chọn C.**}$$

Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2\right)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-1 \\ x^2=0 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn C.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(1;+\infty)$

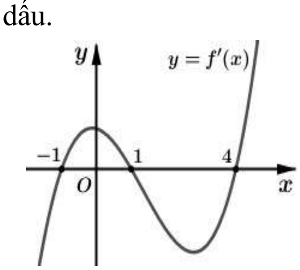
● $x\in(1;+\infty) \to x>0$. (1)

● $x\in(1;+\infty) \to x^2>1$. Với $x^2>1 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'\left(x^2\right)>0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=2xf\left(x^2\right)>0$ trên khoảng $(1;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;-1)$.

C. $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2xf\left(x^2\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ f'\left(x^2\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ f'\left(x^2\right)<0 \end{cases} \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ -1<x^2<1 \vee x^2>4 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2<-1 \vee 1<x^2<4 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \vee x>2 \\ -2<x<-1 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2\right)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-1 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

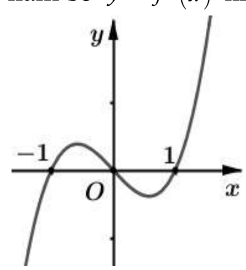
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn B.
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$

- $x\in(2;+\infty)\to x>0.$ (1)
- $x\in(2;+\infty)\to x^2>4$. Với $x^2>4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'\left(x^2\right)>0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=2xf\left(x^2\right)>0$ trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.
Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(x^3\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

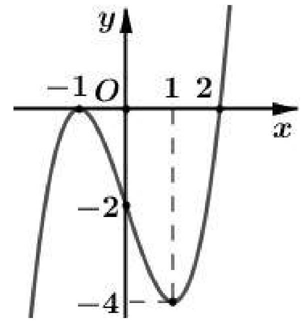
Lời giải. Ta có $g'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ f'\left(x^3\right)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^3=0 \\ x^3=-1 \\ x^3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C.**

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai** ?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2)$;

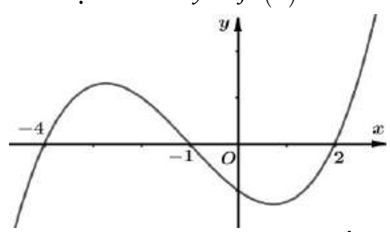
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \text{ (nghiem kep)} \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C.**

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 5)$;

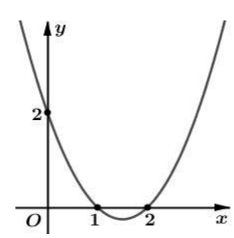
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 5 = -4 \\ x^2 - 5 = -1 \\ x^2 - 5 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{7}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C.**

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(1;2)$. **B.** $(0;+\infty)$.

C. $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-2xf'(1-x^2)$. Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x>0\\ f'(1-x^2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}-2x<0\\ f'(1-x^2)>0\end{cases}\end{array}\right.$.

- Trường hợp 1: $\begin{cases}-2x>0\\ f'(1-x^2)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0\\ 1<1-x^2<2: \text{vo nghiem}\end{cases}$.
- Trường hợp 2: $\begin{cases}-2x<0\\ f'(1-x^2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ 1-x^2<1 \vee 1-x^2>2\end{cases} \Leftrightarrow x>0$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(1-x^2)=0\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l}x=0\\ 1-x^2=1\\ 1-x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

Bảng biến thiên

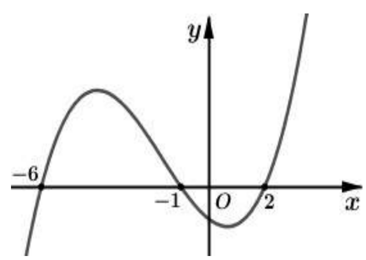
x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=1\in(0;+\infty)$.

- $x=1 \longrightarrow -2x<0.$ (1)
- $x=1 \to 1-x^2=0 \longrightarrow f'(1-x^2)=f'(0) \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(0)=2>0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(1)<0$ trên khoảng $(0;+\infty)$.
Nhận thấy nghiệm của $g'(x)=0$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(2;3)$. **B.** $(-2;-1)$.
C. $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-2xf'(3-x^2)$. Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'(3-x^2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'(3-x^2)>0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}3-x^2<-6\\ -1<3-x^2<2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}-6<3-x^2<-1\\ 3-x^2>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x^2>9\\ 4>x^2>1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}4<x^2<9\\ x^2<1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\ 2>x>1\\ -3<x<-2\\ -1<x<0\end{array}\right..$$ **Chọn D.**

Cách 2.

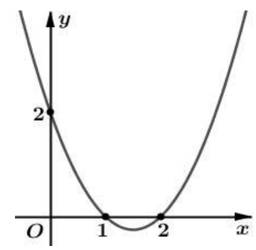
Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(3-x^2)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3-x^2=-6 \\ 3-x^2=-1 \\ 3-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D.**

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$.

C. $(-\infty;2)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-2x<0 \\ f'(x-x^2)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-2x>0 \\ f'(x-x^2)<0 \end{cases} \end{array}\right.$.

- Trường hợp 1: $\begin{cases} 1-2x<0 \\ f'(x-x^2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x-x^2<1 \vee x-x^2>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.
- Trường hợp 2: $\begin{cases} 1-2x>0 \\ f'(x-x^2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2} \\ 1<x-x^2<2:\text{vo nghiem} \end{cases}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $x>\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Cách 2. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ f'(x-x^2)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x-x^2=1:\text{vo nghiem} \\ x-x^2=2:\text{vo nghiem} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

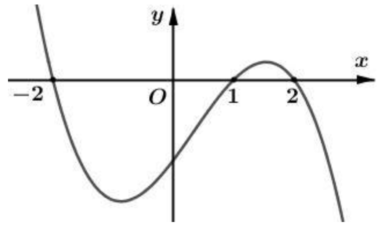
x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

Cách 3. Vì $x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x-x^2)>0$.

Suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $1-2x$.

Yêu cầu bài toán cần $g'(x)<0 \longrightarrow 1-2x<0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$



Hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

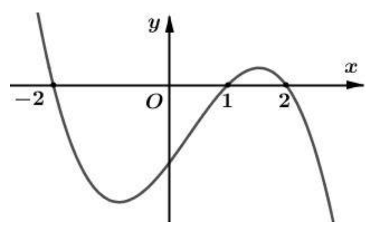
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$.

Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x).f(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)>0 \\ f(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(1;2)$. **Chọn D.**

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

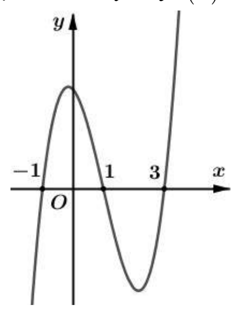
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x).f(3-x)$.

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(3-x) < 0 \\ f(3-x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;5)$. **Chọn C.**

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $\left(1;2\sqrt{2}-1\right)$. **D.** $\left(2\sqrt{2}-1;+\infty\right)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

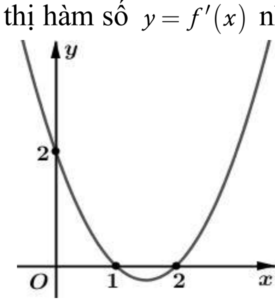
Ta có $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \ (\text{nghiem boi ba}) \\ x=-1-2\sqrt{2} \\ x=-1+2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên và ta **chọn A.**

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau: Ví dụ xét trên khoảng $\left(-1;-1+2\sqrt{2}\right)$ ta chọn $x=0$. Khi đó $g'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f'\left(\sqrt{2}\right) < 0$ vì dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta thấy tại $x = \sqrt{2} \in (1;3)$ thì $f'\left(\sqrt{2}\right) < 0$. Các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) f'\left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

- $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (1)

● $0 < u = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+2x+2} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2}+\sqrt{(x+1)^2+1}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$

$\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(u) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ (2)

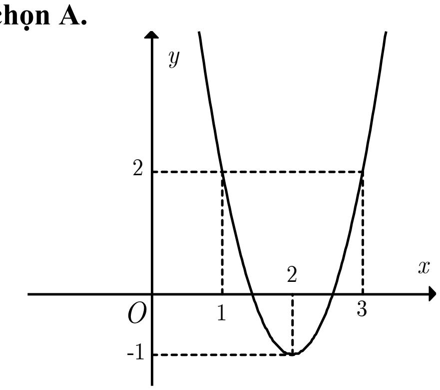
Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn A.**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $g(x) = f'(x-2)+2$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



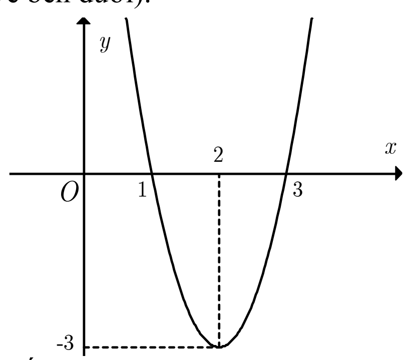
A. $(-1;1)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

C. $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

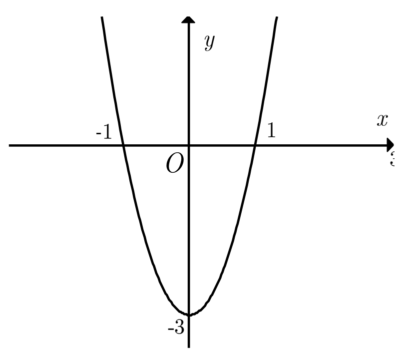
Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có $f'(x-2)+2<2 \longleftrightarrow 1<x<3.$

Đặt $t = x-2,$ ta được $f'(t)+2<2 \longleftrightarrow 1<t+2<3$ hay $f'(t)<0 \longleftrightarrow -1<t<1.$ **Chọn A.**

Cách khác. Từ đồ thị hàm số $f'(x-2)+2$ tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x-2)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



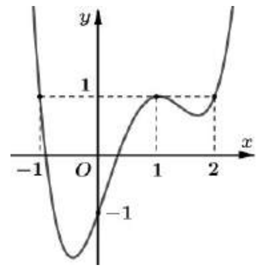
Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x-2)$ sang trái 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x)<0$ khi $x \in (-1;1)$.

Vấn đề 2. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]+g(x)$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



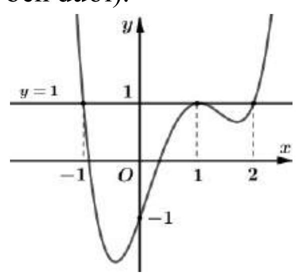
Đặt $g(x)=f(x)-x$, khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $g(2)<g(-1)<g(1)$. **B.** $g(-1)<g(1)<g(2)$.

C. $g(-1)>g(1)>g(2)$. **D.** $g(1)<g(-1)<g(2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)-1 \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

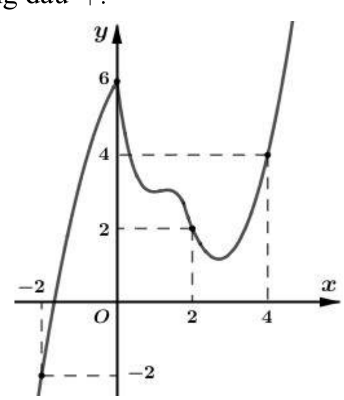
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên $\longrightarrow g(2)<g(-1)<g(1)$. **Chọn C.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y=1$ nên $g'(x)=f'(x)-1$ mang dấu $+$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?



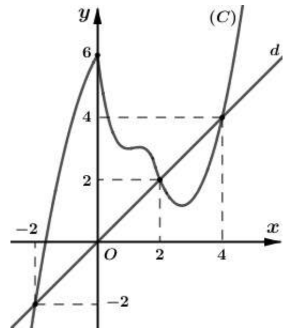
A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$

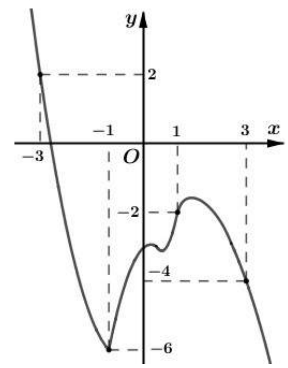
(như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên (hoặc ta thấy với $x\in(-2;2)$ thì đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=x$ nên $g'(x)>0$) $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$. **Chọn B.**

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-3;1)$.

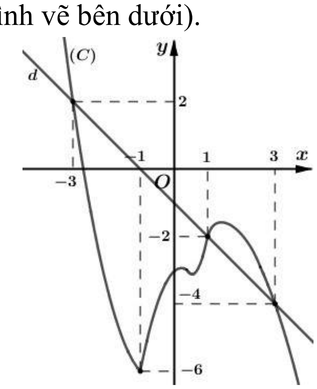
B. $(1;3)$.

C. $(-\infty;3)$.

D. $(3;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2f'(x)+2(x+1) \longrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x-1$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=-x-1$ (như hình vẽ bên dưới).

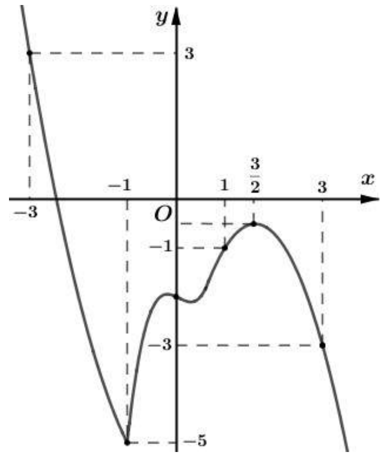


Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ 1<x<3 \end{array}\right.$ (vì phần đồ thị của $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-x-1$). Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

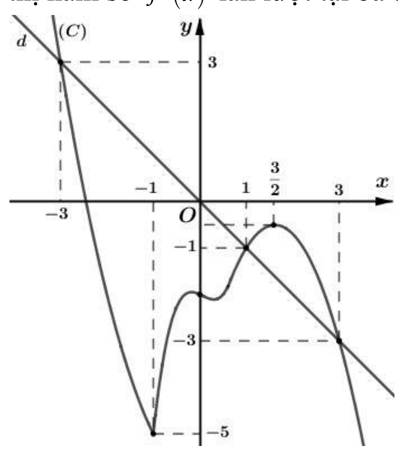


A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-f'(1-x)+x-1$.

Để $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-x)>x-1$. Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t)>-t$.

Kẻ đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=-1;\ x=3$.



Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình $f'(t)>-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x<-3 \\ 1<1-x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ -2<x<0 \end{array}\right.$.

Đối chiếu đáp án ta **chọn B.**

Vấn đề 3. Cho bảng biến thiên $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>3 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -2<x<3.$

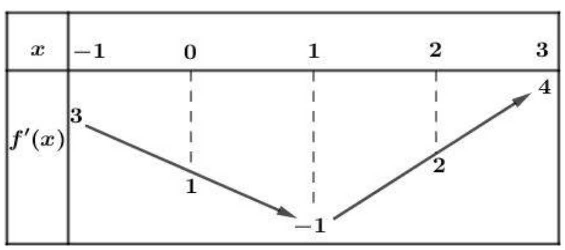
Ta có $g'(x)=\left(4x-\frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$. Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-\frac{5}{2}>0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-\frac{5}{2}<0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \end{array}\right.$.

- $\begin{cases} 4x-\frac{5}{2}>0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{8} \\ -2<2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\frac{9}{4}.$

- $\begin{cases} 4x-\frac{5}{2}<0 \\ f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\frac{5}{8} \\ 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}>3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{5}{8} \\ 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \frac{1}{4}<x<\frac{5}{8} \end{array}\right.$.

Đối chiếu các đáp án, ta **chọn C.**

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$. Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2$

- TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow 2<1-\frac{x}{2}<3 \Leftrightarrow -4<x<-2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.

- TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow -1<1-\frac{x}{2}<a\ <0 \Leftrightarrow 2<2-2a<x<4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$. **Chọn A.**

Chú ý: Từ trường hợp 1 ta có thể chọn đáp án A nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Vấn đề 4. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(-6;6)$. **C.** $\left(-6\sqrt{2};6\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(-6\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{2}f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+4=-\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2-2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\right]+4=\dfrac{9}{2}-\dfrac{x^2}{8}$.

Xét $\dfrac{9}{2}-\dfrac{x^2}{8}>0\Leftrightarrow x^2<36\longrightarrow -6<x<6$. **Chọn B.**

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2xf\left(x^2\right)=2x^5\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^5\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3.\\x=\pm2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D.**

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)$?

A. -2. **B.** -1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x+2\right)$

$$=2(x-1)\left[\left(x^2-2x+2-1\right)^2\left(\left(x^2-2x+2\right)^2-2\left(x^2-2x+2\right)\right)\right]$$

$$=2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right].$$

Xét $2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right]>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$.

Vậy số 3 thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$. **Chọn B.**

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=\dfrac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}20-5x^2=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=0\\\dfrac{5x}{x^2+4}=1\\\dfrac{5x}{x^2+4}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\\x=1\ (\text{nghiem boi chan})\\x=4\ (\text{nghiem boi chan})\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(4;+\infty)$ ta chọn $x=5$

- $x=5\rightarrow\dfrac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}<0.$ (1)
- $x=5\rightarrow\dfrac{5x}{x^2+4}=\dfrac{25}{29}\longrightarrow f'\left(\dfrac{25}{29}\right)=\dfrac{25}{29}\left(\dfrac{25}{29}-1\right)^2\left(\dfrac{25}{29}-2\right)<0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)>0$ trên khoảng $(4;+\infty)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4).t(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $t(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$.

Theo giả thiết $f'(x)=x^2(x-1)(x-4).t(x)\longrightarrow f'\left(x^2\right)=x^4\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right).t\left(x^2\right)$.

Từ đó suy ra $g'(x)=2x^5\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right).t\left(x^2\right)$.

Mà $t(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow t\left(x^2\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu $2x^5\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(1-x)(x+2).t(x)+2018$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $t(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-f'(1-x)+2018$.

Theo giả thiết $f'(x)=(1-x)(x+2).t(x)+2018 \longrightarrow f'(1-x)=x(3-x).t(1-x)+2018$.

Từ đó suy ra $g'(x)=-x(3-x).t(1-x)$.

Mà $t(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow -t(1-x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $x(3-x)$.

Lập bảng xét dấu cho biểu thức $x(3-x)$, ta kết luận được hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(3;+\infty)$. **Chọn D.**

Vấn đề 5. Cho biểu thức $f'(x,m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ đồng biến, nghịch biến.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<100$ để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải. Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=(2x-8).f'(x^2-8x+m)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x>4$

$$\Leftrightarrow (2x-8).f'(x^2-8x+m)\ge 0,\ \forall x>4 \Leftrightarrow f'(x^2-8x+m)\ge 0,\ \forall x>4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+m\le 0,\ \forall x\in(4;+\infty) \\ x^2-8x+m\ge 2,\ \forall x\in(4;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow m\ge 18.$$

Vậy $18\le m<100$. **Chọn B.**

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$.

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(3-x)\le 0,\ \forall x\in(3;+\infty) \Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m\le \frac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x\in(3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m\le \min_{(3;+\infty)} h(x) \text{ với } h(x)=\frac{(x-3)^2+9}{x-3}.$$

Ta có $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}=(x-3)+\dfrac{9}{x-3}\ge 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}}=6$.

Vậy suy ra $m\le 6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. **Chọn B.**

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x^2+mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'\left(x^2\right)=x^4\left(x^2-1\right)\left(x^4+mx^2+5\right)$.

Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right)\ge 0,\ \forall x>1 \Leftrightarrow 2x.x^4\left(x^2-1\right)\left(x^4+mx^2+5\right)\ge 0,\ \forall x>1 \Leftrightarrow x^4+mx^2+5\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{x^4+5}{x^2},\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(1;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=-\dfrac{x^4+5}{x^2}$.

Khảo sát hàm $h(x)=-\dfrac{x^4+5}{x^2}$ trên $(1;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(1;+\infty)} h(x)=-2\sqrt{5}$.

Suy ra $m\ge -2\sqrt{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-4;-3;-2;-1\}$. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(3x^4+mx^3+1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'\left(x^2\right)=x^2\left(x^2-1\right)^2\left(3x^8+mx^6+1\right)$.

Ta có $g'(x)=2xf'\left(x^2\right)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x.x^2\left(x^2-1\right)^2\left(3x^8+mx^6+1\right)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^8+mx^6+1\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{3x^8+1}{x^6},\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=-\dfrac{3x^8+1}{x^6}$.

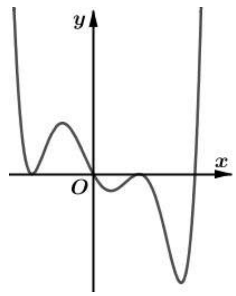
Khảo sát hàm $h(x)=-\dfrac{3x^8+1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} h(x)=-4$.

Suy ra $m\ge -4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-4;-3;-2;-1\}$. **Chọn B.**

Phần 2. Cực trị của hàm số

Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành x_1; 0; x_2; x_3 nhưng chỉ cắt thực sự tại hai điểm là 0 và x_3.

Bảng biến thiên

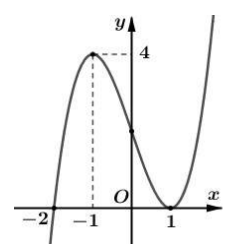
x	$-\infty$		x_1		0		x_2		x_3		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$		$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đồ thị của $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành nhưng cắt và băng qua luôn trục hoành chỉ có 2 điểm nên có hai cực trị.

- Cắt và băng qua trục hoành từ trên xuống thì đó là điểm cực đại.
- Cắt và băng qua trục hoành từ dưới lên thì đó là điểm cực tiểu.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 3\right)$.



A. 2. **B.** 3.
C. 4. **D.** 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2 - 3\right)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 3\right) = 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \text{ (nghiem kep)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \text{ (nghiem kep)} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2;+\infty)$

- $x \in (2;+\infty) \rightarrow x > 0.$ (1)

- $x\in(2;+\infty)\to x^2>4\longrightarrow x^2-3>1\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'\left(x^2-3\right)>0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=2xf'\left(x^2-3\right)>0$ trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.
Nhận thấy các nghiệm $x=\pm1$ và $x=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu; các nghiệm $x=\pm2$ là nghiệm bội chẵn (lí do dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1) nên qua nghiệm không đổi dấu.
Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y=f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=1(\text{nghiem kep})\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{2}\,(\text{nghiem kep})\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right..$$

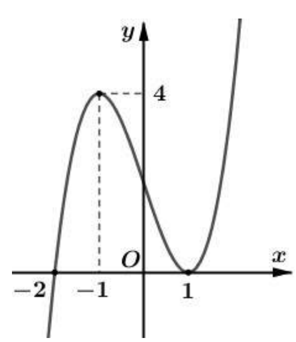
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↘		↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn A.**
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3;+\infty)$

- $x\in(3;+\infty)\to 2x-2>0.$ (1)
- $x\in(3;+\infty)\to x^2-2x>3\xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} f'\left(x^2-2x\right)<0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)<0$ trên khoảng $(3;+\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.
Nhận thấy các nghiệm $x=\pm1$ và $x=3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)<0$, đồng thời đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f^2(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\quad(\text{nghiem kep})\end{array}\right..$

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$		$\nearrow$		$y=0$

Xét $g'(x)=2f'(x)f(x)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \ \text{(nghiem kep)} \\ x=a(a<-2) \\ x=b(b>0) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		a		-2		b		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

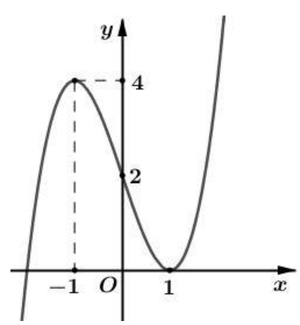
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=0\in(-1;b)$

- $x=0 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(0)>0.$ (1)
- Theo giả thiết $f(0)<0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(0)<0$ trên khoảng $(-1;b)$.

Nhận thấy $x=-2;\ x=a;\ x=b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Nghiệm $x=1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x=1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



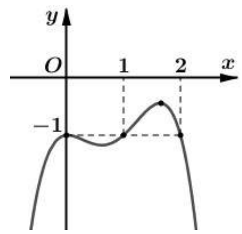
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x-2017)-2018x+2019$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x-2017)-2018$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)=2018.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x-2017)=2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Suy ra hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị. **Chọn A.**

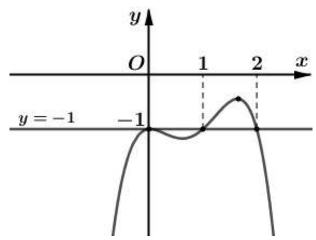
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây ?



A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** Không có điểm cực tiểu.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)+1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-1$.

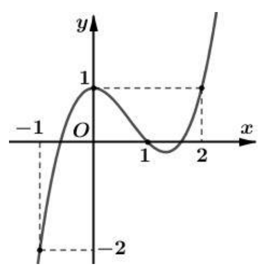


Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên cho hàm $g(x)$ ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$. **Chọn B.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía dưới đường $y=-1$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

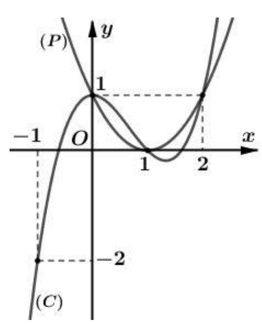


Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và parapol $(P): y=(x-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

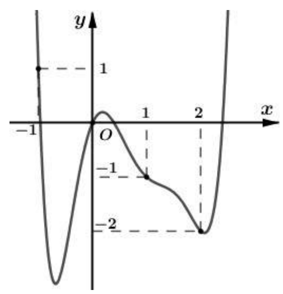
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1.$ **Chọn C.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0;\ x=1;\ x=2$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm $g'(x)$ đổi dấu.

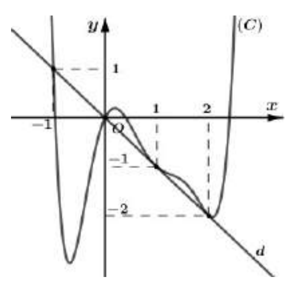
Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



A. $x=-1.$ **B.** $x=0.$ **C.** $x=1.$ **D.** $x=2.$

Lời giải. Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x;\quad g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x.$

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-x.$



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

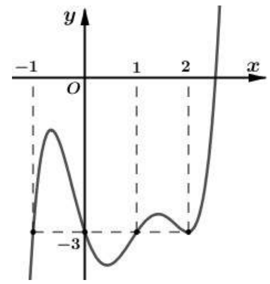
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
g		↗		↘		↗					

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$. **Chọn B.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=-x$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

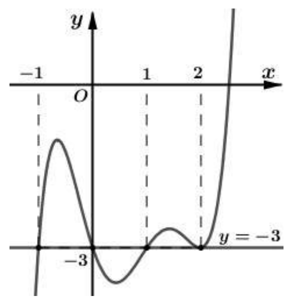
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

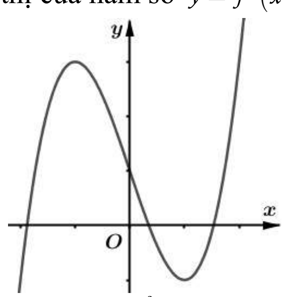
Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)+3$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-3$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-3$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta thấy $x=-1$, $x=0$, $x=1$ là các nghiệm đơn và $x=2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x)=f(x)+3x$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

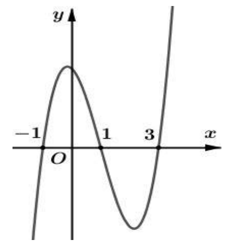


Hỏi hàm số $g(x)=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm) $\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). **Chọn C.**

Câu 11. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Suy ra $g'(x)=0\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{array}\right..$

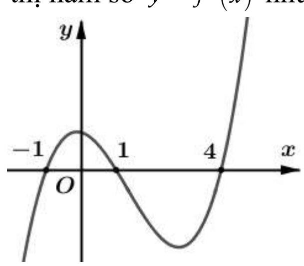
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có 1 điểm cực đại. **Chọn A.**

Chú ý: Cách xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$ ta chọn $x_0=0\longrightarrow g'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f'\left(\sqrt{2}\right)<0$ vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'\left(\sqrt{2}\right)<0$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta thấy đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

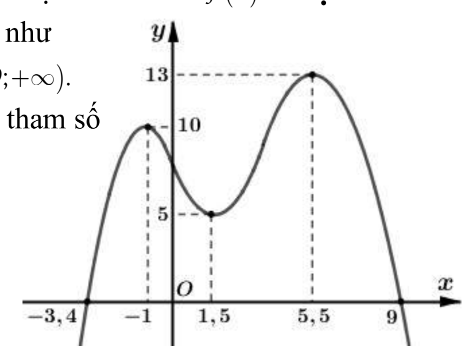
Ta có $g'(x)=2f'(x).e^{2f(x)+1}+f'(x).5^{f(x)}.\ln 5=f'(x).\left(2e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}.\ln 5\right)$.

Vì $2e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}.\ln 5>0$ với mọi x nên $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$. **Chọn C.**

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$. Đặt $g(x)=f(x)-mx+5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị ?

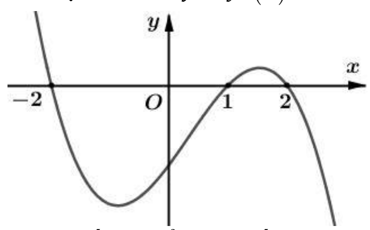
A. 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.



Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - m;\quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m.$

Để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 5 \\ 10 \le m < 13 \end{array}\right. \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1;2;3;4;5;10;11;12\}$. **Chọn C.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

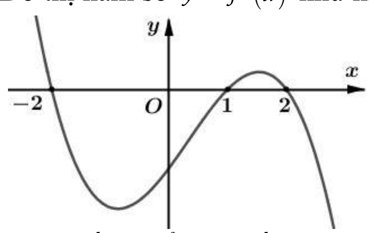
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm) $\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\longrightarrow f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). **Chọn D.**

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải. Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

- Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m < 1$.
- Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\longrightarrow m \ge -2$.

Suy ra $-2 \le m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2;-1;0\}$. **Chọn B.**

Vấn đề 2. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(3-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=3$. **Chọn D.**

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)-1=(x+1)(x-1)^2(x-2)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$. Ta thấy $x=-1$ và $x=2$ là các nghiệm đơn còn $x=1$ là nghiệm kép $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-f'(3-x)=\left[(3-x)^2-1\right]\left[4-(3-x)\right]=(2-x)(4-x)(x+1)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow(2-x)(4-x)(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=4\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$. **Chọn B.**

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)=2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\(x-2)^2(x+2)^2=0\end{array}\right.$.

Ta thấy $x=\pm1$ và $x=0$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2-8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x)=2(x-4)\left[(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)\right]$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)\left[(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\\x^2-2x=0\\x^2-2x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\\x=2\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Ta thấy $x=1\pm\sqrt{3}$, $x=0$, $x=2$ và $x=4$ đều là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2f''(x)f'(x)-2f'(x).f''(x)-2f(x).f'''(x)=-2f(x).f'''(x)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f(x).f'''(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)^2(x+4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x-1)^2=0\\x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4\end{array}\right..$$

Ta thấy $x=0$ và $x=-4$ là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $g'(x)=\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x.$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4+12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{-\dfrac{4}{5}}\end{array}\right..$$

Nhận thấy $x=0$ và $x=\sqrt[3]{-\dfrac{4}{5}}$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|x|)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=-3\end{array}\right..$

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x=-3$ và $x=2$

$\longrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=-3$ và $x=2$ trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị (cụ thể là $x=-2;\ x=0;\ x=2$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn B.**

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^4(x^2-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|x|)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^4(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua các điểm điểm $x=1;\ x=\pm 2$

$\longrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng chỉ có 2 điểm cực trị dương là $x=1$ và $x=2$

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị (cụ thể là $x=\pm 2;\ x=\pm 1;\ x=0$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn C.**

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|x|)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải. Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0\in Oy$

$\longrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0\in Oy$

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị (cụ thể là $x=0$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn B.**

Vấn đề 3. Cho biểu thức $f'(x,m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-10$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải. Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. (*)

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'=m^2-5>0 \\ S=-2m>0 \\ P=5>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m<-\sqrt{5}$

$\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m>-10} m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$. **Chọn B.**

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \\ x^2+m^2-3m-4=0 \quad (1) \end{array}\right.$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-3m-4<0 \Leftrightarrow -1<m<4$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1;2;3\}$. **Chọn B.**

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-m=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiem boi 4)} \\ x=m \text{ (nghiem boi 5)} \\ x=-3 \text{ (nghiem boi 3)} \end{array}\right.$.

● Nếu $m=-1$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x=-3;\ x=-1$). Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-1$ không thỏa yêu cầu đề bài.

● Nếu $m=-3$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x=0$. Do đó, $m=-3$ không thỏa yêu cầu đề bài.

● Khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=m$ và $x=-3<0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m>0 \xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x+1=0 \\ x^2+2mx+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x^2+2mx+5=0 \ (1) \end{array}\right.$. Yêu cầu bài toán ta suy ra

Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-5>0 \\ S=-2m<0 \\ P=5>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\sqrt{5}$.

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-5\leq 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq m\leq\sqrt{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-2;-1\}$. **Chọn A.**

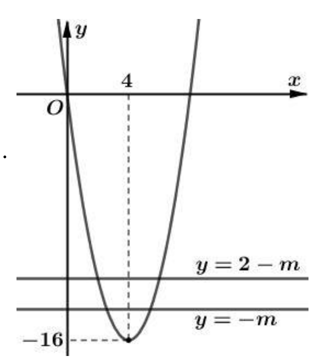
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải. Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiem boi 2)} \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x+m)$;

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2-8x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=1 \text{ (nghiem boi 2)} \\ x^2-8x+m=0 \quad (1) \\ x^2-8x+m=2 \quad (2) \end{array}\right.$.



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. (*)

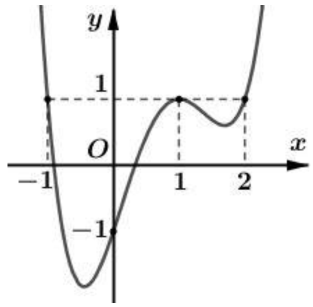
Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m,\ d_2: y=-m+2$ (như hình vẽ).

Khi đó (*) $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m>-16 \Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa. **Chọn A.**

Vấn đề 4. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

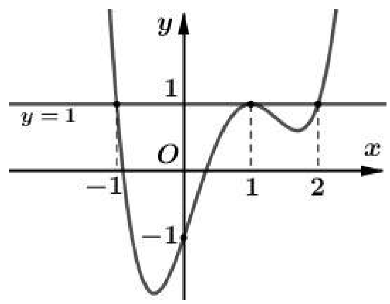
Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực đại tại



A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=f'(x)-1;\ \ g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=1$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g		↗		↘		↘		↗	

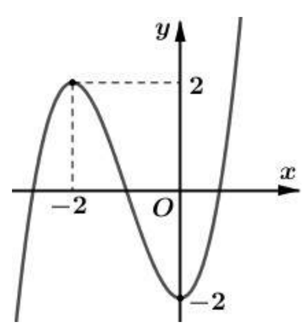
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$. **Chọn A.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=1$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Hàm số $g(x)=f\left(-x^2+3x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3. **B.** 4.

C. 5. **D.** 6.



Lời giải. Ta có $g'(x)=(-2x+3).f'\left(-x^2+3x\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+3=0 \\ f'\left(-x^2+3x\right)=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ -x^2+3x=-2 \\ -x^2+3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$1,5$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn A.**

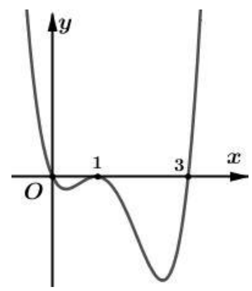
Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4\in\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

- $-2x+3=-5<0.$ (1)
- $-x^2+3x=-4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x)=(-2x+3)f'\left(-x^2+3x\right)<0$ trên khoảng $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

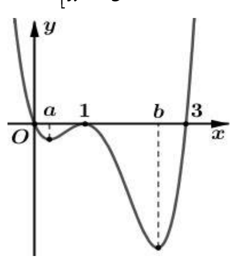
Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu ?



A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \text{(nghiem kep)} \\ x=3 \end{array}\right.$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a\ (0<a<1) \\ x=1 \\ x=b\ (1<b<3) \end{array}\right.$.



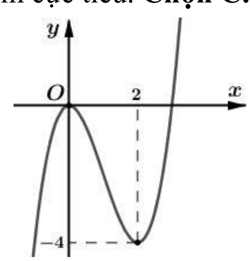
Ta có $g'(x)=2f'(x).f(x)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a\ (0<a<1) \\ x=1 \\ x=b\ (1<b<3) \\ x=0 \\ x=1\ (\text{nghiem boi } 2) \\ x=3 \end{array}\right..$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		a		1		b		3		$+\infty$
f'		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
f		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $g(x)$ có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **Chọn C.**

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



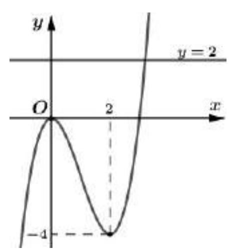
A. 3. **B.** 4.
C. 5. **D.** 6.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0,\ x = 2$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (\text{nghiem don}) \\ x = 2\ (\text{nghiem don}) \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = f'(x).f'[f(x)]$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{array}\right.$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (\text{nghiem don}) \\ x = 2\ (\text{nghiem don}) \end{array}\right.$.
- $f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0\ (1) \\ f(x) = 2\ (2) \end{array}\right.$.

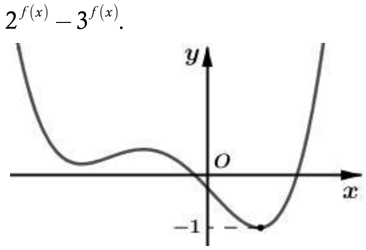


Dựa vào đồ thị suy ra:

- ✔ Phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ (nghiệm kép) và $x = a\ (a > 2)$.
- ✔ Phương trình (2) có một nghiệm $x = b\ (b > a)$.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x = 0,\ x = 2,\ x = a$ và $x = b$. Suy ra hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có 4 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$.



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x)\left[2^{f(x)}.\ln 2 - 3^{f(x)}.\ln 3\right]$;

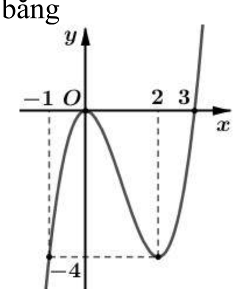
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f(x)=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{\ln 2}{\ln 3}<-1 & (2) \end{array}\right..$$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- (1) có ba nghiệm bội lẻ phân biệt (vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị).
- $f(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hàm số $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

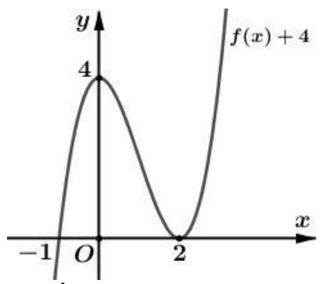
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng

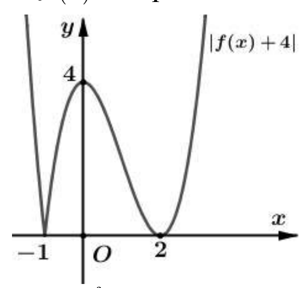


A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có được bằng cách

- Tịnh tiến đề thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox, ta được $|f(x)+4|$.

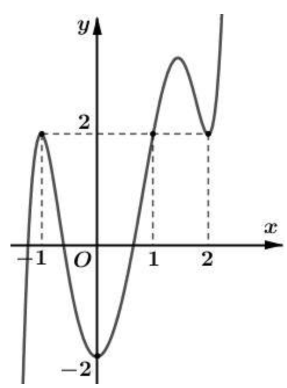




Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$, suy ra tọa độ các điểm cực trị là $(-1;0)$, $(0;4)$, $(2;0)$ $\longrightarrow$ tổng tung độ các điểm cực trị bằng $0+4+0=4$. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

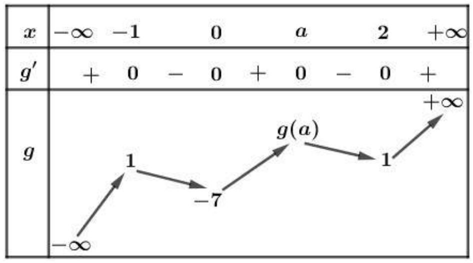
A. 4.
B. 5.
C. 7.
D. 9.



Lời giải. Xét $g(x)=2f(x)-3 \longrightarrow g'(x)=2f'(x)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=a\ (1<a<2) \\ x=2 \end{array}\right..$$ Ta tính được $$\left\{\begin{array}{l} g(-1)=1 \\ g(0)=-7 \\ g(a)>1 \\ g(2)=1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

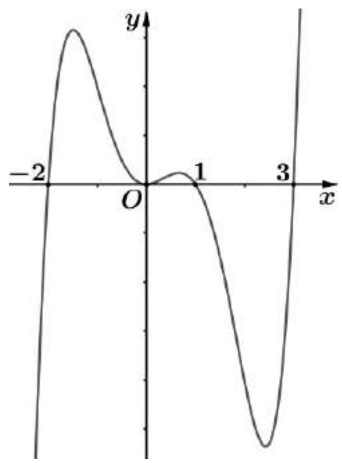


Dựa vào bảng biến thiên suy ra

- Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|x|)+2018$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

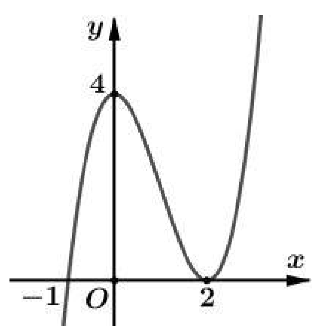
Lời giải. Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)+2018$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

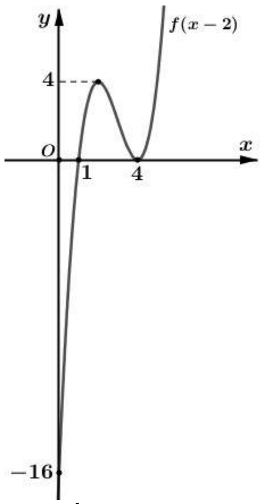
Chọn C.

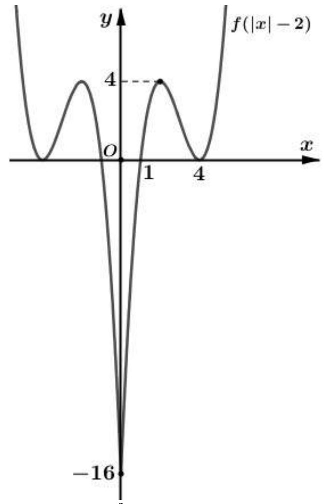
Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|x|-2)$ là



A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

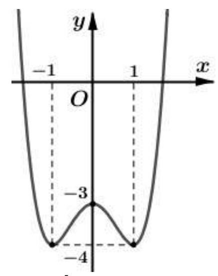
Lời giải. Trước tiên ta phải biết rằng, đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi mới lấy đối xứng.





Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|-2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3.

C. 5. **D.** 7.

Lời giải. Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)+1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và **Bước 4.** Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Vấn đề 5. Cho bảng biến thiên của hàm $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm $f[u(x)]$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=3f(x)+1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây ?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** $x=0$.

Lời giải. Ta có $g'(x)=3f'(x)$.

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $x=\pm 1$. **Chọn C.**

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $g'(x)=2x.f'\left(x^2+1\right)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2+1\right)\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo BBT}}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=-2\\ x^2+1=1\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{nghiem don})\\ x=0\ (\text{nghiem kep})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0(\text{nghiem boi }3).$$

Vậy $g'(x)=0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x=0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(3-x)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

- $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(3-x)=0\xleftrightarrow{\text{theo BBT}}\left[\begin{array}{l}3-x=0\\ 3-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=1\end{array}\right..$
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)=f(3-x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2018	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=|f(x-2017)+2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2017)+2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị.

Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4036	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=|u(x)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi số điểm cực trị của hàm số $g(x)=|f(|x|)|$ nhiều nhất là bao nhiêu ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 13.

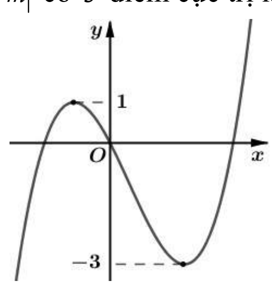
Lời giải. Ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm có hoành độ dương. Khi đó

- Đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tối đa 4 điểm.
- Hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x)=|f(|x|)|$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị. **Chọn B.**

Vấn đề 6. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x,m)]$.

Câu 46. Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f(x)+m|$ có 3 điểm cực trị là



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\le m\le 3$.

Lời giải. Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $A+B$ với

- A là số điểm cực trị của hàm $f(x)$

● B là số giao điểm của $f(x)$ với trục hoành (không tính các điểm trùng với A ở trên)

Áp dụng: Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)+m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 1.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 1, ta cần

● Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 1 đơn vị $\longrightarrow m\le -1$.

● Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị $\longrightarrow m\ge 3$.

Vậy $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **Chọn A.**

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$. **C.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **D.** $m=3$.

Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)-2m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

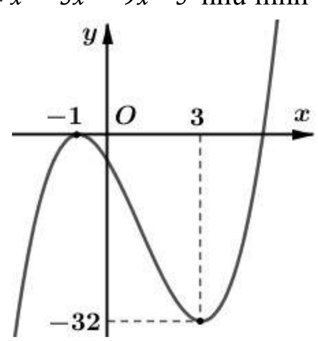
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)-2m$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới lớn hơn 4 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 11 đơn vị $\longrightarrow \begin{cases}-2m<-4\\-2m>-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\\m<\frac{11}{2}\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 48. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị bằng

A. -2016. **B.** -496. **C.** 1952. **D.** 2016.

Lời giải. Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x-5$ như hình bên dưới



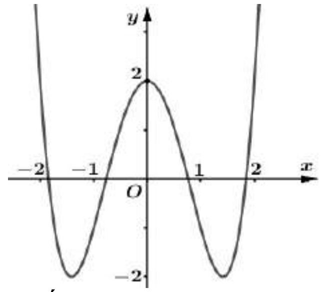
Ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $f(x)+\frac{m}{2}$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x)+\frac{m}{2}$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+\frac{m}{2}$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhưng phải nhỏ hơn 32 đơn vị $\longrightarrow 0<\frac{m}{2}<32\Leftrightarrow 0<m<64\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 63\}$

$\longrightarrow \sum m=2016$. **Chọn D.**

Câu 49. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới

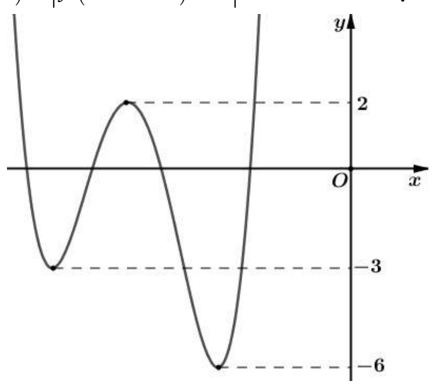


Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-2 < m < 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x) - m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị.
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) - m$ với trục hoành là 2.
Để số giao điểm của đồ thị $f(x) - m$ với trục hoành là 2, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới ít nhất 2 đơn vị (bằng 2 đơn vị vẫn được vì khi đó điểm cực trị trùng với điểm chung của đồ thị với trục hoành nên ta chỉ tính một lần) $\longrightarrow -m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$. **Chọn C.**

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m|$ có 7 điểm cực trị ?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

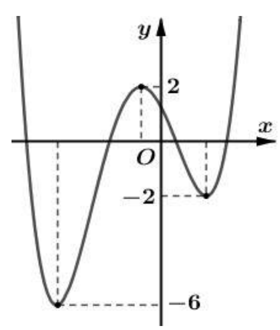
Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x + 2018) + m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x + 2018) + m$ với trục hoành là 4.
Để số giao điểm của đồ thị $f(x + 2018) + m$ với trục hoành là 4, ta cần đồng thời

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\longrightarrow m > -2$
- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\longrightarrow m < 3$.

Vậy $-2 < m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1;\ 2\}$. **Chọn A.**

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2.
C. 4. **D.** 5.

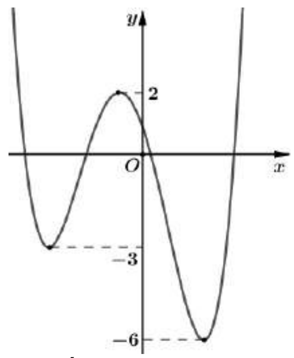


Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2.
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \le -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2 \le m^2 < 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2} \le m < \sqrt{6}\\ -\sqrt{6} < m \le -\sqrt{2}\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2;2\}$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=|f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

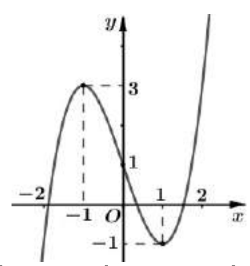
Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x-1)+m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x-1)+m$ với trục hoành là 2.
Để số giao điểm của đồ thị $f(x-1)+m$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m \le -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

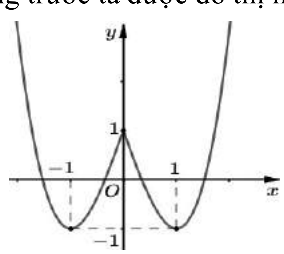
$\longrightarrow 3 \le m < 6$. Vậy $\left[\begin{array}{l}m \le -2\\ 3 \le m < 6\end{array}\right. \xrightarrow[m\in[-4;4]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-4;-3;-2;3;4\}$. **Chọn B.**

Câu 53. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Với $m<-1$ thì hàm số $g(x)=f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 5.

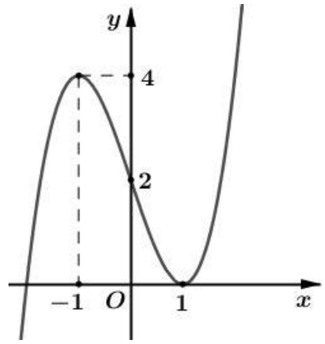


Lời giải. Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị). **Chọn C.**

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m<-1.$ **B.** $m>-1.$ **C.** $m>1.$ **D.** $m<1.$

Lời giải. Nhận xét: Hàm $g(x)=f(|x|+m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục Oy $\longrightarrow x=0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{|x|}.f'(|x|+m)$ với $x=0.$

$$\longrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(|x|+m)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l}|x|+m=1\\ |x|+m=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=1-m\\ |x|=-1-m\end{array}\right.. \quad (*)$$

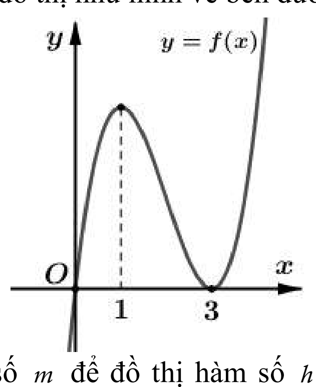
Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-m>0\\ -1-m>0\\ 1-m\neq -1-m\end{cases} \Leftrightarrow m<-1.$$ **Chọn A.**

Cách 2. Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\longrightarrow m<-1.$

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



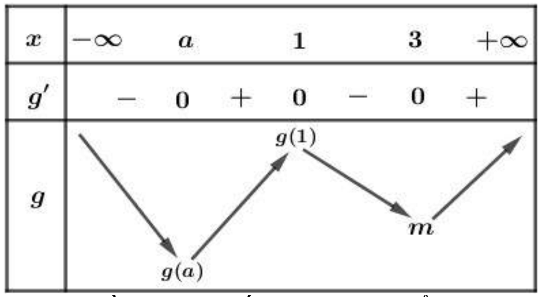
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>\dfrac{1}{4}.$ **B.** $m\geq\dfrac{1}{4}.$ **C.** $m<1.$ **D.** $m\leq 1.$

Lời giải. Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m \longrightarrow g'(x)=f'(x)[2f(x)+1].$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2f(x)=-1 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=a\ (a<0) \end{array}\right.$. Ta tính được $\begin{cases} g(1)=f^2(1)+f(1)+m>m \\ g(3)=m \\ g(a)=m-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|=\left|\left[f(x)+\dfrac{1}{2}\right]^2+m-\dfrac{1}{4}\right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m \geq \dfrac{1}{4}$. **Chọn B.**

Vấn đề 7. Cho biểu thức $f(x,m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

Câu 56. Hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1$ và 0. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$. Ta có $g'(x)=2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (\text{nghiem boi ba}) \\ x=0\ (\text{nghiem don}) \\ x=2\ (\text{nghiem don}) \end{array}\right. .$$

Vì $g'(x)=0$ có hai nghiệm đơn và một nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $-2<m<\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}<m<2$. **C.** $\dfrac{5}{4}<m<2$. **D.** $\dfrac{5}{4}<m\leq 2$.

Lời giải. Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m$.

Hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2m-1)^2-3(2-m)>0\\ \dfrac{2(2m-1)}{3}>0\\ \dfrac{2-m}{3}>0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<2.$

Chọn C.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải. Để $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. (*)

Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(mx^2-2mx+m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ mx^2-2mx+m-2=0\quad(1)\end{array}\right.$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m(m-2)>0\\ f(1)=-2\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m>0 \xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 10\}$. **Chọn C.**

Câu 59. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0;3)$ và $B(2;-1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=\left|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d\right|$.

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải. Ta có $g(x)=\left|ax^2|x|+bx^2+c|x|+d\right|=\left|f(|x|)\right|$.

Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương $\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0;3)\in Oy$ và điểm cực trị $B(2;-1)$ thuộc góc phần tư thứ IV nên đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm (1 điểm có hoành độ âm, 2 điểm có hoành độ dương) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(|x|)\right|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn B.**

Cách 2. Vẽ phát họa đồ thị $f(x)$ rồi suy ra đồ thị $f(|x|)$, tiếp tục suy ra đồ thị $\left|f(|x|)\right|$.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ và $\begin{cases}a>0\\ d>2018\\ a+b+c+d-2018<0\end{cases}$.

Hàm số $g(x)=|f(x)-2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải. Hàm số $g(x)=f(x)-2018$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\\ g(0)=d-2018>0\\ g(1)=a+b+c+d-2018<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{cases} \longrightarrow g(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Khi đó đồ thị hàm số $f(x)-2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x)=|f(x)-2018|$ có đúng 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ và $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\ 8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Hàm số $g(x)=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải. Hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\ f(-2)=-8+4a-2b+c>0\\ f(2)=8+4a+2b+c<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}\longrightarrow f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Khi đó đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x)=|f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 62. Cho hàm số $f(x)=x^3+mx^2+nx-1$ với $m,\ n\in\mathbb{R}$ và $\begin{cases}m+n>0\\ 7+2(2m+n)<0\end{cases}$. Hàm số $g(x)=|f(|x|)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

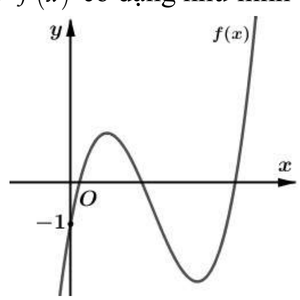
A. 2. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}f(0)=-1\\ f(1)=m+n>0\\ f(2)=7+4m+2n<0\end{cases}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\exists p>2$ sao cho $f(p)>0$.

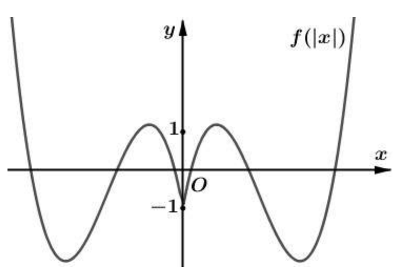
Suy ra $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1\in(0;1)$, $c_2\in(1;2)$ và $c_3\in(2;p)$. (1)

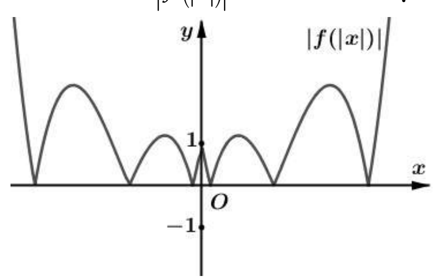
Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1\in(c_1;c_2)$ và $x_2\in(c_2;c_3)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng như hình bên dưới



Từ đó suy ra hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow$ hàm số $|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.





Chọn D.

Câu 63. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\in(-1;0)$, $x_2\in(1;2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0.$ **B.** $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0.$
C. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0.$ **D.** $a<0,\ b>0,\ c<0,\ d<0.$

Lời giải. Vì hàm số hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại các điểm $x_1,\ x_2$ và hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ nên suy ra $a<0.$
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d<0.$
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1\in(-1;0),\ x_2\in(1;2)$ nên suy ra $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\longrightarrow ac<0\Rightarrow c>0.$
Mặt khác $x_1\in(-1;0),\ x_2\in(1;2)$ nên $x_1+x_2>0\longrightarrow -\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow b>0.$
Vậy $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d<0.$ **Chọn A.**

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ biết $a>0,\ c>2018$ và $a+b+c<2018.$ Số cực trị của hàm số $g(x)=|f(x)-2018|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Đặt $h(x)=f(x)-2018=ax^4+bx^2+c-2018.$
Từ giả thiết $\begin{cases}a>0\\c>2018\\a+b+c<2018\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}\longrightarrow$ đồ thị hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị. (1)
Ta có $\begin{cases}h(1)=a+b+c-2018<0\\h(0)=c-2018>0\end{cases}\Rightarrow h(1).h(0)<0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$ $\Rightarrow h(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt (dáng điệu của hàm trùng phương). (2)
Từ (1) và (2), suy ra hàm số $g(x)=|f(x)-2018|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn D.**
Cách 2. Trắc nghiệm. Chọn $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=2019\end{cases}\longrightarrow g(x)=|f(x)-2018|=|x^4-4x^2+1|.$
Vẽ phát họa đồ thị ta thấy có 7 điểm cực trị.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)=(m^4+1)x^4+(-2^{m+1}.m^2-4)x^2+4^m+16$ với m là tham số thực. Hàm số $g(x)=|f(x)-1|$ có bao nhiêu điểm cực tri ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải. Ta có $g(x)=|f(x)-1|=\sqrt{(f(x)-1)^2}$
Suy ra $g'(x)=\dfrac{f'(x).[f(x)-1]}{\sqrt{(f(x)-1)^2}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)-1=0\end{array}\right.$.

- $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-(m^4+1)(2^{m+1}.m^2+4)<0$ với mọi $m.$
- $f(x)-1=0$ vô nghiệm do $\Delta'=(2^m.m^2+2)^2-(m^4+1).(4^m+15)$

$=4.2^m.m^2+4-15m^4-4^m-15=-(2^m-m^2)^2-11m^4-11<0.$
Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị. **Chọn A.**
Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\longrightarrow f(x)-1$ cũng có 3 điểm cực trị.
Phương trình $f(x)-1=0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).
Vậy hàm số $g(x)=|f(x)-1|$ có 3 cực trị.

Bài 14. MỘT SỐ CÂU HỎI VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO (PHẦN 2)

Câu 1: **(SGD VĨNH PHÚC).** Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y=\sqrt{x^6}-mx+5$

Suy ra: $y'=\dfrac{3x^5}{|x|^3}-m=\dfrac{3x^5-m|x|^3}{|x|^3}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

TH1: $m=0$. Ta có: $y'=\dfrac{5x^5}{|x|^3}=0$ vô nghiệm và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH2: $m>0$. Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\3x^5=mx^3\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH3: $m<0$. Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\3x^5=-mx^3\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{m}{3}}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

Vậy trong mọi trường hợp hàm số có đúng một cực trị với mọi tham số m

Chú ý: Thay vì trường hợp 2 ta xét $m>0$, ta có thể chọn m là một số dương (như $m=3$) để làm. Tương tự ở trường hợp 3, ta chọn $m=-3$ để làm sẽ cho lời giải nhanh hơn.

Câu 2: **(SGD VĨNH PHÚC).** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2017}{|x|+1}$ (1). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số (1) không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2, y=2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số (1) có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số (1) không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1, x=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{2x+2017}{|x|+1}$ (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$, nên đồ thị không có tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2017}{|x|+1}=2;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2017}{|x|+1}=-2$, nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2, y=2$.

Câu 3: **(SGD VĨNH PHÚC).** Tìm tất cả m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung.

A. Không tồn tại m. **B.** $0 < m < \frac{1}{3}$. **C.** $m < \frac{1}{3}$. **D.** $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $3x^2 + 2x + m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{CĐ}$, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_{CĐ} + x_{CT} = -\frac{2}{3} < 0 \ (2) \\ x_{CĐ}.x_{CT} = \frac{m}{3} \ (3) \end{cases}$, trong đó $x_{CĐ} < x_{CT}$ vì hệ số của x^3 lớn hơn 0.

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT} > 0$, kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_{CĐ}.x_{CT} = \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM). Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2+1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

A. $-6 \le m \le -\frac{3}{2}$. **B.** $-1 \le m \le 3$. **C.** $m \ge 3$.

D. $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng máy tính bỏ túi.

$x^3 + x(x+1) = m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow mx^4 - x^3 + (2m-1)x^2 - x + m = 0$

Chọn $m = 3$ phương trình trở thành $3x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 3 = 0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án B, **C.**

Chọn $m = -6$ phương trình trở thành $-6x^4 - x^3 - 13x^2 - x - 6 = 0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án **A.**

Kiểm tra với $m = 0$ phương trình trở thành $-x^3 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nên chọn đáp án **D.**

Tự luận

Ta có $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ (1)

Xét hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(x^3+x^2+x)'(x^4+2x^2+1)-(x^3+x^2+x)(x^4+2x^2+1)'}{(x^4+2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{(3x^2+2x+1)(x^4+2x^2+1)-(x^3+x^2+x)(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^6-2x^5-x^4+x^2+2x+1}{(x^4+2x^2+1)^2}=\frac{(-x^4+1)(x^2+2x+1)}{(x^4+2x^2+1)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow (-x^4+1)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$-\frac{3}{4}$	↘	0

Phương trình (1) có nghiệm thực khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{4}\le m\le\dfrac{3}{4}$. Chọn đáp án **D.**

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM). Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{3+9^x}, x\in R$. Nếu $a+b=3$ thì $f(a)+f(b-2)$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $b-2=1-a$

$f\left(a\right)=\dfrac{9^a}{3+9^a}$; $f\left(b-2\right)=f\left(1-a\right)=\dfrac{9^{1-a}}{3+9^{1-a}}=\dfrac{3}{3+9^a}$

$\Rightarrow f\left(a\right)+f\left(b-2\right)=\dfrac{9^a}{3+9^a}+\dfrac{3}{3+9^a}=1$

Câu 6: (T.T DIỆU HIỀN). Với giá trị nào của m thì hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ nằm về hai phía so với trục hoành?

A. $m>3$. **B.** $-1<m<\sqrt{2}$. **C.** $m<3$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y'=3x^2+6x+m$.

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $\Delta'=9-3m>0\Leftrightarrow m<3$.

Gọi x_1, x_2 là điểm cực trị của hàm số và y_1, y_2 là các giá trị cực trị tương ứng.

Ta có: $y=x^3+3x^2+mx+m-2=y'.\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}m-2\right)x+\dfrac{2}{3}m-2$ nên $y_1=k\left(x_1+1\right)$, $y_2=k\left(x_2+1\right)$.

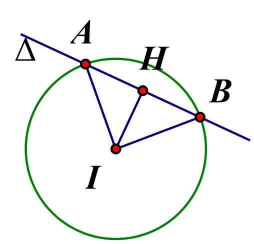
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_1.y_2<0\Leftrightarrow k^2\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)<0\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+x_2+1<0\Leftrightarrow \dfrac{m}{3}-2+1<0\Leftrightarrow m<3$

Vậy $m<3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-3m$ nên $y'=0\Leftrightarrow x^2=m$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 = \frac{1}{3}x\left(3x^2 - 3m\right) - 2mx + 2 = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có phương trình $\Delta : y = -2mx + 2$

Ta có: $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2}$

Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow AI \perp BI$.

Gọi H là trung điểm AB ta có: $IH = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} = d_{(I,\Delta)}$

Mà $d_{(I,\Delta)} = \frac{\left|2m + 1 - 2\right|}{\sqrt{4m^2 + 1}}$

Suy ra: $d_{(I,\Delta)} = \frac{\left|2m + 1 - 2\right|}{\sqrt{4m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|4m - 2\right| = \sqrt{2\left(4m^2 + 1\right)}$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 16m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB). Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

A. $m = 4 \pm \sqrt{10}$. **B.** $m = 4 \pm \sqrt{3}$. **C.** $m = 2 \pm \sqrt{3}$. **D.** $m = 2 \pm \sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hoành độ giao điểm là nghiệm PT: $\frac{2x + 1}{x + 1} = x + m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) = x^2 + \left(m - 2\right)x + m - 2 = 0 \\ x \ne -1 \end{cases}$.

Đường thẳng $y = x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, hay

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f\left(-1\right) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 12 > 0 \\ 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > 6 \end{array}\right. \ (*).$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$

Giả sử $A(x_1;x_1+m-1), B(x_2;x_2+m-1) \Rightarrow AB=\sqrt{2}|x_2-x_1|$.

Theo giả thiết $AB=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}|x_2-x_1|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6 \Leftrightarrow m^2-8m+6=0$

$\Leftrightarrow m=4\pm\sqrt{10}$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $m=4\pm\sqrt{10}$.

Câu 9: (LẠNG GIANG SỐ 1). Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \le 4y-1$.Giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{6(2x+y)}{x}+\ln\dfrac{x+2y}{y}$ là $a+\ln b$. Giá trị của tích ab là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

x, y dương ta có: $xy \le 4y-1 \Leftrightarrow xy+1 \le 4y \le 4y^2+1 \Leftrightarrow 0<\dfrac{x}{y} \le 4$.

Có $P=12+6\dfrac{y}{x}+\ln\left(\dfrac{x}{y}+2\right)$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, điều kiện: $0<t\le 4$ thì $P=f(t)=12+\dfrac{6}{t}+\ln(t+2)$

$f'(t)=-\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}$ $\qquad f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3+\sqrt{21} \\ t=3-\sqrt{21} \end{array}\right.$

t	0 4
$f'(t)$	$-$
$P=f(t)$	$\searrow$
	$\dfrac{27}{2}+\ln 6$

Từ BBT suy ra $GTNN\left(P\right)=\dfrac{27}{2}+\ln 6$ khi $t=4$ $\Rightarrow a=\dfrac{27}{2}, b=6\Rightarrow ab=81$.

Câu 10: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM). Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị $\left(C\right)$ (a,b là các hằng số dương, $ab=4$). Biết rằng $\left(C\right)$ có tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D**.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\dfrac{a}{4}$. Tiệm cận ngang $y=c\Rightarrow\dfrac{a}{4}=c$.

(C) có một tiệm cận đứng nên phương trình $4x^2+bx+9=0$ có nghiệm kép.

$\Delta=0\Leftrightarrow b^2-144=0\Leftrightarrow b=\pm 12$. Vì $b>0\Rightarrow b=12\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow c=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $T=11$.

Câu 11: (NGÔ GIA TỰ - VP). Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6\left(m-2\right)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $\left(a;b\right)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y'=6x^2+6\left(m-1\right)x+6\left(m-2\right)$

Hàm số nghịch biến trên $\left(a;b\right)\Leftrightarrow x^2+\left(m-1\right)x+\left(m-2\right)\le 0\,\forall x\in\left(a;b\right)$

$\Delta=m^2-6m+9$

TH1: $\Delta\le 0\Rightarrow x^2+\left(m-1\right)x+\left(m-2\right)\ge 0\quad\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne 3\Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1,x_2\left(x_2>x_1\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $\left(x_1;x_2\right)$.

Yêu cầu đề bài:

$\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 > 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P > 9$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(m-2) > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Câu 12: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2^{x^3 - x^2 + mx}$ đồng biến trên $[1,2]$.

A. $m > \frac{1}{3}$. **B.** $m \geq \frac{1}{3}$. **C.** $m \geq -1$. **D.** $m > -8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = (3x^2 - 2x + m)2^{x^3 - x^2 + mx}\ln 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên

$[1,2] \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in [1,2] \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m \geq 0,\ \forall x \in [1,2]\ (*)$

Vì $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ có $a = 3 > 0,\ -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} < 2$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < 1 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 3m \leq 0 \\ \begin{cases} 1 - 3m > 0 \\ \frac{1}{3} < 1 \\ \frac{m}{3} - \frac{2}{3} + 1 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq -1$$

Câu 13: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU). Biết đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(\frac{3}{2};2)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$x^3 - 3x^2 + 1 = (3m-1)x + 6m + 3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - (3m-1)x - 6m - 2 = 0$.

Giả sử phương trình $x^3 - 3x^2 - (3m-1)x - 6m - 2 = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ (1).

Mặt khác theo viet ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $x_2 = 1$.

Tức $x = 1$ là một nghiệm của phương trình trên. Thay $x = 1$ vào phương trình ta được $m = -\frac{1}{3}$.

Thử lại $m=-\frac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 14: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU). Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Tiệm cận đứng:

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)}=-\infty$

Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3\Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

Câu 15: (SỞ GD HÀ NỘI). Cho $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

A. $m-n^2=2018$. **B.** $m-n^2=-2018$. **C.** $m-n^2=1$. **D.** $m-n^2=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\sqrt{\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2(x+1)^2}}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1+\frac{1}{x(x+1)}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

Suy ra : $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$

$\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\dfrac{m}{n}$ (lấy ln hai vế)

$\Leftrightarrow 2018-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{m}{n} \Leftrightarrow \dfrac{2018^2-1}{2018}=\dfrac{m}{n}$

Ta chứng minh $\dfrac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của 2018^2-1 và 2018

Khi đó ta có $2018^2-1 \vdots d$, $2018 \vdots d \Rightarrow 2018^2 \vdots d$ suy ra $1 \vdots d \Leftrightarrow d=\pm 1$

Suy ra $\dfrac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m=2018^2-1, n=2018$.

Vậy $m-n^2=-1$.

Câu 16: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **B.** $m\le-\sqrt{2}$. **C.** $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **D.** $m\ge\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y=\sin x+\cos x+mx$

$y'=\cos x-\sin x+m$

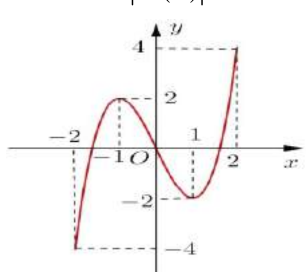
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow m\ge \sin x-\cos x, \forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)$, với $\varphi(x)=\sin x-\cos x.$

Ta có: $\varphi(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}.$

Do đó: $\max\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)=\sqrt{2}$. Từ đó suy ra $m\ge\sqrt{2}.$

Câu 17: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có số nghiệm thực nhiều nhất.

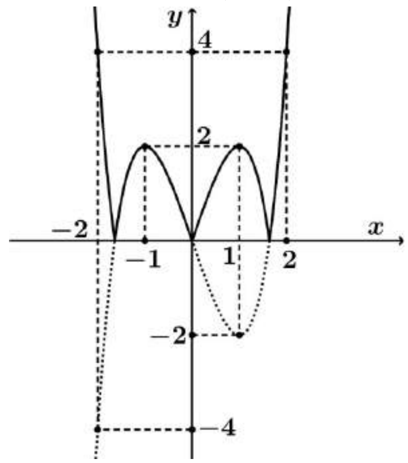


A. 3 . **B.** 6 . **C.** 4 . **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là:



Từ đồ thị ta thấy rằng, với m thỏa $0<m<2$ thì phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có số nghiệm nhiều nhất là 6.

Câu 18: (BIÊN HÒA – HÀ NAM). Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right]\setminus\left\{-1\right\}$ **B.** $m\in\left(-1;2\right]\setminus\left\{-1\right\}$ **C.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ **D.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

Giải

Chọn D.

$y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-m\right\}$ và $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{\left(x+m\right)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-m<1\\ x^2+2mx-4m\ge 0,\forall x\in\left[1;+\infty\right)\end{cases}$

$x^2+2mx-4m\ge 0,\forall x\in\left[1;+\infty\right)\Leftrightarrow 2m\left(x-2\right)\ge -x^2,\forall x\in\left[1;+\infty\right)$ (1)

Do $x=2$ thỏa bất phương trình $2m\left(x-2\right)\ge -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x\ne 2$.

Khi đó $\left(1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2m\le\dfrac{-x^2}{x-2},\forall x\in\left[1;2\right)\\ 2m\ge\dfrac{-x^2}{x-2},\forall x\in\left(2;+\infty\right)\end{cases}$ (2)

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2}{x-2}$ trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{2\right\}$ có $f'\left(x\right)=\dfrac{-x^2+4x}{\left(x-2\right)^2}$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$+\infty$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2m \le 1 \\ 2m \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}.$$

Cách khác

$y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases}$

$$x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta \le 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 4m \le 0 \\ \begin{cases} m^2 + 4m > 0 \\ -m + \sqrt{m^2 + 4m} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le m \le 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \\ m \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp với đk $m > -1$ ta được $-1 < m \le \dfrac{1}{2}$.

Câu 19: (CHUYÊN ĐHSP HN). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Chọn D.

Ta có hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên tồn tại số $M > 2$ sao cho $y(M) > 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên tồn tại số $m < -2$ sao cho $y(m) < 0$; $y(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$ và $y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Do $y(m).y(-2) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m; -2)$.

$y(-2).y(2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$.

$y(2).y(M)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2;M)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Câu 20: (CHUYÊN ĐHSP HN). Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $\{0\}$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **C.** $\varnothing$ **D.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Chọn A.

Có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$. Nên hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$. Vậy ta tìm điều kiện để hàm số không có tiệm cận đứng .

Xét phương trình: $(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} mx^2-2x+1=0 & (1) \\ 4x^2+4mx+1=0 & (2)\end{array}\right.$

TH1: Xét $m=0$, ta được $y=\dfrac{2x-1}{(-2x+1)(4x^2+1)}=-\dfrac{1}{4x^2+1}$ (thỏa ycbt)

TH2: Xét $m\neq 0$. Có: $\Delta_1=1-m$ và $\Delta_2=4m^2-4$

Th2a. Cả 2 phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases}1-m<0\\ 4m^2-4<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ -1<m<1\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$

Th2b: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $m>1$)

Th2c: (2) vô nghiệm, (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $-1<m<1$)

Câu 21: (NGÔ SĨ LIÊN). Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi

A. $m=2$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m<0$.

Chọn B

Cách 1: Với $m=0$ thì $y=0$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y=0$ khi $x=1$.

Với $m\ne 0$.

Đặt $x=\tan t$, ta được $y=\dfrac{m}{2}.\sin 2t$. Với $x\in[-2;2]$ thì $t\in[-\arctan 2;\arctan 2]$.

Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ tương ứng với $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi $m>0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\dfrac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi $m<0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\dfrac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=-\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $m\ge 0$ thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Ta có $y'=\dfrac{m\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$,

TH1: $m=0\Rightarrow y=0$ là hàm hằng nên cũng coi GTLN của nó bằng 0 khi $x=1$

TH2: $m\ne 0$. Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\ (n)\\ x=1\quad (n)\end{array}\right.$

Vì hàm số đã cho liên tục và xác định nên ta có hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y(1)\ge y(-2)\\ y(1)\ge y(2)\\ y(1)\ge y(-1)\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 0\Rightarrow m>0$ (do $m\ne 0$)

Vậy $m\ge 0$

Chú ý: Ngoài cách trên trong TH2 $m\ne 0$, ta có thể xét $m>0$, $m<0$ rồi lập BBT cũng tìm được kết quả như trên.

Câu 22: (SỞ GD BẮC NINH). Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right]$. **B.** $m\in[5;6]$. **C.** $m\in\left(5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$. **D.** $m\in\left[5;\dfrac{23}{4}\right)\cup\{6\}$.

Hướng dẫn giải

+) $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

Điều kiện: $-1 \le x \le 2$

+) $(1) \Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2} = -x^2+x+m$

Đặt: $-x^2+x=t$; $f(x)=-x^2+x$; $f'(x)=-2x+1$

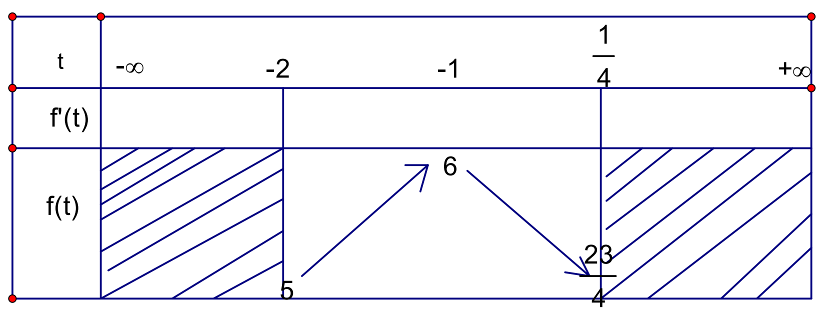
$f(-1)=2, f(2)=-2, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

$(1) \Leftrightarrow 3+2\sqrt{t+2}=t+m \Leftrightarrow 2\sqrt{t+2}=t+m-3 \Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\frac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}$. $f'(t)=0 \Rightarrow 1-\sqrt{t-2}=0 \Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên



+) $-x^2+x=t \Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4t>0 \Leftrightarrow t\le\frac{1}{4}$

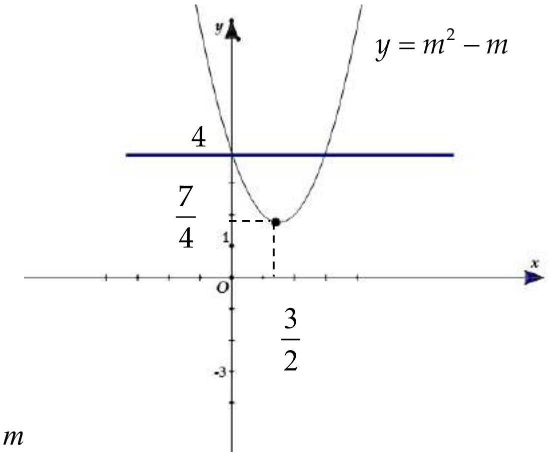
Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m\in[5;6]$. **Chọn B**

Câu 23: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3).** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+2017$. Định m để phương trình $y'=m^2-m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0;m]$

A. $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3};2\right)$. **B.** $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{3};2\right)$. **C.** $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2};2\right)$. **D.** $\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải



Chọn **D**

Ta có: $y' = m^2 - m \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = m^2 - m$

Đặt $f(x) = x^2 - 3x + 4 \ (P)$

Yêu cầu bài toán :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < m \\ \frac{7}{4} < m^2 - m \le m^2 - 3m + 4 \\ m^2 - m \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < m \\ \frac{7}{4} < m^2 - m \\ m^2 - m \le m^2 - 3m + 4 \\ m^2 - m \le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < m \\ \left[\begin{array}{l} m < \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \\ m > \frac{1+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ m \le 2 \\ 0 < m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2}; 2\right]$$

Câu 24: (LÊ HỒNG PHONG). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(16x^2 + 1) - (m+1)x + m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \infty)$.

A. $m \in (-\infty; -3]$. **B.** $m \in [3; +\infty)$. **C.** $m \in (-\infty; -3)$. **D.** $m \in [-3; 3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y = \ln(16x^2 + 1) - (m+1)x + m + 2$

$$y' = \frac{32x}{16x^2 + 1} - (m+1)$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{32x}{16x^2 + 1} - (m+1) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

__**Cách 1**__: $\frac{32x}{16x^2 + 1} - (m+1) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 32x - (m+1)(16x^2 + 1) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -16(m+1)x^2+32x-(m+1)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16(m+1)<0 \\ \Delta' = 16^2-16(m+1)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -16m^2-32m+240\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 3.$$

<u>Cách 2</u>: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{32x}{16x^2+1}\le m+1, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m+1\ge \max_{\mathbb{R}} g(x), \text{ với } g(x)=\frac{32x}{16x^2+1}$$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-512x^2+32}{\left(16x^2+1\right)^2} \qquad g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0; g\left(\frac{1}{4}\right)=4; g\left(-\frac{1}{4}\right)=-4$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$

Do đó: $m+1\ge 4\Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 25: (LÊ HỒNG PHONG) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ **B.** $m\in(-\infty;0)$ **C.** $m\in(1;+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y'=\dfrac{-\left(1+\cot^2 x\right)\left(m\cot x-1\right)+m\left(1+\cot^2 x\right)\left(\cot x-1\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)\left(1-m\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\cot x-1\neq 0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y'=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)\left(1-m\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}>0,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 0\vee m\ge 1 \\ 1-m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0 .$$

Câu 26: (NGUYỄN TRÃI – HD). Phương trình $2^{23x^3}.2^x-1024^{x^2}+23x^3=10x^2-x$ có tổng các nghiệm gần nhất với số nào dưới đây

A. $0,35$. **B.** $0,40$. **C.** $0,50$. **D.** $0,45$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $2^{23x^3}.2^x-1024^{x^2}+23x^3=10x^2-x\Leftrightarrow 2^{23x^3+x}+23x^3+x=2^{10x^2}+10x^2$

Hàm số $f\left(t\right)=2^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$2^{23x^3+x}+23x^3+x=2^{10x^2}+10x^2\Leftrightarrow 23x^3+x=10x^2\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{5\pm\sqrt{2}}{23}$

Tổng các nghiệm bằng $\dfrac{10}{23}\approx 0,4347$

✍ **Mẹo:** Khi làm trắc nghiệm có thể dùng "*Định lí Vi-ét cho phương trình bậc ba*"

Nếu phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì:

$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}$; $x_1x_xx_3=-\dfrac{d}{a}$

Câu 27: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ). Đường thẳng $d:y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A\left(0;4\right),B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M\left(1;3\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

C. $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị $\left(C\right):x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4=4$

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+\left(m+2\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \varphi\left(x\right)=x^2+2mx+m+2=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Với $x=0,$ ta có giao điểm là $A(0;4)$.

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0)=m+2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-m-2>0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A, B(x_B; x_B+2), C(x_C; x_C+2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C & =-2m \\ x_B.x_C & =m+2 \end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d(M,BC)=4.$

Phương trình d được viết lại là: $d: y=x+4 \Leftrightarrow x-y+4=0.$

Mà $d(M,BC)=d(M,d)=\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}.$

Do đó: $BC=\dfrac{8}{d(M,BC)}=\dfrac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2=32$

Ta lại có: $BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2=2(x_C-x_B)^2=32$

$\Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_B.x_C=16 \Leftrightarrow (-2m)^2-4(m+2)=16$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-24=0 \Leftrightarrow m=3; m=-2.$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m=-2.$

Câu 28: Cho hàm số $y=\frac{x}{2}+\sin^2 x, x\in[0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ *và* $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

B. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ *và* $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

D. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ *và* $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Hướng dẫn

Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=\frac{1}{2}+\sin 2x$. Giải $y'=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$

$,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x=\frac{7\pi}{12}$ và $x=\frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\le 1$. **B.** $m>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m|\ge 1$. **D.** $m<\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=1-m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\sin x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=0$ ta có $0\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m>0$ ta có $\sin x\le\dfrac{1}{m},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}\ge 1\Leftrightarrow m\le 1$

Trường hợp 3: $m<0$ ta có $\sin x\ge\dfrac{1}{m},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}\le -1\Leftrightarrow m\ge -1$

Vậy $|m|\le 1$

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4\le m\le\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $\begin{cases}m>3\\ m\ne 1\end{cases}$. **D.** $m\le 2$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=m-3+(2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(2m+1)\sin x\le 3-m,\forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=-\frac{1}{2}$ ta có $0\le \frac{7}{2},\forall x\in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m<-\frac{1}{2}$ ta có $\sin x\ge \frac{3-m}{2m+1},\forall x\in \mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1}\le -1$

$$\Leftrightarrow 3-m\ge -2m-1\Leftrightarrow m\ge -4$$

Trường hợp 3: $m>-\frac{1}{2}$ ta có:

$\sin x\le \frac{3-m}{2m+1},\forall x\in \mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1}\ge 1\Leftrightarrow 3-m\ge 2m+1\Leftrightarrow m\le \frac{2}{3}$. Vậy $m\in \left[-4;\frac{2}{3}\right]$

Câu 31: Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. **B.** $a+2b=2\sqrt{3}$. **C.** $a^2+b^2\le 4$. **D.** $a+2b\ge \frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=2+a\cos x-b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2-\sqrt{a^2+b^2}\le y'\le 2+\sqrt{a^2+b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y'\ge 0,\forall x\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\le 4.$$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 0$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\ge 12$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Cách 1: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

- Trường hợp 1:

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in \mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases}3>0\ (hn)\\ 36-3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 12$

- Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \le 0\,(*)$
  - ✓ Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))
  - ✓ Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 (vl) \\ \dfrac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m \text{ .Vậy } m \ge 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m \ge 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m \in [-5;2)$. B. $m \in (-\infty;2]$. C. $m \in (2,+\infty)$. D. $m \in (-\infty;-5)$.

Hướng dẫn

Chọn B. Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \ge m, \forall x \in (1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		$+$	0
g	2	$\nearrow$	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le 2$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 9$. **D.** $m = 1; m = -9$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \ hay \ m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 9 \end{array} \right.$$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

A. $1 \le m < 2$. **B.** $m \le 0; 1 \le m < 2$. **C.** $m \ge 2$. **D.** $m \le 0$.

Hướng dẫn

Chọn B.

+) Điều kiện $\tan x \ne m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ là $m \notin (0;1)$

+) $y' = \frac{2 - m}{\cos^2 x(\tan x - m)^2}$.

+) Ta thấy: $\frac{1}{\cos^2 x(\tan x - m)^2} > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right); m \notin (0;1)$

+) Để hs đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 > 0 \\ m \le 0; m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0,\forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in[1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1)\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x)\ge m\Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 37: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Hướng dẫn

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\dfrac{3}{2}=g(x),\forall x\in(1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x)=2x=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		+	0
g	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 38: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\frac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\frac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0, \forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0 \\ \frac{S}{2}=m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m\le 3$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\ge 0$. Phương trình thành: $2t=t^2-1+m \Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1, t\ge 0; f'(t)=-2t+2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \le 2$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5} = m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \le m < 3$.

Hướng dẫn

Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2+t-5 \Leftrightarrow t^2+t-5-m = 0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1+t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \ge 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t) = t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t) = 2t+1 > 0, \forall t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $-1\le m\le 3$. **B.** $0\le m\le 2$. **C.** $0\le m\le 3$. **D.** $-1\le m\le 2$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$. Điều kiện: $t\ge 1$.

Phương trình thành: $t^2+t-2m-2=0$ (*) . Khi $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$

$(*)\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{t^2+t-2}{2}=m$. Bảng biến thiên :

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0\le m\le 2$

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực?

A. $m\ge -\dfrac{7}{2}$. **B.** $m\ge \dfrac{3}{2}$. **C.** $m\ge \dfrac{9}{2}$. **D.** $\forall m\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Chọn C

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1\Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx$ (*)

Vì $x=0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$

Xét $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0\ \forall x\ge -\dfrac{1}{2};x\ne 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \geq \frac{9}{2}$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \geq 0$?

A. $m \leq -1$. **B.** $m \leq -\frac{4}{7}$. **C.** $m \geq -\frac{4}{7}$. **D.** $m \geq -1$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1 \leq x \leq 2$. Có $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}$

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3 + 3mx - 2 < -\frac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x \geq 1$?

A. $m < \frac{2}{3}$. **B.** $m \geq \frac{2}{3}$. **C.** $m \geq \frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Bpt $\Leftrightarrow 3mx < x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 2, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{2}{x} = f(x), \forall x \ge 1$.

Ta có $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{2}{x^2} \ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} > m$

Câu 45: Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} \ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn

Chọn C

Điều kiện: $-2 \le x \le 4$. Xét $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x) = \dfrac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x) \ge f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1;4] \Rightarrow a+b = 5$.

Câu 46: Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

Hướng dẫn

Chọn A.

Điều kiện: $1 \le x \le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2+2} + \sqrt{3-x}$

Xét $f(t) = \sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$ với $t \ge 0$. Có $f'(t) = \dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1)
$\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2;3]$

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m < -1$. **B.** $-1 \le m \le 0$. **C.** $m > 1$. **D.** $-1 \le m < 0$.

Hướng dẫn

Chọn B

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $y=x^2+\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu ($x=0$) mà không có cực đại $\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m+1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm số trùng phương ta có :

$$y' = 4(m+1)x^3 - 2mx = 4(m+1)x\left[x^2 - \frac{m}{2(m+1)}\right].$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow$ y' có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+1) > 0 \\ \dfrac{m}{2(m+1)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1 \le m \le 0$.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2-1)x + \dfrac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1+x_2) = 1$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -\dfrac{2}{3}$. **C.** $m = \dfrac{2}{3}$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn C

Ta có : $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2-1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$,

$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$ là tam thức bậc hai có $\Delta = 13m^2 - 4$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right. . \ (1)$$

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất .

A. $m = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

$y' = 4x^3 - 4(1 - m^2)x \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi và chỉ khi : $|m| < 1$

Tọa độ điểm cực trị

$A(0; m + 1) \quad B\left(\sqrt{1 - m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right) \quad C\left(-\sqrt{1 - m^2}; -m^4 + 2m^2 + m\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{1 - m^2}; 0\right)$

Phương trình đường thẳng BC : $y + m^4 - 2m^2 - m = 0$

$d(A, \mathrm{BC}) = m^4 - 2m^2 + 1$, $BC = 2\sqrt{1 - m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.d[A, BC] = \sqrt{1 - m^2}\left(m^4 - 2m^2 + 1\right) = \sqrt{\left(1 - m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$ $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$

Khi đó S = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right|$ = $\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng : $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

Ta có : $y=6x^2-6\left(m+1\right)x+6m$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là : $m\ne 1$

Ta có : $A\left(1;3m-1\right)$ $B\left(m;-m^3+3m^2\right)$

Hệ số góc đt AB là : $k=-\left(m-1\right)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 :

$$y-\frac{y'.y''}{18a}=2x^3-3\left(y+1\right)x^2+6yx-\frac{\left(6x^2-6\left(y+1\right)x+6y\right)\left(12x-6\left(y+1\right)\right)}{36}$$

Bước 3 : Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả : $1001000-9980001.i$. Hay : $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là : $y = m^2 - m - (m-1)^2 x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Câu 51: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y = x - 1\ (d)$.

A. $m = 0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số có 2 cực trị $m > -3$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$, ta có: $x_1 + x_2 = 2$

Bấm máy tính:

$$x^3 - 3x^2 - mx + 2 - (3x^2 - 6x - m)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{x=i,\, m=A=1000}$$

$$-\frac{994}{3} - \frac{2006}{3}i = -\frac{1000-6}{3} - \frac{2000+6}{3}i = -\frac{2m+6}{3}x - \frac{m-6}{3}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1; -\dfrac{2m+6}{3}x_1 - \dfrac{m-6}{3}\right)$; $B\left(x_2; -\dfrac{2m+6}{3}x_2 - \dfrac{m-6}{3}\right)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1; -m)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y = -\dfrac{2m+6}{3}x - \dfrac{m-6}{3}\ (\Delta)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta // d \ or\ \Delta \equiv d \\ I \in d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{2m+6}{3} = 1 \\ -m = 1 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{9}{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m = 0$.

Câu 52: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.
A. $m = \pm 1$. **B.** $m = 1$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m = -1$.

Hướng dẫn

Chọn A

$y' = y = 4x^3 - 4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0; m^4 + 1\right), B\left(-m; 1\right), C\left(m; 1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có:

A, O, I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Câu 53: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.
A. $m < -1$. **B.** $m > 2$.

C. $m \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(2; +\infty\right)$. **D.** Không tồn tại m.

Hướng dẫn

Chọn B

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là $A\left(0; m\right), B\left(-\sqrt{m}; m - m^2\right), C\left(\sqrt{m}; m - m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0; m - m^2\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p = AB + BC + AC = 2\left(\sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4} + \sqrt{m}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4} - \sqrt{m}\right)}{m^4} > 1$ (vì $m > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4} - \sqrt{m}\right) > m^2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^5} > m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r = \dfrac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}} \Rightarrow r = \dfrac{4m^2}{4 + \sqrt{16 + 16m^3}} = \dfrac{m^2}{1 + \sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3} - 1\right)}{m^3} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} - 1 > m$

$\sqrt{1+m^3} > m + 1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3} > m+1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m = -1$.
B. $m = 1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = -\dfrac{17}{11}$.
D. $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{17}{11}$.

Hướng dẫn

Chọn D Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0; 3m-3); B(2; -m-3)$.

Ta có : $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20 \Leftrightarrow 11m^2+6m-17=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 55: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3}$ cm B. $4\sqrt{3}$ cm C. 24 cm D. $8\sqrt{3}$ cm

Hướng dẫn

Chọn A.

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: *a, b*; 0 <*a, b*≤ 48

Ta có: $ab=48 \Leftrightarrow b=\dfrac{48}{a}$. Chu vi: $P(a)=2\left(a+\dfrac{48}{a}\right)$

$P'(a)=2\left(1-\dfrac{48}{a^2}\right)$; $P'(a)=0 \Leftrightarrow a=4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0		$4\sqrt{3}$		48
$P'(a)$		–	0	+	
$P(a)$		$\searrow$	$16\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a+b\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$
  $\Leftrightarrow$ chu vi nhỏ nhất: $2(a+b)=16\sqrt{3}$
- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 56: Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số *a* ($a>0$)?

A. $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Cạnh góc vuông $x, 0 < x < \frac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$. $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2-2ax}}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 57: Cho hàm số $y = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A. – 4. **B.** – 5 . **C.** – 6 . **D.** 3.

Hướng dẫn

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = |\cos x|, 0 \le t \le 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{2t^2 + t + 1}{t+1}, 0 \le t \le 1$

$f'(t) = \frac{2t^2 + 4t}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \notin [0;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = 1, f(1) = 2$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 1, \max\limits_{\mathbb{R}} y = 2$

Câu 58: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M = m + \frac{2}{3}$. **B.** $M = m + 1$. **C.** $M = \frac{3}{2}m$. **D.** $M = m + \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Đặt $t = \sin x, -1 \le t \le 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t) = \frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [-1;1] \\ t = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = 1, f(-1) = 0, f(1) = \frac{2}{3}$. Vậy $M = 1, m = 0$

Câu 59: Cho hai số thực $x \ne 0, y \ne 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là:

A. $M = 0$. **B.** $M = 0$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 16$.

Hướng dẫn

Chọn D.

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Đặt $x = ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow (t+1)ty^3 = (t^2-t+1)y^2$

Do đó $y = \frac{t^2-t+1}{t^2+t}; x = ty = \frac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-3t^2+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 60: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{3x+9}$ có đường tiệm cận đứng là $x = a$ và đường tiệm cận ngang là $y = b$. Giá trị của số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $m \ge a + b$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -2.

Hướng dẫn

Chọn D

Ta có đường tiệm cận đứng là $x=-3$ và đường tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{3}$

Nên $a=-3, b=\frac{1}{3}$

Do đó $m\ge a+b \Leftrightarrow m\ge -\frac{8}{3} \Rightarrow m=-2$

Câu 61: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), *d* là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (*C*). Giá trị nhỏ nhất của *d* là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Hướng dẫn

Chọn D

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\ne 2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ \left(d_1\right)$, $y-2=0\ \left(d_2\right)$.

Ta có $d=d\left(M,d_1\right)+d\left(M,d_2\right)=\left|x_0-2\right|+\frac{1}{\left|x_0-2\right|}\ge 2$

Câu 62: Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tất cả các giá trị của tham số m để $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$ là

A. $m>1$ hoặc $m<-1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>0$. **D.** $m>1$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(-3m+1)x-3m-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \underbrace{x^2+(-3m+1)x-3m-2}_{g(x)}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ -6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi $x_1 = 1$ còn x_2, x_3 là nghiệm phương trình (1) nên theo Viet ta có $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3m - 1 \\ x_2 x_3 = -3m - 2 \end{cases}$. Vậy

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15 \Leftrightarrow 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 15$

$\Leftrightarrow (3m-1)^2 + 2(3m+2) - 14 > 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \vee m < -1$

Vậy chọn $m > 1 \vee m < -1$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra ngay trên đáp án

+ Với $m = -2$, ta giải phương trình bậc ba: $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x - \frac{4}{3} = 0$ thu được 3 nghiệm $x_1 = -6.37..., x_2 = 1, x_3 = -0.62...$ Ta chọn những giá trị nhỏ hơn các nghiệm này và kiểm tra điều kiện của bài toán.

  Cụ thể ta tính $(-6.4)^2 + 1^2 + (-0.63)^2 = 42.3569 > 15 \Rightarrow$ loại C, D.

+ Với $m = 2$, ta làm tương tự thu được 3 nghiệm $x_1 = 6.27..., x_2 = 1, x_3 = -1.27...$

  Tính $6.2^2 + 1^2 + (-1.3)^2 = 41.13 > 15 \Rightarrow$ loại B.

Vậy chọn $m > 1 \vee m < -1$.

Câu 63: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$. Hỏi giá trị của $x_0 + 2y_0$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

- Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0 - 1}{2(x_0 + 1)}\right) \in (C)$ với $x_0 \neq -1$ là điểm cần tìm.
- Gọi Δ tiếp tuyến của (C) tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)} = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0+1)}.$$

- Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2}; 0\right)$ và $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0+1)^2}\right)$.
- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6}; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do G thuộc đường thẳng $4x + y = 0 \Rightarrow -4.\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0+1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(x_0+1)^2} \text{ (vì } A, B \text{ không trùng } O \text{ nên } x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 + 1 = \frac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

- Vì $x_0 > -1$ nên chỉ chọn $x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x_0 + 2y_0 = -\frac{7}{2}$.

Câu 64: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d: y = x + m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -5$.

Hướng dẫn

Chọn A.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ g(x) = 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có $x_1 + x_2 = -m; \quad x_1x_2 = \frac{-m-1}{2}$.
- Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

- Ta có $y'=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}$, nên tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$k_1=-\dfrac{1}{(2x_1-1)^2}$ và $k_2=-\dfrac{1}{(2x_2-1)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$

$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4(m+1)^2-2\le -2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 65: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất thì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\ne -1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

- $d(I,\Delta)=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.

- Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow (x_0+1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\,(L)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\,(N)\end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\,(L) \\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\,(N) \end{array}\right.$$

Câu 66: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C)$, $(x_0\neq-1)$, $I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0+1;1)$.
- Ta có $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|}$, $IB=2|x_0+1|\Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là $S_{IAB}=pr$, suy ra

$$r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

.

- Suy ra

$$r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow|x_0-1|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3} \\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.
- $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3} \\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right| = \sqrt{6}$.

Câu 67: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của (C) luôn cắt hai tiệm cận của (C) tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Lấy điểm $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right) \in (C)$ với $m \neq 2$. Ta có $y'(m) = -\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d: y = -\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m) + 2 + \dfrac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B(2m-2;2)$.

Ta có $AB^2 = 4\left[(m-2)^2 + \dfrac{1}{(m-2)^2}\right] \geq 8$, suy ra $AB \geq 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(m-2)^2 = 1$, nghĩa là $m = 3$ hoặc $m = -1$.

Câu 68: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Điểm $M\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d = \dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\dfrac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\dfrac{3}{2}$:

- Với $0 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow y > \frac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \frac{3}{2}$
- Với $-\frac{3}{2} < x < 0; y > 0 \Rightarrow d = -x + x + 1 + \frac{1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}; d' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d = y(0) = \frac{3}{2}$.

Câu 69: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x - 2y - 6 = 0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$.

B. $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$.

D. $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - 3$ suy ra $\Delta: y = -2x + m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \underbrace{2x^2 - (m+3)x + 2m + 4}_{h(x)} = 0 \end{cases}\cdot$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ h(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 23 > 0 \\ -6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 5 - 4\sqrt{3} \\ m > 5 + 4\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = 2x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{m+3}{4} \\ y_I = \frac{m+3}{2} + m \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4}; \frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x-2y-6=0$ khi $I\in d \Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4}-2.\dfrac{3m+3}{2}-6=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

Câu 70: (CHUYÊN QUANG TRUNG). Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào ?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.
- Hàm số đạt cực trị tại $x=2$ thì $y'(2)=0 \Rightarrow \dfrac{4+4m+m^2-1}{(2+m)^2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.
- Với $m=-3 \Rightarrow y'=\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $m=-3$ ta nhận.
- Với $m=-1 \Rightarrow y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ nên $m=-1$ ta loại.

Câu 71: **(CHUYÊN VINH – L2).** Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là

A. $\min P=-80$. **B.** $\min P=-91$. **C.** $\min P=-83$. **D.** $\min P=-63$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có

$$x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4(x+y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\ge 4 \\ x+y\le 0 \end{array}\right.$$

Mặt khác $x+y=2(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3})\le 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x+y\le 8 \Rightarrow x+y\in[4;8]$

Xét biểu thức

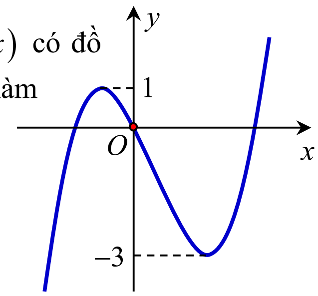
$P=4(x^2+y^2)+15xy=4(x+y)^2+7xy\ge 16(x+y)+7xy=7x(y+3)+16y-5x$.

Mà $\begin{cases} y+3\ge 0 \\ y\ge 4-x \end{cases} \Rightarrow P\ge 16(4-x)-5x=64-21x$,

kết hợp với $x+y\ge 4\Rightarrow x\in[3;7]\Rightarrow 64-21x\ge -83$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -83

Câu 72: **(CHUYÊN VINH – L2).** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị là



A. $m\le -1$ hoặc $m\ge 3$. **B.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$.
C. $m=-1$ hoặc $m=3$. **D.** $1\le m\le 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ gồm hai phần:

- Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ nằm phía trên trục hoành;
- Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y=f(x)+m$. Khi đó hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+m\le 0 \\ -3+m\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 73: **(CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – L2).** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi

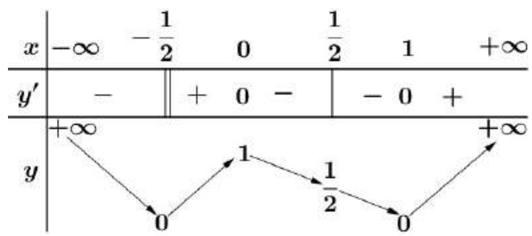
A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $\frac{1}{2}\le m<1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $0<m\le 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$, suy ra $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$.

NX: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(x)|=m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\dfrac{1}{2}<x_4$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}<m<1$.

Câu 74: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4).** Cho hàm số $y=f(x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$f(x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=(x^3-x)(x^4-13x^2+36)=x^7-14x^5+49x^3-36x$

$f'(x)=7x^6-70x^4+147x^2-36$

Đặt $t=x^2, t\geq 0$ Xét hàm $g(t)=7t^3-70t^2+147t-36$

Do phương trình $g'(t)=21t^2-140t+147=0$ có hai nghiệm dương phân biệt và $g(0)=-36<0$ nên $g(t)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Do đó $f'(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 75: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4).** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=(m-x^3)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;\ 1)$.

A. $m\geq -2$. **B.** $m\leq -2$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Tập xác định: $D=(-\infty;\ 1]$. $y'=-3x^2\sqrt{1-x^3}-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.(m-x^3)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}(3x^3-m-2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}} \end{array}\right.$.

* Trường hợp 1: $m = -2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1
y'		$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD, ta có $y' < 0,\ \forall x \in (0;\ 1) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$.

* Trường hợp 2: $m \neq -2$.

Để hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}} < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Vậy $m \leq -2$ thì hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$.

Câu 76: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4).** Phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi; 2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có hàm số $y = 2017^{\sin x} - \sin x - \sqrt{2 - \cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Xét hàm số $y = 2017^{\sin x} - \sin x - \sqrt{2 - \cos^2 x}$ trên $[0; 2\pi]$.

Có $y' = \cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017 - \cos x - \dfrac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2 - \cos^2 x}} = \cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017 - 1 - \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}\right)$

Do vậy trên $[0; 2\pi]$, $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2}$.

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2017 - 1 - \sqrt{2} > 0$; $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2017} - 1 - \sqrt{2} < 0$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	0

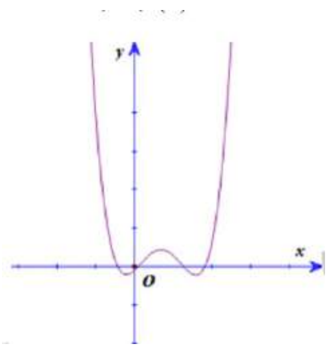
Vậy trên $[0; 2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y(\pi) = 0$, nên trên $[0; 2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Suy ra trên $[-5\pi; 2017\pi]$ phương trình có đúng $2017 - (-5) + 1 = 2023$ nghiệm.

Bài 15. MỘT SỐ CÂU HỎI TNKQ HAY VÀ MỚI

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f\left(x\right)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)$ và trục Ox.

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Đáp án A

Phương pháp:

Đặt $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$, tính đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$

Xét hàm số $h\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}$ và chứng minh $f''\left(x\right).f\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2<0\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}$

Cách giải: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt nên

$$f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$
$$+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$$

$$f'\left(x\right)=f\left(x\right)\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}\Rightarrow f'\left(x\right)\neq 0\,\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}$$

Đặt $h\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}$

Ta có

$$h'\left(x\right)=\frac{f''\left(x\right).f\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2}{f^2\left(x\right)}=\frac{-1}{\left(x-x_1\right)^2}+\frac{-1}{\left(x-x_2\right)^2}+\frac{-1}{\left(x-x_3\right)^2}+\frac{-1}{\left(x-x_4\right)^2}<0\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}$$

$$\Rightarrow f''\left(x\right).f\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2<0\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}$$

$$\Rightarrow g\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-f''\left(x\right).f\left(x\right)>0\forall x\notin\left\{x_1;x_2;x_3;x_4\right\}$$

Khi $f\left(x\right)=0\Rightarrow f'\left(x\right)\neq 0\Rightarrow g\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-f''\left(x\right).f\left(x\right)\neq 0$

Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)$ không cắt trục Ox.

Câu 2. Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$

A. $m\ge\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $m\ge-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Đáp án A

Phương pháp: Chia cả 2 vế cho 3^x, đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$, tìm điều kiện của t.

Đưa về bất phương trình dạng $m\ge f(t)\forall t(a;b)\Rightarrow m\ge\max\limits_{t\in(a;b)}f(t)$

Cách giải :

$$m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0\Leftrightarrow 3m+(3m+2)\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0$$

Ta có $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}.\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}=1\Rightarrow\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x.\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x=1$

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$ $\left(0<t<1\forall x\in(-\infty;0)\right)$, khi đó phương trình trở thành

$$3m+(3m+2)\frac{1}{t}+t>0\Leftrightarrow\frac{t^2+3mt+(3m+2)}{t}>0\Leftrightarrow t^2+3mt+(3m+2)>0\forall t\in(0;1)$$

$$\Leftrightarrow 3m(t+1)+t^2+2>0\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow 3m>\frac{-t^2-2}{t+1}=f(t)\forall t\in(0;1)$$

$$\Rightarrow 3m\ge\max_{t\in(0;1)}f(t)$$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-2t(t+1)-\left(-t^2-2\right)}{(t+1)^2}=\dfrac{-t^2-2t+2}{(t+1)^2}=0\Rightarrow t=-1+\sqrt{3}$

$f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\dfrac{-6+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2-2\sqrt{3}=\max\limits_{t\in(0;1)}f(t)$. Vậy $3m\ge2-2\sqrt{3}\Rightarrow m\ge\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2+y_1=-5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 4 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 9

Đáp án C

Phương pháp :

+) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $m-2$:

$y = f'(m-2)(x-m+2)+y(m-2)(d)$

+) Xác định các giao điểm của d và các đường tiệm cận $\Rightarrow_2; y_1$

+) Thay vào phương trình $x_2 + y_1 = -5$ giải tìm các giá trị của m.

Cách giải: TXĐ: $D = R \setminus \{-2\}$

Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(m-2) = \dfrac{3}{m^2}; y(m-2) = \dfrac{m-2-1}{m-2+2} = \dfrac{m-3}{m}$

=>Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $m-2$ là:

$y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+\dfrac{m-3}{m}(d)$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có đường TCN $y = 1$ và tiệm cậm đứng $x = -2$

$*y(-2) = \dfrac{3}{m^2}(-m)+\dfrac{m-3}{m} = \dfrac{-3}{m}+\dfrac{m-3}{m}+\dfrac{m-6}{m} \Rightarrow A\left(-2;\dfrac{m-6}{m}\right) \Rightarrow y_1 = \dfrac{m-6}{m}$

$*1 = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+\dfrac{m-3}{m} \Rightarrow \dfrac{3(x-m+2)}{m^2} = 0$

$\Leftrightarrow x-m+2 = m \Leftrightarrow x = 2m-2 \Rightarrow B(2m-2;1) \Rightarrow x_2 = 2m-2$

$\Rightarrow x_2 + y_1 = 2m-2+\dfrac{m-6}{m} = -5 \Leftrightarrow 2m^2-2m+m-6 = -5m$

$\Leftrightarrow 2m^2+4m-6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right. \Rightarrow S = \{1;-3\} \Rightarrow 1^2+(-3)^2 = 10$

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right|$

A. $2\sqrt{2}-1$ **B.** $\sqrt{2}+1$ **C.** $2\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

Đáp án A

Phương pháp: Đặt $\sin x = a, \cos x = b$

Cách giải: Đặt $\sin x = a, \cos x = b$ ta có $a^2+b^2 = 1$

Khi đó $y = \left|a+b+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right| = \left|\dfrac{ab(a+b)+a^2+b^2+a+b}{ab}\right| = \left|\dfrac{ab(a+b)+a+b+1}{ab}\right|$

Đặt $t=a+b\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow t^2=a^2+b^2+2ab=1+2ab\Rightarrow ab=\dfrac{t^2-1}{2}$, khi đó ta có :

$y=\left|t+\dfrac{2(t+1)}{t^2-1}\right|=\left|t+\dfrac{2}{t-1}\right|=\left|t-1+\dfrac{2}{t-1}+1\right|$

Nếu $t-1>0\Rightarrow t-1+\dfrac{2}{t-1}+1\ge 2\sqrt{2}+1\Rightarrow y\ge 2\sqrt{2}+1$

Nếu

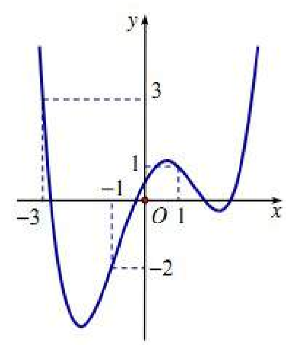
$t-1<0\Rightarrow \dfrac{1}{t-1}+1-t\ge 2\sqrt{2}\Rightarrow \dfrac{1}{t-1}+t-1\le 2\sqrt{2}\Rightarrow \dfrac{1}{t-1}+t-1+1\le 1-2\sqrt{2}\Rightarrow y\ge 2\sqrt{2}-1$

Vậy $y\ge 2\sqrt{2}-1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (1-t)^2=2\Leftrightarrow t=1-\sqrt{2}\,(t<0)$

$\Rightarrow \sin x+\cos x=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



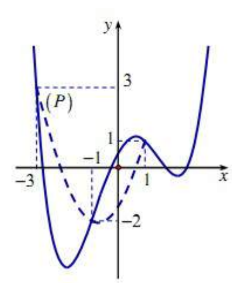
A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-1)$ **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)$

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)$ **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=\dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$

Đáp án A

Ta có $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+2018\Rightarrow g'(x)=f'(x)-x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$

Căn cứ vào đồ thị $y=f'(x)$ ta có $\begin{cases} f'(-1)=-2\\ f'(1)=1\\ f'(-3)=3\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} g'(-1)=0\\ g'(1)=0\\ g'(-3)=0\end{cases}$



Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đường màu đỏ), ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3;3),(-1;-2),(1;1)$ với đỉnh $I\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{33}{16}\right)$

Rõ ràng

• Trên khoảng $\left(-1;1\right)$ thì $f'\left(x\right) > x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$, nên $g'\left(x\right) > 0\ \ \forall x \in \left(-1;1\right)$

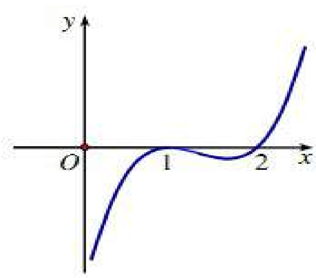
• Trên khoảng $\left(-3;-1\right)$ thì $f'\left(x\right) < x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$, nên $g'\left(x\right) < 0\ \ \forall x \in \left(-3;-1\right)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g'\left(x\right)$ trên $\left[-3;1\right]$ như sau:

x	-3		-1		1
g'(x)		$-$	0	$+$	0
g(x)		↘		↗	

Vậy $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right) = g\left(-1\right)$

Câu 6. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



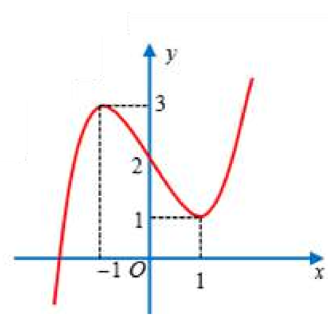
A. $\left(2;+\infty\right)$ **B.** $\left(1;2\right)$

C. $\left(0;1\right)$ **D.** $\left(0;1\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

Đáp án A

Dựa vào đồ thị $f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right) > 0$ khi $x \in \left(2;+\infty\right) \Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$

Câu 7. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x\right) = \ln\left(2m-1\right)$ có ba nghiệm phân biệt?



A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 6.

Đáp án A.

Phương trình $f(x) = \ln(2m-1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 1 \le \ln\left(2m-1\right) \le 3 \Leftrightarrow m \in \left[\dfrac{e+1}{2};\dfrac{e^3+1}{2}\right] \xrightarrow{m\in Z} m \in \left\{2;3;4;...;10\right\}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x^2-1)^2(x+2)^3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2\right)$ là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án A

Ta có $f'\left(x^2\right)=2x^3\left(x^4-1\right)^2\left(x^2+2\right)^3$. Do đó hàm số có 1 cực trị.

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+m-1}{x-1}$ đạt cực trị tại các điểm x_1,x_2. Giá trị biểu thức $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Đáp án A

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{3x^2-6x+8-m}{\left(x-1\right)^2}$.

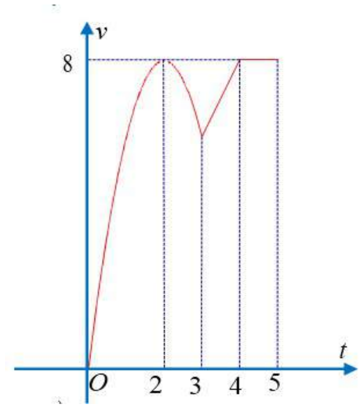
x_1,x_2 là 2 cực trị của hàm số thì $x_1,x_2\neq 1$ và là 2 nghiệm của phương trình $3x^2-6x+8-m=0$. Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{8-m}{3} \end{cases}$.

Ta có $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{3x_1^2-7x_1+m-1}{x_1-1}-\dfrac{3x_2^2-7x_2+m-1}{x_2-1}}{x_1-x_2}$

$$=\dfrac{\dfrac{3x_1^2-6x_1-x_1+m-1}{x_1-1}-\dfrac{3x_2^2-6x_2-x_2+m-1}{x_2-1}}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{2m-9-x_1}{x_1-1}-\dfrac{2m-9-x_2}{x_2-1}}{x_1-x_2}$$

$$=\dfrac{\dfrac{\left(2m-9\right)\left(x_2-x_1\right)+x_1-x_2}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}}{x_1-x_2}=\dfrac{10-2m}{\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}=\dfrac{10-2m}{x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1}=\dfrac{10-2m}{\dfrac{8-m}{3}-2+1}=6.$$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết S là tập các giá trị thực của m để hàm số $y=\left|2f(x)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Gọi a, b lần lượt là giá trị nguyên âm lớn nhất và giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tập S. Tính tổng $T=a+b$.



A. $T=2$ **B.** $T=1$ **C.** $T=-1$

Đáp án A

Ta có:

$y=|2f(x)+m|=\sqrt{(2f(x)+m)^2}$

$$=> y' = \frac{2.[2f(x)+m].2f'(\text{x})}{2|2f(x)+m|} = \frac{2f'(x)[2f(x)+m]}{|2f(x)+m|},\quad y'=0 => \left[\begin{array}{l} f'(x)=0(1) \\ f(x)=-\dfrac{m}{2}(2) \end{array}\right.$$

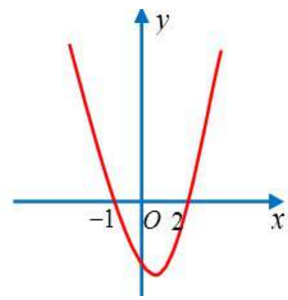
Bài toán cần 5 điểm cực trị => Tổng số nghiệm của (1) và (2) phải là 5

Đối với (1) => số nghiệm chính là số điểm cực trị. Nhìn vào đồ thị => có 3 cực trị

=> Phương trinh (2) phải có 2 nghiệm khác 3 nghiệm trên.

Nhìn vào đồ thị ta thấy => $\left[\begin{array}{l} -5 < \dfrac{-m}{2} \le -4 \\ \dfrac{-m}{2} \ge 3 \end{array}\right.$ <=> $\left[\begin{array}{l} 8 \le m < 10 \\ m \le -6 \end{array}\right.$ => a = -6 ; b = 8 =>a+b=2

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(3-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(0;2)$. **B.** $(-1;2)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(-2;-1)$.

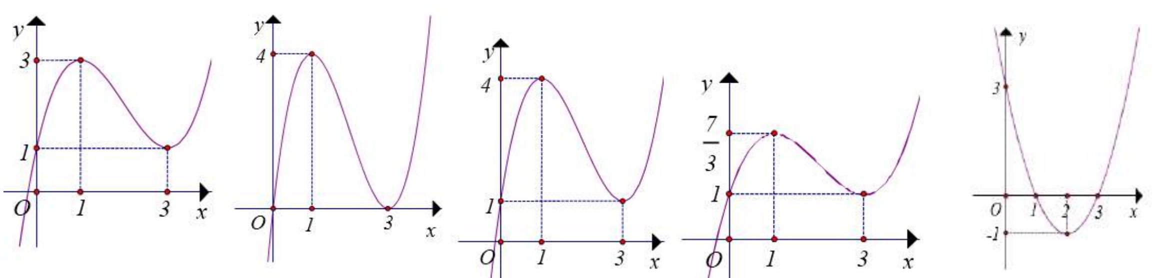
Đáp án D

Ta có $f'(x) = (x+1)(x-2)$

$\Rightarrow f'(3-x^2) = -2x(3-x^2+1)(3-x^2-2) = -2x(4-x^2)(1-x^2)$.

Lập bảng xét dấu ta được hàm số nghịch biến trên $(-2;-1)$.

Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số f (x). Biết F (x) là một nguyên hàm của f (x) và F (x) là một trong bốn đồ thị dưới đây



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

Hỏi F(x) là đồ thị thuộc hình nào?

A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Đáp án D.

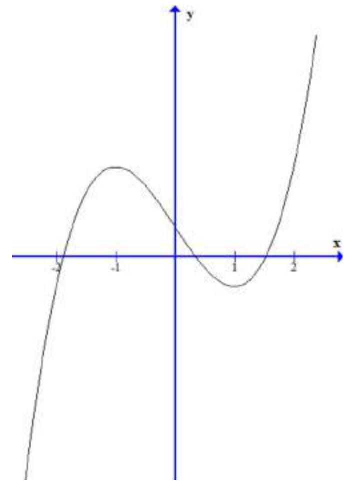
$$f(x) = a(x-1)(x-3) \xrightarrow{f(0)=3} a = 1 \to f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\rightarrow \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx = -\frac{4}{3} \rightarrow F(x)\Big|_1^3 = F(3) - F(1) = -\frac{4}{3}$$

→ Đồ thị của F (x) là hình 4.

Câu 13. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a - b + c > 1 \\ a + b + c < -1 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.



Đáp án D.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b + c + 1 < 0 \\ f(-1) = a - b + c - 1 > 0 \end{cases}$$

→ đồ thị hàm số có dạng như sau:

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-3;1]$ thoả mãn $f(-3) = 1, f(0) = 2, f(1) = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 < f(-2) < 2$. **B.** $2 < f(-2) < 3$. **C.** $f(-2) < 1$. **D.** $f(-2) > 3$.

Đáp án A

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-3;1]$ nên $f(-3) < f(-2) < f(0) \Rightarrow 1 < f(-2) < 2$.

Câu 15. Cho hàm số f (x) có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left(f(x)\right)^2 = 4$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

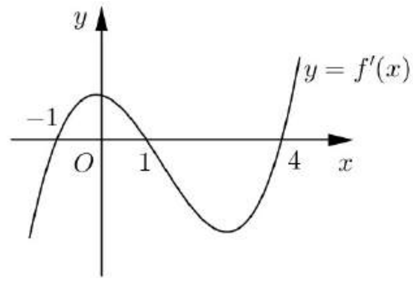
Đáp án B

Có $\left(f(x)\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -2 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$. Kẻ các đường thẳng $y = -2; y = 2$. Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

* $f(x) = -2$ có hai nghiệm

* $f(x) = 2$ có ba nghiệm. Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên



Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $y = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 2. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Đáp án D

Có $y' = f'(x+m) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m \le -1 \\ 1 \le x+m \le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -m-1 \\ -m+1 \le x \le -m+4 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f(x+m)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-m-1)$; $(-m+1;-m+4)$

Vậy theo yêu cầu bài toán có điều kiện

$$\left[\begin{array}{l} (0;2) \subset (-\infty;-m-1) \\ (0;2) \subset (-m+1;-m+4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m-1 \ge 2 \\ \begin{cases} -m+1 \le 0 \\ 2 \le -m+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ 1 \le m \le 2 \end{array}\right..$$

Vậy $m \in \{-9,...,-3;1;2\}$ có tất cả 9 số nguyên thỏa mãn.

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 + (m+3)x^2 - (2m+9)x + m + 6$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) có hai điểm cực trị và khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng nối hai điểm cực trị là lớn nhất.

A. $m = -6 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m = -3 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m = -3 \pm 6\sqrt{2}$. **D.** $m = -6 \pm 6\sqrt{2}$.

Đáp án A

Có $y' = 3x^2 + 2(m+3)x - (2m+9)$. Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là

$\Delta' = (m+3)^2 + 3(2m+9) > 0 \Leftrightarrow (m+6)^2 > 0 \Leftrightarrow m \ne -6$.

Khi đó đường thẳng nối hai điểm cực trị là $\Delta: y = \left(-\frac{2m^2}{9} - \frac{8m}{3} - 8\right)x + \frac{2m^2}{9} + \frac{8m}{3} + 9$.

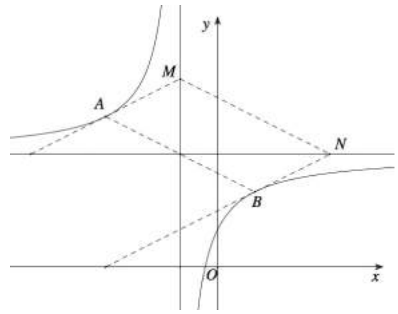
Đường thẳng này luôn đi qua điểm cố định $I(1;1)$.

Do đó $d(O,\Delta) \le OI = \sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt tại $\Delta \perp OI \Leftrightarrow \left(-\frac{2m^2}{9} - \frac{8m}{3} - 8\right).1 = -1 \Leftrightarrow m = -6 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

*Chú ý đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là $y = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Các tiếp tuyến này lần lượt cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại M, N (tham khảo hình vẽ bên). Tứ giác $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất bằng



A. 16. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 12.

Đáp án D

Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 3$. Tâm đối xứng của Theo giả thiết thì hoành độ của *A, B* là nghiệm của phương trình $y' = k \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} = k > 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{\frac{2}{k}} = -1 \pm a\left(a = \sqrt{\frac{2}{k}} > 0\right)$.

Tọa độ điểm $A\left(-1-a; 3+\frac{2}{a}\right), B\left(-1+a; 3-\frac{2}{a}\right)$

Tiếp tuyến tại A là $y = \frac{2}{a^2}(x+1+a) + 3 + \frac{2}{a} \Rightarrow M\left(-1; 3+\frac{4}{a}\right)$.

Tiếp tuyến tại B là $y = \frac{2}{a^2}(x+1-a) + 3 - \frac{2}{a} \Rightarrow N(2a-1; 3)$

Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \left(2a; -\frac{4}{a}\right)$. Do đó $AMNB$ là hình bình hành và có chu vi bằng

$$P = 2(AB + AM) = 2\left(\sqrt{4a^2 + \frac{16}{a^2}} + \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2}}\right) = 6\sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2}} \ge 6\sqrt{2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}}} = 12.$$

Dấu bằng đạt tại $a^2 = \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} > 0$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Đáp án B

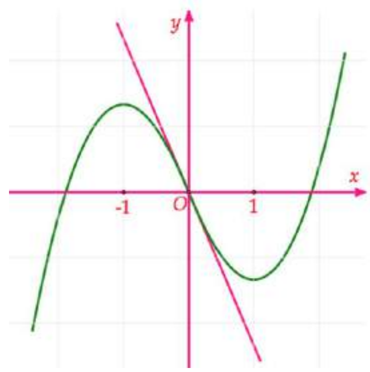
Với $u = x^2 - 2$ ta có $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) = 2xf'(x^2-2)$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần tìm tập nghiệm của bất phương trình:

$y' = 2xf'(x^2-2) < 0 \Leftrightarrow -2x\left(x^2-2-(-2)\right)\left(x^2-2-0\right)\left(x^2-2-2\right) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ -2 < x < -\sqrt{2} \\ 0 < x < \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đường thẳng ở hình vẽ bên là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f'(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $m < -2$. **B.** $-2 < m < 0$. **C.** $0 < m < 2$. **D.** $m > 2$.

Đáp án A

Dựa trên đồ thị ta có $f(0) = 0$ và phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$ là $y = f'(0)x$.

Dựa trên đồ thị có hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(0) = \tan\alpha < -2$ với α là góc tạo bởi tiếp tuyến và chiều dương của trục Ox

Do đó theo định nghĩa giá trị nhỏ nhất, ta có $m = \min f'(x) \leq f'(0) < -2$.

Câu 21. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $\left(0;\frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$.

Đáp án C

Xét $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ và $f(|x|) = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$.

Ta có $3 = 2a + 1 \Leftrightarrow a = 1$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$.

Vậy yêu cầu tương đương với: $f(x)$ có đúng một điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ có hai nghiệm thoả mãn $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m \le 0$.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln\left(m + 2\sin x + \ln\left(m + 3\sin x\right)\right) = \sin x$ có nghiệm thực ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Đáp án A

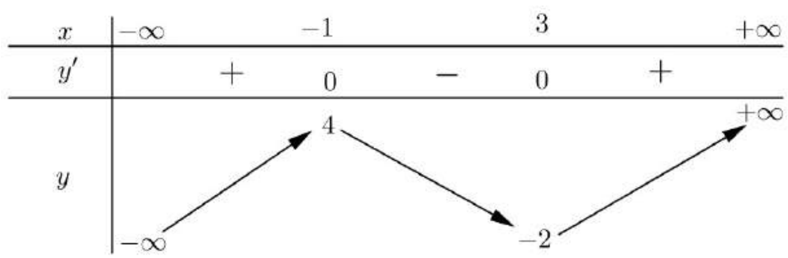
Phương trình tương đương với: $m + 2\sin x + \ln(m + 3\sin x) = e^{\sin x}$

$\Leftrightarrow m + 3\sin x + \ln(m + 3\sin x) = e^{\sin x} + \sin x \Leftrightarrow e^{\ln(m+3\sin x)} + \ln(m + 3\sin x) = e^{\sin x} + \sin x$

$\Leftrightarrow \ln(m + 3\sin x) = \sin x \Leftrightarrow m + 3\sin x = e^{\sin x} \Leftrightarrow m = e^{\sin x} - 3\sin x \in [e - 3; 3 + \frac{1}{e}]$.

Do đó $m \in \{0;1;2;3\}$. Có tất cả bốn số nguyên thoả mãn.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



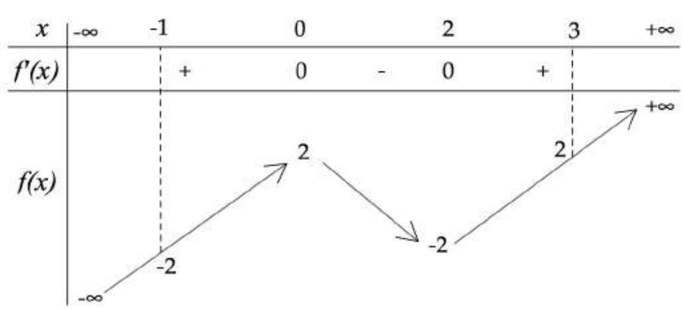
Hàm số $y = f(3 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(0;4)$.

Đáp án D

Ta có $y' = -f'(3 - x) > 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 3 - x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên



Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực ?

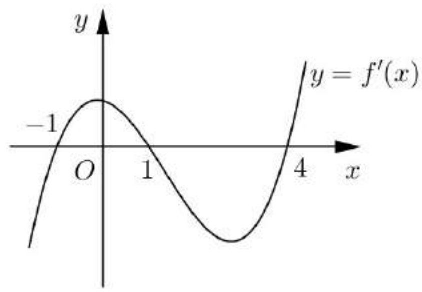
A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Đáp án D

Đặt $t = 2\sin x + 1 \in [-1;3], \forall x$ phương trình trở thành $f(t) = f(m)$ có nghiệm $t \in [-1;3]$.

Dựa trên bảng biến thiên để đường thẳng $y = f(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1;3]$ ta phải có $-2 \le f(m) \le 2 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$. Vì vậy $m \in \{1;2;3\}$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Đáp án C

Ta có: $y' = 2xf'(x^2); y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu của y' suy ra hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -1; x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = -2; x = 0; x = 2$.

Câu 26. Xét các số thực với $a \ne 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $a^2 b$ bằng

A. $\frac{4}{27}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

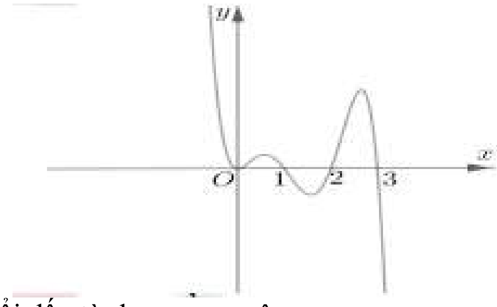
Đáp án A

Xét hàm số $f(x) = ax^3 - x^2 + b$ có $f'(x) = 3ax^2 - 2x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{2}{3a}$.

Để phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm ta phải có

$$f(0) f\left(\frac{2}{3a}\right) \le 0 \Leftrightarrow b\left[a\left(\frac{2}{3a}\right)^3 - \left(\frac{2}{3a}\right)^2 + b\right] \le 0 \Leftrightarrow b\left(b - \frac{4}{27a^2}\right) \le 0 \Leftrightarrow a^2 b \le \frac{4}{27} (b > 0).$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Các điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là



A. $x=0$ và $x=2$.

B. $x=1$ và $x=3$.

C. $x=2$.

D. $x=0$.

Đáp án B

Các điểm cực đại của hàm số là các điểm mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ các điểm đó là $x=1, x=3$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)g(x)$, trong đó $g(x)>0, \forall x$. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

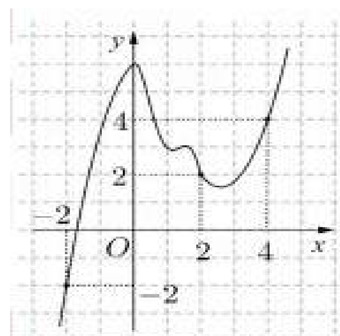
Đáp án C

Ta có $y'=2xf'(x^2)=2x(x^2)^2(x^2-1)(x^2-4)g(x^2)$

$$=2x^5(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)g(x^2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ -2<x<-1 \\ 0<x<1 \end{array}\right.$$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



Khi đó tổng $\int_0^4 f'(x-2)dx+\int_0^2 f'(x+2)dx$ bằng

A. 10. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 6.

Đáp án D Dựa vào đồ thị hàm số có $f(-2)=-2, f(2)=2, f(4)=4$.

Đặt $t=x-2 \Rightarrow dt=dx$ và $\int_0^4 f'(x-2)dx=\int_{-2}^2 f'(t)dt=f(2)-f(-2)=2-(-2)=4$ và đặt $t=x+2 \Rightarrow dt=dx$ và $\int_0^2 f'(x+2)dx=\int_2^4 f'(t)dt=f(4)-f(2)=4-2=2.$

Vậy $\int_0^4 f'(x-2)dx+\int_0^2 f'(x+2)dx=6.$

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)$. Hỏi hàm số $y=f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-2;1)$

Đáp án C

Ta có $y'=\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)'f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)=\dfrac{5(4-x^2)}{(x^2+4)^2}.\dfrac{5x}{x^2+4}\left(\dfrac{5x}{x^2+4}-1\right)^2\left(\dfrac{5x}{x^2+4}-2\right)$.

Do đó $y'>0\Leftrightarrow x(4-x^2)(5x-x^2-4)^2(5x-2x^2-8)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<4\\-2<x<0\end{array}\right.$.

Câu 31. Có bao nhiêu điểm M thuộc đường cong $(C):y=\dfrac{x+1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng OM.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Đáp án B

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(m;\dfrac{m+1}{m-1}\right)\in(C)$ là $y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+\dfrac{m+1}{m-1}$.

Đường thẳng OM có hệ số góc $k=\dfrac{y_M-y_O}{x_M-x_O}=\dfrac{\frac{m+1}{m-1}}{m}=\dfrac{m+1}{m^2-m}$.

Theo giả thiết có $\dfrac{-2}{(m-1)^2}.\dfrac{m+1}{m^2-m}=-1\Leftrightarrow m(m-1)^3-2(m+1)=0$

$$\Leftrightarrow m^4-3m^3+3m^2-3m-2=0\Leftrightarrow(m^2-2m-1)(m^2-m+2)=0\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{2}.$$

Vậy có hai điểm thoả mãn.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực và $c\neq 0$. Biết $f(1)=1,f(2)=2$ và $f\left(f(x)\right)=x$ với mọi $x\neq-\dfrac{d}{c}$. Tính $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Đáp án A

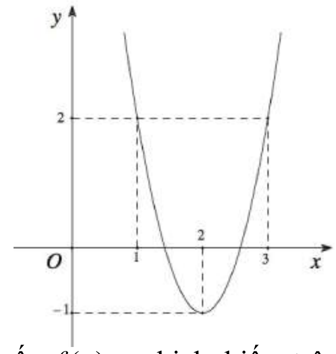
Có $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{a}{c}$ và theo giả thiết có:

$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(f(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f\left(\dfrac{a}{c}\right)=\infty\Rightarrow c\left(\dfrac{a}{c}\right)+d=0\Leftrightarrow d=-a.$

Khi đó $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$.

Và $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+b}{c-a}=1 \\ \dfrac{2a+b}{2c-a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c=-b \\ 4a-4c=-b \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2a-c}{4a-4c}=1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}.$

Câu 33. Cho hàm số *f*(*x*) có đồ thị của hàm số $y=f'(x-2)+2$ như hình vẽ bên.



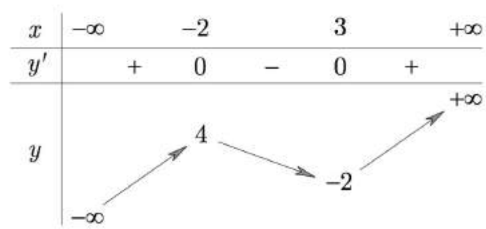
Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Đáp án B

Có $f'(x-2)<0 \Leftrightarrow f'(x-2)+2<2 \Leftrightarrow 1<x<3$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1-2;3-2)=(-1;1)$.

Câu 34. Cho hàm số *f* (*x*) có bảng biến thiên như hình vẽ bên



Số nghiệm của phương trình $f(x^2-3)=4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Đáp án B

Đặt $t=x^2-3\ge -3 \Rightarrow f(t)=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=a>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=-2 \\ x^2-3=a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{a+3} \end{array}\right.$.

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên dương *m* để hàm số $y=e^{-x^3+mx^2-3x}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Đáp án A

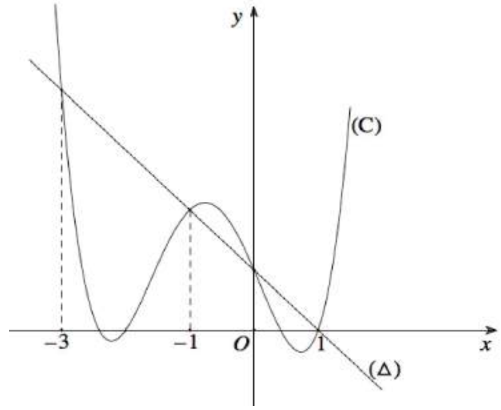
Có điều kiện bài toán tương đương với:

$y'=\left(-3x^2+2mx-3\right)e^{-x^3+mx^2-3x}\le 0, \forall x>0 \Leftrightarrow -3x^2+2mx-3\le 0, \forall x>0$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right), \forall x>0 \Leftrightarrow m\le \min\limits_{(0;+\infty)}\left\{y=\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right\}=y(1)=3.$

Vậy $m\in\{1,2,3\}$.

Câu 36. Cho đường cong bậc bốn $y = \frac{1}{2}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $\Delta : y = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Δ.

A. $\frac{293}{30}$. **B.** $\frac{77}{30}$. **C.** $\frac{293}{60}$. **D.** $\frac{154}{30}$.

Đáp án C

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$. Biết $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $0 < m < 2$. **B.** $-6 < m < -3$. **C.** $2 < m < 4$. **D.** $-3 < m < 0$.

Đáp án C

Có $f'(x) = 3x^2 + 2mx; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{2m}{3} \end{array}\right.$.

Có $f(-2) = 4m - 7; f(1) = m + 2; f(0) = 1; f\left(-\frac{2m}{3}\right) = \frac{4}{27}m^3 + 1$.

Xét các trường hợp sau:

$f(-2) = 5 \Leftrightarrow 4m - 7 = 5 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow \max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = f(1) = 5$.

$f(1) = 5 \Leftrightarrow m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 3$.

$f\left(-\frac{2m}{3}\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{4}{27}m^3 + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy trong mọi trường hợp có $m = 3$ thỏa mãn.

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2018)$ để phương trình $m + x = me^x$ có hai nghiệm phân biệt.

A. 2017. **B.** 2016. **C.** 0. **D.** 2015.

Đáp án B

Có $m(e^x - 1) = x$, phương trình này luôn có nghiệm $x = 0$. Xét $x \neq 0 \Rightarrow m = f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

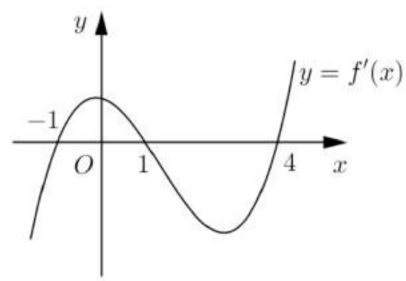
Có $f'(x) = \frac{1\left(e^x - 1\right) - xe^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{\left(e^x - 1\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$.

Có $g'(x) = (1-x)e^x - e^x = -xe^x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow g(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Suy ra $f'(x) < 0, \forall x \neq 0$. Có $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to 0} f(x) = 1; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m = f(x)$ có một nghiệm khác $0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Do đó $m \in \{2,3,...,2017\}$ có 2016 số nguyên thoả mãn.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = 2^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Đáp án D

Có $y' = -2f'(3-2x)2^{f(3-2x)} > 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x < -1 \\ 1 < 3-2x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{array}\right.$.

Đối chiếu đáp án chọn D.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \left(m + \frac{1}{2}\right)x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để (C) có ba điểm cực trị và đường tròn qua ba điểm cực trị này đồng thời đi qua điểm $A\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Đáp án B

Có $y' = x^3 - (2m+1)x; y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2m+1} \end{array}\right. (m > -\frac{1}{2})$.

Toạ độ ba điểm cực trị là $O(0;0), B\left(-\sqrt{2m+1};-m^2-m-\frac{1}{4}\right), C\left(\sqrt{2m+1};-m^2-m-\frac{1}{4}\right)$.

Theo giả thiết tâm ngoại tiếp tam giác OBC nằm trên trục tung có $I(0;t)$ và

$IO^2 = IA^2 \Leftrightarrow t^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(t+\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \Rightarrow I\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

Mặt khác $IO^2 = IB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2m+1+\left(-m^2-m-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}; m = -\frac{5}{2}$.

Câu 41. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-2x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận

A. $m \le 1$ **B.** $m < 1$ **C.** $m \ge 1$ **D.** Không có m.

Lời giải

Tập xác định $D = (-\infty; 1]$

Có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận, xét $f(x) = x^2 - 2x + m$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Hàm số khi đó có dạng $y = \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}$ có 1 tiệm cận đứng $x = 1 \to$ nhận

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Hàm số có thêm 1 tiệm cận đứng khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 \to (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow m - 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Vậy $m \le 1$ **Chọn A**

Câu 42. Biết hàm số $y = (x-a)(x-b)(x-c)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4a + 5b + 6c$

A. $\frac{-5}{4}$ **B.** $\frac{-45}{4}$ **C.** 0 **D.** $\frac{-75}{8}$.

Lời giải

Cách 1:

$y = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$ $\quad y' = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

$\Leftrightarrow \Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac) \le 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \le 0 \Leftrightarrow a = b = c$

Khi đó $P = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4a + 5b + 6c = 6a^2 + 15a \ge \frac{-75}{8}$ **Chọn D**

Cách 2: Để ý thấy $y=0$ có 3 nghiệm $x=a, x=b, x=c$. Mà hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ nên phương trình $y=0$ chỉ có 1 nghiệm. Vậy $a=b=c$

Khi đó $P=a^2+2b^2+3c^2+4a+5b+6c=6a^2+15a\geq\dfrac{-75}{8}$ **Chọn D**

Câu 43. Tiếp tuyến tại cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$ có tính chất nào sau đây?

A. Có hệ số góc dương **B.** Có hệ số góc bằng -1

C. Song song với trục hoành **D.** Đáp án khác

Lời giải

Dễ thấy A,B sai do tiếp tuyến tại cực trị thường có hệ số góc bằng 0. Ý C sai do khi tính ra ta được tiếp tuyến tại cực tiểu của đồ thị hàm số chính là trục hoành. Chọn D

Câu 44. Tìm điều kiện của m sao cho hàm số $y=mx-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ có cực trị

A. $m>0$ **B.** $0<m<1$ **C.** $0<m\leq 1$ **D.** $0\leq m\leq 1$

Hướng dẫn

$y'=m-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}=m-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có nghiệm và y' đổi dấu qua nghiệm đó.

$m-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0<m\leq 1$

Với $m=1$ thì phương trình có nghiệm kép $x=0$ nên loại. Vậy $0<m<1$. **Chọn B**

Câu 45. Cho đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-(m^2+m+1)}{x-m}$. Tính diện tích miền giới hạn bởi tập hợp các điểm có ít hơn hai họ (C_m) đi qua, trục hoành và đường thẳng $(d): y=4$?

A. 16 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 4

Hướng dẫn

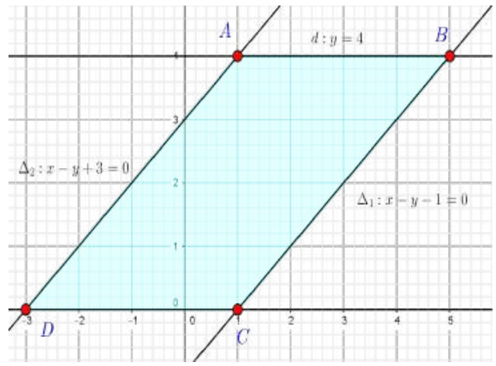
Tập hợp các điểm có ít hơn 2 họ (C_m) đi qua thỏa mãn phương trình $y=\dfrac{(m+1)x-(m^2+m+1)}{x-m}$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm với biến m (1)

$$y=\frac{(m+1)x-(m^2+m+1)}{x-m}\Leftrightarrow xy-ym=(m+1)x-(m^2+m+1)\Leftrightarrow m^2+m(1-x-y)+1+xy-x=0$$

$$(1)\Leftrightarrow\Delta=(x+y-1)^2-4(1+xy-x)\le 0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+2x-2y-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)^2+2(x-y)-3\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-1\le 0\,(\Delta_1)\\ x-y+3\ge 0\,(\Delta_2)\end{cases}$$

Miền giới hạn bởi tập hợp các điểm có ít hơn 2 họ (C_m) đi qua , trục hoành và đường thẳng $(d): y=4$ là một hình bình hành có cạnh nằm trên các đường thẳng Δ_1,Δ_2,d và trục hoành. Vậy diện tích của miền giới hạn đó là: $S=\frac{4.4}{2}=8$.



Câu 46. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình

$(m^2+m+1)x^5+mx^3+x+m-1=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(0;1)$.

Biết rằng $S=(-\infty;a)\cup(b;c), a<b<c.$ Tính $a+b+c.$

A. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ **C.** 2 **D.** -2

Hướng dẫn

Hàm số $y=f(x)=(m^2+m+1)x^5+mx^3+x+m-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có

$y'=5(m^2+m+1)x^4+3mx^2+1$. Có $\Delta_{x^2}=9m^2-20(m^2+m+1)=-11m^2-20m-20<0\ \forall m$

và $5(m^2+m+1)>0\to y'>0\quad\forall x$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng

$(0;1)\Leftrightarrow f(0).f(1)<0\Leftrightarrow(m-1)(m^2+3m+1)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}<m<1\end{array}\right.$ Chọn D

Câu 47. Cho hàm số $y=8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn $|f(x)|\le 1$ với mọi x thỏa mãn $|x|\le 1$. Tính $a+b+c+d+abcd$.

A. -5 **B.** -6 **C.** -7 **D.** -8

Hướng dẫn

Thay lần lượt các giá trị của x là $-1;\frac{-1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}};1$ vào $|f(x)|\le 1$ ta được hệ các bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \left|2-\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}c+d\right|\le 1(4) \\ |8-a+b-c+d|\le 1(1) \\ |d|\le 1(2) \\ |8+a+b+c+d|\le 1(3) \\ \left|2+\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}c+d\right|\le 1(5) \end{cases}$$

Lấy $(1)+(3)\rightarrow |8-a+b-c+d|+|8+a+b+c+d|\le 2$.

Mà $|8-a+b-c+d|+|8+a+b+c+d| \ge |16+2b+2d| \rightarrow |8+b+d|\le 1(6)$.

Lấy $(4)+(5)\rightarrow \left|2-\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}c+d\right|+\left|2+\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}c+d\right|\le 2$.

Mà $\left|2-\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}c+d\right|+\left|2+\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}c+d\right|\ge |4+b+2d| \rightarrow |4+b+2d|\le 2(7)$

Lấy $(6)+(7)\rightarrow |8+b+d|+|4+b+2d|\le 3$. Mà

$|8+b+d|+|4+b+2d|=|8+b+d|+|-4-b-2d|\ge |4-d|\rightarrow |4-d|\le 3\rightarrow 1\le d\le 7$.

Từ $(5)\rightarrow -1\le d\le 1$. Vậy $d=1$. Dấu bằng các bất đẳng thức trên xảy ra tại

$a=c=0, b=-8, d=1$.

Khảo sát lại hàm số $y=8x^4-8x^2+1$ ta thấy hàm số thỏa mãn điều kiện đề bài.

Hoặc bạn nào liên tưởng tốt thì khai triển $\cos 4x$ *theo* $\cos x$ *là ra hàm cần tìm.*

Câu 48. Cho $(C): f(x)=3\left(\frac{x}{4}\right)^4-6\left(\frac{x}{4}\right)^2+2$. Gọi A là điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ và d là 1 đường thẳng thay đổi qua A. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ 2 điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x)$ đến d. Tính $a+b$.

A. $\frac{64}{5}$ **B.** $\frac{54}{5}$ **C.** $\frac{62}{5}$ **D.** 14

Hướng dẫn

Ta tính được các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $B(4;-1), B'(-4;-1)$ và điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0;2)$. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: d là đường thẳng không có hệ số góc $\rightarrow d: x=0$. Khi đó $d(B,d)+d(B',d)=4+4=8$.

Trường hợp 2: d là đường thẳng có hệ số góc qua $A(0;2)\rightarrow d: y=kx+2(k\in\mathbb{R})$.

Khi đó $d(B,d)+d(B',d)=\frac{|4k+3|+|-4k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=f(k)$.

Phá trị tuyệt đối từng trường hợp và khảo sát hàm số ta được bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	8	$\searrow$	$\frac{24}{5}$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\frac{24}{5}$	$\nearrow$	8

Vậy $f(k)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{24}{5}$, $f(k) < 8$ và $f(k)$ không có giá trị lớn nhất.

Kết luận: Tổng khoảng cách từ 2 điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đạt giá trị lớn nhất là 8 và giá trị nhỏ nhất là $\frac{24}{5}$. Chọn A

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = f^1(x)$. Kí hiệu $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right)$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, hỏi phương trình $f^7(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 1094 **B.** 1014 **C.** 921 **D.** 2022

Hướng dẫn

Điều kiện: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$. Đặt $f^k(x) = 0$ có a_k nghiệm và $f^k(x) = 3$ có b_k nghiệm. Do $f^k(x) = 0 \Leftrightarrow f^{k-1}(x) = 0, f^{k-1}(x) = 3$ nên ta có hệ thức truy hồi: $a_k = a_{k-1} + b_{k-1}\,(1)$.

Lập bảng biến thiên của $f(x)$. Từ bảng biến thiên ta có $\forall 0 \leq x \leq 4, 0 \leq f(x) \leq 4$ và với mỗi $a \in (0;4)$, phương trình $f(x) = a$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3 \in (0;4)$ nên $b_k = 3b_{k-1}$. Mà $b_1 = 3$ nên $b_k = 3.3^{k-1} = 3^k$. Theo (1) ta có:

$$a_k = a_{k-1} + b_{k-1} = a_{k-2} + b_{k-2} + b_{k-1} = a_{k-3} + b_{k-3} + b_{k-2} + b_{k-1} = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}$$

$$= 2 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{k-1} = 2 + \frac{3^k - 3}{3 - 1} = \frac{3^k + 1}{2}.$$ Vậy $f^7(x) = 0$ có $\frac{3^7 + 1}{2} = 1094$ nghiệm.

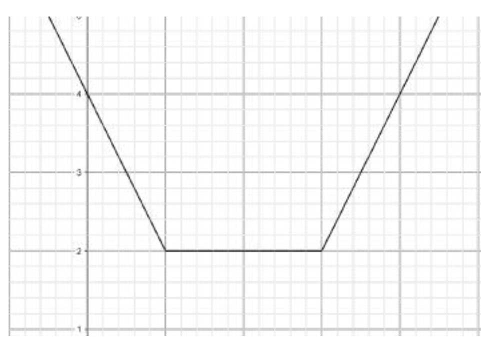
Chọn A

Câu 50. Các hàm số $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}, g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}, h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$ lần lượt có số các điểm cực trị là a, b, c. Tính $a + b + c$

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Hướng dẫn

$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}, f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$. $f'(x) = 0$ tại $x = 8$ và $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$. Lập bảng biến thiên ta được $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 8$.



$g\left(x\right)=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=\left|x-1\right|+\left|x-3\right|$.

Phá trị tuyệt đối ta được $g\left(x\right)=\begin{cases}2x-4\left(x\geq 3\right)\\ 2\left(1<x<3\right)\\ 4-2x\left(x\leq 1\right)\end{cases}$.

Vẽ phác qua đồ thị của $g\left(x\right)$ ta thấy không có x nào để hàm số đạt cực trị thỏa mãn định nghĩa (tồn tại $\left(a;b\right)$ mà $x_0\in\left(a,b\right)$ sao cho $u\left(x_0\right)>u\left(x\right),\forall x\in\left(a,b\right)$ hoặc $u\left(x_0\right)<u\left(x\right),\forall x\in\left(a,b\right)$). Vậy $g\left(x\right)$ không có điểm cực trị.

$h\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$. Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên bình thường ta được $h\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị là là $x=1$ và $x=-1$. Chọn B

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-2}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất tổng khoảng cách của điểm M trên $\left(C\right)$ tới 2 đường thẳng $\Delta_1: x-1=0$ và $\Delta_2: y-2=0$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\neq 2$. Gọi $M\left(x;\dfrac{2x}{x-2}\right)$, khi đó giá trị nhỏ nhất tổng khoảng cách từ đến 2 đường thẳng đã cho là:

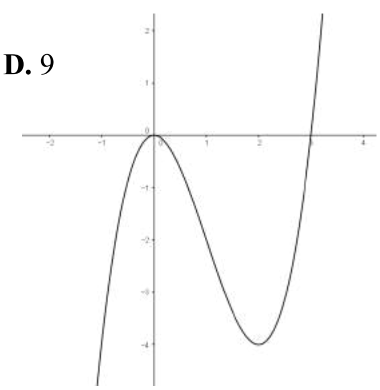
$$\left|x-1\right|+\left|\frac{2x}{x-2}-2\right|=\left|x-1\right|+\frac{4}{\left|x-2\right|}=\left|x-1\right|+\frac{4}{\left|x-1-1\right|}\geq\left|x-1\right|+\frac{4}{\left|x-1\right|+1}=\left|x-1\right|+1+\frac{4}{\left|x-1\right|+1}-1\geq 4-1=3$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=0$. Chọn A

Câu 52. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x^2+m\right|$ với m là tham số, $m\in\left[-5;5\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 9

Hướng dẫn



Từ, đồ thị của $g\left(x\right)=x^3-3x^2$ ở hình bên dưới, ta thấy:

Với $m\leq 0$ thì hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Với $0<m<4$ thì hàm số $f\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Với $m\geq 4$ thì hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Vậy với $m\in\left[-5;5\right]$ thì có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn C

Câu 53. Quỹ tích M mà qua M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ mà 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau là gì?

A. Một đường tròn **B.** Một đường tròn trừ đi 2 điểm

C. Một đường tròn trừ đi 3 điểm **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \neq 1$

Tịnh tiến đồ thị theo véc tơ $\vec{u}(1;3)$ta được đồ thị mới có phương trình $Y+3=\dfrac{(X+1)^2+(X+1)-1}{X} \Leftrightarrow Y=\dfrac{X^2+1}{X}$

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm có dạng $M(a;b)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua M có dạng $(\Delta): y=k(x-a)+b$

(Δ)tiếp xúc với đồ thị hàm số $\Leftrightarrow \dfrac{X^2+1}{X}=k(X-a)+b$ có nghiệm kép duy nhất

$\Leftrightarrow X^2(1-k)+X(ak-b)+1=0$ có nghiệm kép duy nhất.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta=(ak-b)^2+4(k-1)=a^2k^2-2abk+b^2+4k-4=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow k^2a^2-2k(ab-2)+b^2-4=0$ có 2 nghiệm k phân biệt thỏa mãn

$$\begin{cases} k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \dfrac{b^2-4}{a^2}=-1 \Leftrightarrow a^2+b^2=4 \\ a \neq 0 \\ k \neq 1 \Leftrightarrow a^2-2(ab-2)+b^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \end{cases}$$

Vậy quỹ tích M đối với đồ thị sau khi tịnh tiến là đường tròn $(C): x^2+y^2=4$ trừ đi giao điểm với đường tròn của các đường thẳng $x=y, x=0$ (quỹ tích là một đường tròn trừ đi 4 điểm), vì đề chỉ hỏi chung về quỹ tích nên không cần tịnh tiến lại quỹ tích tìm được. Chọn D

Câu 54. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2017x+2018$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến tại M_0 của (C) có hoành độ $x_0=2$ cắt (C) tại điểm $M_1 \neq M_0$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_1 cắt (C) tại $M_2 \neq M_1$. Cứ như thế đến tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại $M_n \neq M_{n-1}$. Tìm n để điểm M_n có hoành độ dương nằm trên đường thẳng $y=6000x+5073$

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Hướng dẫn

Xét tiếp tuyến tại $M_n\left(x_n; x_n^3-3x_n^2+2017x_n+2018\right)$ của (C) cắt (C) tại $M_{n+1} \neq M_n$:

Phương trình tiếp tuyến tại M_n có dạng:

$y=\left(3x_n^2-6x_n+2017\right)\left(x-x_n\right)+x_n^3-3x_n^2+2017x_n+2018$

Điểm M_{n+1} có hoành độ $x_{n+1} \neq x_n$ là nghiệm phương trình:

$x_{n+1}^3 - 3x_{n+1}^2 + 2017x_{n+1} + 2018 = \left(3x_n^2 - 6x_n + 2017\right)\left(x_{n+1} - x_n\right) + x_n^3 - 3x_n^2 + 2017x_n + 2018$

$\Leftrightarrow \left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2 - 3x_{n+1} - 3x_n + 2017\right) = \left(3x_n^2 - 6x_n + 2017\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)$

$\Rightarrow x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2 - 3x_{n+1} - 3x_n + 2017 = 3x_n^2 - 6x_n + 2017$

$\Leftrightarrow x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n - 2x_n^2 - 3\left(x_{n+1} - x_n\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1} + 2x_n\right) - 3\left(x_{n+1} - x_n\right) = 0$

$\Rightarrow x_{n+1} + 2x_n - 3 = 0$

Ta có dãy: $\begin{cases} x_1 = -2x_0 + 3 = -1 \\ x_{n+1} = -2x_n + 3 \end{cases}$

Từ hệ thức truy hồi ta có: $x_{n+1} = -2x_n + 3 \Leftrightarrow x_{n+1} - 1 = -2x_n + 2 \Leftrightarrow x_{n+1} - 1 = -2\left(x_n - 1\right)$

Đặt $u_n = x_n - 1$ ta có dãy mới: $\begin{cases} u_1 = x_1 - 1 = -2 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$ là 1 cấp số nhân có công bội $q = -2$ nên công thức số hạng tổng quát của dãy là:

$$u_n = \left(-2\right)^{n-1} u_1 = \left(-2\right)^{n-1}\left(-2\right) = \left(-2\right)^n \Leftrightarrow x_n - 1 = \left(-2\right)^n \Leftrightarrow x_n = \left(-2\right)^n + 1$$

M_n nằm trên đường thẳng $y = 6000x + 5073$ nên x_n là nghiệm phương trình:

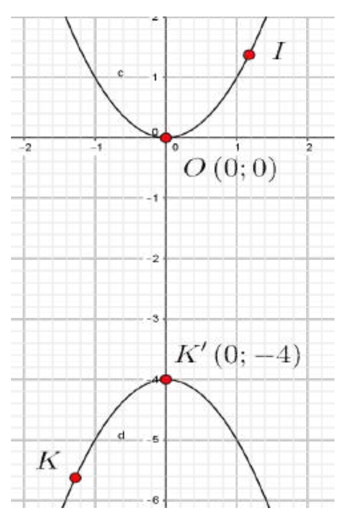
$x_n^3 - 3x_n^2 + 2017x_n + 2018 = 6000x_n + 5073 \Leftrightarrow x_n = 65 > 0 \Leftrightarrow \left(-2\right)^n + 1 = 65 \Leftrightarrow n = 6$ Chọn C

Câu 55. Cho các số a, b, c thỏa mãn hệ $\begin{cases} a + 2b + 2c > 0 \\ ab + ac > 0 \\ bc > 0 \\ 8a^3 + 4b^3 + 27c^3 \le 6ab^2 + 9b^2c \end{cases}$ và m là một tham số.

Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận của đường cong $y = \dfrac{bm^2x + \dfrac{2a+b}{2}}{\dfrac{2}{3}\left(a+b\right)x - 3cm}$ và K là 1 điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -x^2 - 4$ sao cho độ dài đoạn IK nhỏ nhất, khi đó tính giá trị biểu thức $x_I + y_K$?

A. 5 **B.** -2 **C.** -4 **D.** 3

Hướng dẫn



Xử lí điều kiện đề bài:

$\begin{cases} a + 2b + 2c > 0 \\ ab + ac > 0 \\ bc > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c > 0 \\ a\left(2b + 2c\right) > 0 \\ bc > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b + c > 0 \\ bc > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a, b, c > 0$

Với $a, b, c > 0$, ta có $\begin{cases} 8a^3 + b^3 + b^3 \ge 6ab^2 \\ 27c^3 + b^3 + b^3 \ge 9b^2c \end{cases} \rightarrow 8a^3 + 4b^3 + 27c^3 \ge 6ab^2 + 9b^2c$.

Mà theo giả thiết $8a^3+4b^3+27c^3 \le 6ab^2+9b^2c \to 8a^3+4b^3+27c^3=6ab^2+9b^2c$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2a=b=3c>0$.

Khi đó hàm số $y=\dfrac{bm^2x+\dfrac{2a+b}{2}}{\dfrac{2}{3}(a+b)x-3cm} \Leftrightarrow y=\dfrac{2am^2x+\dfrac{2a+2a}{2}}{\dfrac{2}{3}(a+2a)x-2am} \Leftrightarrow y=\dfrac{m^2x+1}{x-m}$. I là giao điểm 2 đường tiệm cận của <u>đường cong</u> $\to I(m;m^2)(m\ne -1)$ (nếu $m=-1$ thì đường cong sẽ suy biến thành đường thẳng) $\to I\in(P): y=x^2\,(x\ne -1)$. Từ hình vẽ, ta thấy độ dài đoạn thẳng IK đạt giá trị nhỏ nhất khi $I\equiv O,\ K\equiv K'$, khi đó $x_I+y_K=-4$.

Câu 56. Với m là một tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $m<-2$ **B.** $-2\le m<0$ C. $0\le m<2$ D. $2\le m$

Đáp án B

Đồ thị hàm số đã cho có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=4x^3+4mx=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<0$.

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị là $A(0;1), B\left(-\sqrt{-m};-m^2+1\right), C\left(\sqrt{-m};-m^2+1\right)$

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow H\left(0;-m^2+1\right)$. Ta có ΔABC cân tại A. Do đó ΔABC vuông khi và chỉ khi $AH=\dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow m^2=\sqrt{-m} \Leftrightarrow m^4=-m \Leftrightarrow m=-1$ (do $m<0$)

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\ne 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{16}$ **C.** $\dfrac{1}{32}$ **D.** Không tồn tại\

Đáp án B

Theo công thức thì: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}$.

Câu 58. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Đáp án A

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Tiệm cận đứng: $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)} = -\infty$

Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang: $\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

Câu 59. Biết rằng đồ thị hàm số $y=(3a^2-1)x^3-(b^3+1)x^2+3c^2x+4d$ có hai điểm cực trị là $(1;-7),(2;-8)$. Hãy xác định tổng $M=a^2+b^2+c^2+d^2$

A. -18 **B.** 15 **C.** 18 **D.** 8

Có $(1;-7),(2;8)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases} (3a^2-1)-(b^3+1)+3c^2+4d=-7 \\ 8(3a^2-1)-4(b^3+1)+6c^2+4d=-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-b^3+3c^2+4d=-5\,(*) \\ 24a^2-4b^3+6c^2+4d=4 \end{cases} \Rightarrow 21a^2-3b^3+3c^2=9 \;(1)$

$y'=(9a^2-3)x^2-(2b^3+2)x+3c^2$

Các điểm $(1;-7),(2;-8)$ là cực trị của đồ thị hàm số nên $y'(1)=y'(2)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2-2b^3+3c^2=5 & (2) \\ 36a^2-4b^3+3c^2=16 & (3) \end{cases}$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 21a^2-3b^3+3c^2=9 \\ 9a^2-2b^3+3c^2=5 \\ 36a^2-4b^3+3c^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^3=8 \\ c^2=4 \end{cases}$

Thế vào (*) ta được $d=-3 \Rightarrow M=a^2+b^2+c^2+d^2=1+2^2+4+(-3)^2=18$. **Chọn C.**

Câu 60. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=9x^4-2(m-1)x^2-3m^2+3m+1$ có ba điểm cực trị và ba điểm cực trị đó tạo thành tam giác có 1 góc bằng 60^0?

A. $m=1$ **B.** $m=4$ **C.** $m=3$ **D.** $m=2$

Đáp án B

Áp dụng công thức: $8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0$

Ta có: a = 1, b = -2 (m - 1), α = 60 ⇒ 8.9 - 8 (m - 1)^3.1/3 = 0 ⇒ m – 1 = 3 ⇒ m = 4.