TRƯỜNG THPT NGUYỄN GIA THIỀU

(Đề chính thức gồm 05 câu 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

MÔN TOÁN LỚP 10 NĂM HỌC 2022 – 2023

Thời gian làm bài 120 phút

Họ và tên Học sinh: .... ***Lớp:*** ...... ***Phòng:*** .... ***Số báo danh:*** ....

Câu 1. Giá cước đi taxi của một công ty được cho như bảng sau

Giá mở cửa *Commencement rate up 0,9km*	Giá km tiếp theo	Giá từ km thứ 26	Giá từ km thứ 33
20.000đ/0,9km	17.600đ/km	14.400đ/km	11.000đ/km

a. Bạn An đi taxi để về quê với quãng đường 36km, hỏi bạn phải trả bao nhiêu tiền đi taxi?

b. Lập công thức biểu diễn số tiền phải trả theo quãng đường khi đi taxi.

Câu 2. Hàng tuần bạn *HS* dành tối đa 14 giờ đồng hồ để tập thể dục giữ vóc dáng, bạn tập cả hai môn là đạp xe và boxing. Biết rằng mỗi giờ đạp xe tiêu hao 600 calo và mỗi giờ tập boxing tiêu hao 900 calo. Bạn *HS* muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không vượt quá 10800 calo cho tập cả hai môn này mỗi tuần. Hỏi số giờ dành cho tập cả hai môn đạp xe và boxing trong mỗi tuần là bao nhiêu để số calo tiêu hao nhiều nhất?

Câu 3.

1. Cho hàm số $y=-x^2+2x-3$ có đồ thị là parabol $\left(P\right)$ và hàm số $y=6x+m$ có đồ thị là đường thẳng d. Tìm m để d cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $-4<x_1<-3$ và $-1<x_2<0$.

2. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$, chứng minh rằng nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $-\left(4a+c\right)\leq 2b\leq 4a+c$.

3. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $3\leq x\leq 6$, $3\leq y\leq 6$ và $0<z\leq 2$ và $x+y+z=11$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có diện tích là S và nội tiếp đường tròn có bán kính là R; kí hiệu các góc $\widehat{BAC}=A$, $\widehat{CBA}=B$, $\widehat{ACB}=C$. Cho biết $3S=2R^2\left(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\right)$, chứng minh ABC là tam giác đều.

Câu 5. Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng a. Các điểm D, E xác định bởi $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$, $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$. Gọi N và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AE. Gọi H là trực tâm của các tam giác ABD.

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}=a^2/2$.

b. Chứng minh hai đường thẳng NQ và HC vuông góc.

c. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MA}=\dfrac{11}{4}a^2$.

– – – – – – – ***Hết*** – – – – – – –

HƯỚNG DẪN

Câu 1. a (2,0đ). $20000+17600(26-0,9)+14400(33-26)+11000(36-33)=595560$ (đ).

b (2,0đ). Gọi $x,\ y$ là . . . , có $y=\begin{cases}0 \text{ khi } x=0\\ 20000 \text{ khi } 0<x<0,9\\ 20000+17600(x-0,9) \text{ khi } 0,9\le x<26\\ 20000+17600(26-0,9)+14400(x-26) \text{ khi } 26\le x<33\\ 20000+17600(26-0,9)+14400(33-26)+11000(x-33) \text{ khi } x\ge 33\end{cases}$.

Câu 2 (4,0đ). Gọi $x,\ y$ là . . . , có hệ $\begin{cases}x+y\le 14\\ 600x+900y\le 10800\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\le 14\\ 2x+3y\le 36\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$. 6 giờ đạp xe, 8 giờ boxing.

Câu 3. 1 (1,0đ). Xét phương trình $-x^2+2x-3=6x+m\ \Leftrightarrow -x^2-4x-3=m$. Giải ra $-3<m<0$.

2 (2,0đ). $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\ c>0\\ b^2-4ac\le 0\ (*)\end{cases}$. $\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4b^2\le 16ac$ mà $16ac\le(4a+c)^2$. Từ đó ra đpcm.

3 (2,0đ). $P\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 z$; $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 z=\left(\dfrac{11-z}{2}\right)^2 z=\dfrac{1}{18}(11-z)(11-z)\left(\dfrac{9z}{2}\right)$;

$(11-z)(11-z)\left(\dfrac{9z}{2}\right)\le\left(\dfrac{11-z+11-z+\dfrac{9z}{2}}{3}\right)^3\le\left(\dfrac{22+\dfrac{5.2}{2}}{3}\right)^3$. Tìm ra $\max P=\dfrac{81}{2}$ khi $\begin{cases}x=y=\dfrac{9}{2}\\ z=2\end{cases}$.

Câu 4 (2,0đ). $3S=2R^2\left(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\right)\Leftrightarrow 3abc=a^3+b^3+c^3$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0\Leftrightarrow a=b=c$. Vậy ABC là tam giác đều.

Câu 5.

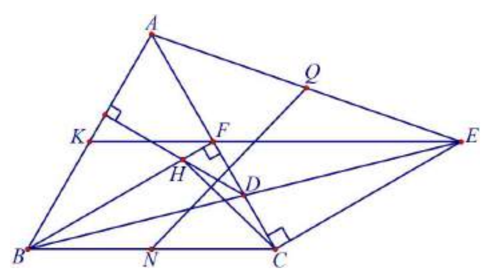
(1,0đ) $2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BF}$ (Với F là trung điểm đoạn thẳng AC).

$\Rightarrow$ $BFEC$ là hình bình hành.

D là trung điểm của FC. K là trung điểm của AB.



a (1,0đ). $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}$ (Do $AC\perp CE$).

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}=8.\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE}=8.\left|\overrightarrow{DC}\right|.\left|\overrightarrow{DE}\right|.\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)=8.DC.DE.\cos\widehat{CDE}=4\left(DC^2+DE^2-CE^2\right)=a^2/2$.

b (1,0đ). Chỉ ra $2\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}$; có $\overrightarrow{HC}.\left(2\overrightarrow{NQ}\right)=\overrightarrow{HC}.\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow$ đpcm.

c (2,0đ). F là trọng tâm ΔABE. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FM}\right)\left(\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FM}\right)=\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FM}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}\right)+\overrightarrow{FM}^2$.

Tương tự $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FM}\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}\right)+\overrightarrow{FM}^2$, $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FM}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FA}\right)+\overrightarrow{FM}^2$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MA}=\dfrac{11}{4}a^2\Leftrightarrow 3\overrightarrow{FM}^2-2\overrightarrow{FM}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}\right)+\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FA}=\dfrac{11a^2}{4}$

$\Leftrightarrow 3FM^2+\overrightarrow{FE}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}\right)=\dfrac{11a^2}{4}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FE}\left(2\overrightarrow{FK}\right)=\dfrac{11a^2}{4}\Leftrightarrow FM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. $M\in$ đ tròn $\left(F;\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)$.