

(Đề chính thức gồm 08 câu 01 trang)

Thời gian làm bài 120 phút

Ngày thi 04/02/2023

Họ và tên Học sinh: ..... Lớp: ..... Phòng: ..... Số báo danh: .....

**Câu 1 (3,0 điểm).** Lớp 10A có 17 bạn giỏi Bơi, 10 bạn giỏi Chạy, 6 bạn giỏi cả Bơi và Chạy, 9 bạn giỏi cả Bơi và Võ, 7 bạn giỏi cả Chạy và Võ, 4 bạn giỏi đồng thời cả ba môn Bơi, Chạy, Võ. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn giỏi Võ, biết rằng trong lớp có 26 bạn giỏi ít nhất một môn (Bơi, Chạy, Võ) ?

**Câu 2 (3,0 điểm).** Một đoàn thám hiểm vùng cực hiện cách căn cứ 240km. Trong vòng 48 giờ tới sẽ có một cơn bão tuyết ập đến. Đoàn phải di chuyển càng nhiều càng tốt bằng tàu rồi đi bộ về căn cứ đoạn đường còn lại trước khi cơn bão đến. Đoàn thám hiểm có thể điều khiển tàu phá băng với vận tốc 12km/h hoặc đi bộ với vận tốc 3km/h. Viết và vẽ hệ bất phương trình xác định khoảng thời gian đoàn thám hiểm có thể đi bằng tàu phá băng rồi đi bộ để trở về căn cứ trước khi cơn bão đến.

**Câu 3 (2,0 điểm).** Nhịp tim là một chỉ số sức khỏe quan trọng mà tất cả chúng ta cần quan tâm, chỉ số này được đo bằng số lần co bóp của tim trong mỗi phút, nhịp tim được kí hiệu là bpm (beat per minute). Đối với hầu hết người trưởng thành khỏe mạnh, nhịp tim nghỉ ngơi dao động từ 60 bpm đến 100 bpm. Nếu bạn hoạt động thể chất thường xuyên thì nhịp tim khi nghỉ ngơi có thể thấp dưới 60 bpm, thậm chí ở các vận động viên con số này chỉ là 40 bpm. Nhịp tim tối đa là nhịp đập khi tim làm việc hết sức để đáp ứng nhu cầu oxy của cơ thể. Để có một trái tim khỏe mạnh chúng ta cần thường xuyên tập thể dục đúng theo tiêu chuẩn và cường độ phù hợp với mỗi người.

Các nhà khoa học đã đưa ra công thức khuyến cáo giữa nhịp tim tối đa và độ tuổi là:  $MHR = 220 - \text{tuổi}$ .

Nghiên cứu gần đây công thức giữa nhịp tim tối đa và độ tuổi được sửa đổi là:  $MHR = 220 - (0,7 \times \text{tuổi})$ .

Người ta chỉ ra rằng nhịp tim tối đa ở độ tuổi cả công thức mới và công thức cũ cho chính xác cùng một giá trị, thì tập thể dục hiệu quả nhất khi nhịp tim đạt đến 75% của nhịp tim tối đa. Hỏi đó là năm bao nhiêu tuổi và nhịp tim tối đa lúc này là bao nhiêu ?

**Câu 4 (2,0 điểm).** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$ . Tìm hệ số  $a$  sao cho đường thẳng  $y = ax$  chia hình chữ nhật  $OABC$  thành hai phần, trong đó diện tích phần chứa điểm  $C$  gấp ba lần diện tích phần chứa điểm  $A$ .

**Câu 5 (3,0 điểm).** Cho parabol  $(P): y = -x^2 + 1$  có đỉnh là  $I$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm phân biệt thuộc  $(P)$  và không trùng đỉnh  $I$ , sao cho  $IA$  vuông góc với  $IB$ . Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác  $IAB$ .

**Câu 6 (2,0 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác cân. Trong đó  $AB = c, BC = a, CA = b$  và  $\widehat{ABC} = B$ .

**Câu 7 (3,0 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 2AB = 2a$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Gọi  $M$  là điểm bất kỳ và  $P$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}$ . Gọi  $Q$  là điểm thuộc đường thẳng  $AB$  sao cho  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BQ} = 4a^2$ . Chứng minh tứ giác  $BCPQ$  là hình bình hành.

**Câu 8 (2,0 điểm).** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Biết đường thẳng chứa cạnh  $AC$  có phương trình  $2x - y + 3 = 0$  và góc  $\widehat{AOB} = 90^\circ$ . Gọi  $D$  là chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ , hãy viết phương trình đường thẳng đi qua  $O$  và  $D$ .

## HƯỚNG DẪN

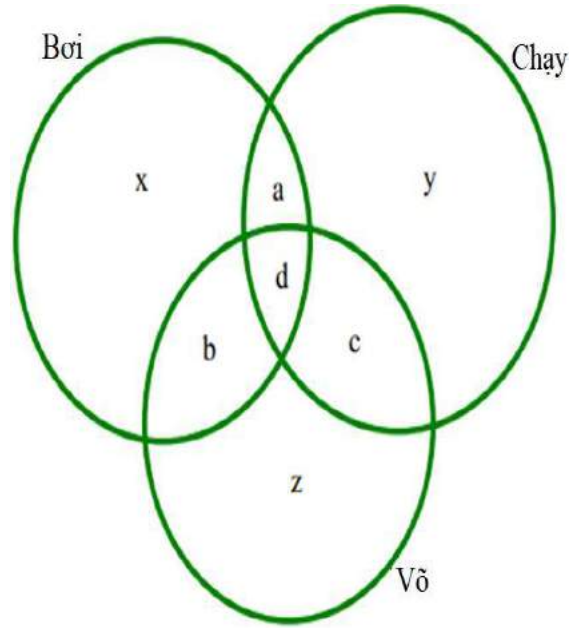
### Câu 1 (3,0 điểm).

Gọi  $x$  là số bạn chỉ giỏi Bơi;  $y$  là số bạn chỉ giỏi Chạy;  $z$  là số bạn chỉ giỏi Võ.  $a$  là số bạn chỉ giỏi Bơi và Chạy;  $b$  là số bạn chỉ giỏi Bơi và Võ;  $c$  là số bạn chỉ giỏi Chạy và Võ.  $d$  là số bạn giỏi cả 3 môn trên.

Theo đề ra ta có hệ phương trình (tham khảo biểu đồ Ven)

$$\begin{cases} x+a+b+d=17 \\ y+a+c+d=10 \\ a+d=6 \\ b+d=9 \\ c+d=7 \\ d=4 \\ x+y+z+a+b+c+d=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4, c=3, b=5, a=2 \\ x=6, y=1, z=5 \end{cases}$$

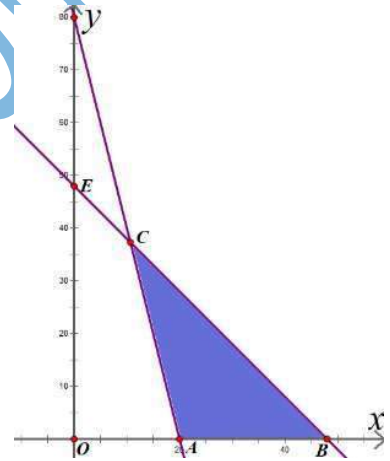
Kết luận: 17 bạn giỏi Võ.



### Câu 2 (3,0 điểm).

Gọi thời gian đoàn thám hiểm điều khiển tàu phá băng là  $x$  giờ, thời gian đoàn thám hiểm đi bộ là  $y$  giờ.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 48 \\ 12x+3y \geq 240 \end{cases}$$



### Câu 3 (2,0 điểm).

Giải  $220 - \text{tuổi} = 220 - (0,7 \times \text{tuổi})$  ra kết quả tuổi bằng 40. Nhịp tim tối đa là  $75\% \times 180 = 135$  (bpm).

**Câu 4 (2,0 điểm).** Đường thẳng  $y = ax$  phải cắt cạnh  $AB$  của hình chữ nhật  $OABC$  tại điểm  $D\left(\frac{4}{a}; 4\right)$ .

$$S_{OABC} = OA \cdot OC = 4 \cdot 3 = 12. \quad S_{OAE} = \frac{1}{4} S_{OABC} = 3. \quad AE = \frac{2 \cdot S_{OCE}}{AO} = \frac{3}{2}. \quad \text{Từ đó } \frac{4}{a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{8}{3}.$$

**Câu 5 (3,0 điểm).**  $I(0;1); A(a; -a^2+1) \in (P), a \neq 0$ .

Đường thẳng  $IB$  có phương trình dạng  $x - ay + a = 0$ .  $IB \cap (P) = \{B\} \Rightarrow B\left(\frac{-1}{a}; 1 - \frac{1}{a^2}\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{Chu vi tam giác } IAB \text{ bằng: } 2p &= IA + IB + AB = \sqrt{a^2 + a^4} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4}} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + a^4 + \frac{1}{a^4}} \\ &\geq \sqrt{2\sqrt{a^2} \cdot a^4} + \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^4}}} + \sqrt{2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} + 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{1}{a^4}}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2|a|^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{|a|^3}}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

$2p = 2\sqrt{2} + 2$  khi  $a = \pm 1$ . Kết luận: ...

**Câu 6 (2,0 điểm).**  $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \frac{1+2\cos B+\cos^2 B}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{(2a+c)(2a-c)}$

$\Leftrightarrow \frac{1+2\cos B+\cos^2 B}{\sin^2 B} + 1 = \frac{2a+c}{2a-c} + 1 \Leftrightarrow \frac{2+2\cos B}{1-\cos^2 B} = \frac{4a}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\cos B} = \frac{2a}{2a-c}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = \frac{2a}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{2ac}{2ac-a^2-c^2+b^2} = \frac{2a}{2a-c} \Leftrightarrow 2ac-c^2 = 2ac-a^2-c^2+b^2$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ . Vậy  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ .

**Câu 7 (3,0 điểm).**

$\vec{AP} = \vec{MC} + 2\vec{MB} - 3\vec{MA} \Leftrightarrow \vec{AP} = \vec{AC} + 2\vec{AB}$

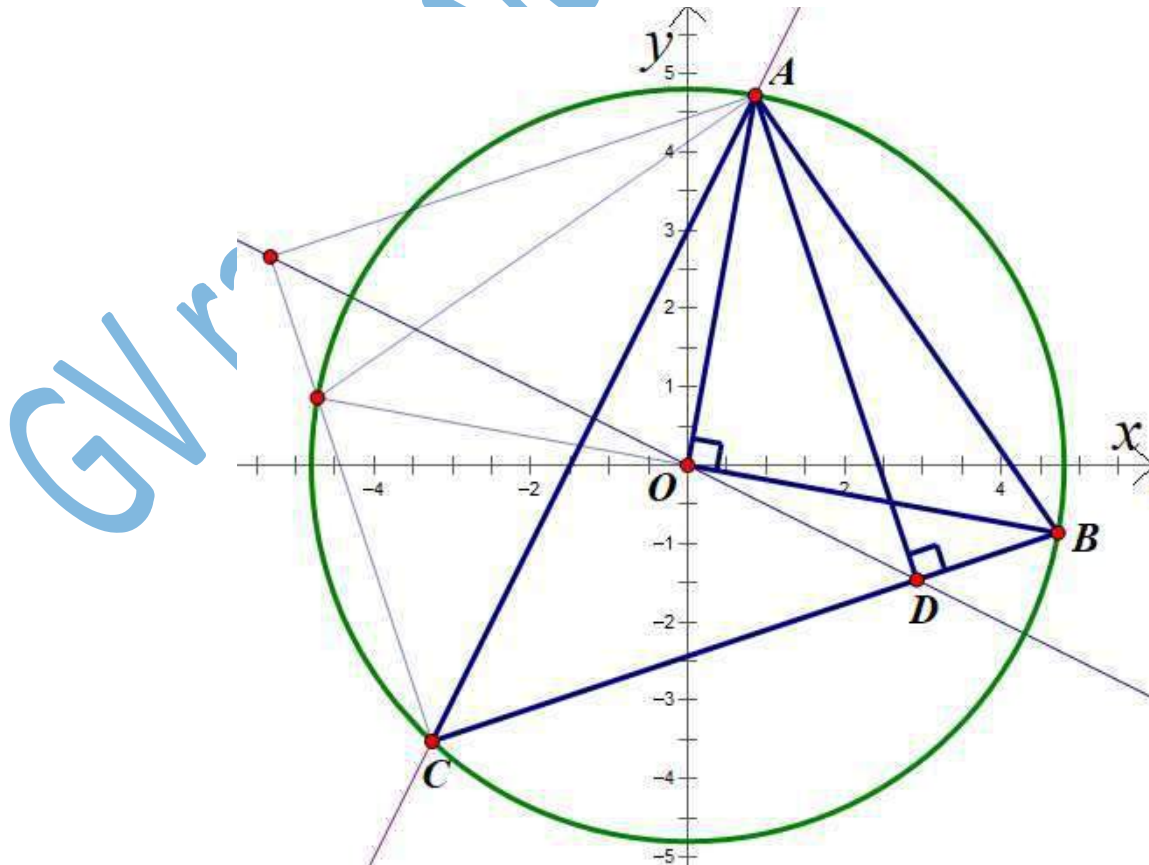
$\Leftrightarrow \vec{AP} = \vec{AC} + \vec{AD}$ . Suy ra  $ACPD$  là hình thoi có giao điểm hai đường chéo là  $H$ .

$\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CD}) = \frac{1}{2}(\vec{HA} - \vec{HC} + 2\vec{HD}) = \frac{3}{2}\vec{HD} + \frac{1}{2}\vec{HA}$ ,  $\vec{BQ} = x\vec{AD} = x\vec{HD} - x\vec{HA}$

$\vec{CB} \cdot \vec{BQ} = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}HD^2 - \frac{x}{2}HA^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{x}{2}a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow \vec{BQ} = \vec{AD}$  mà  $\vec{CP} = \vec{AD} \Rightarrow \vec{BQ} = \vec{CP} \Rightarrow$  tứ giác  $BCPQ$  là hình bình hành.

**Câu 8 (2,0 điểm).** Dễ dàng chứng minh được  $OD \perp AC$ , phương trình  $OD$  là  $y + 2x = 0$ .



Các cách giải khác mà đúng vẫn cho điểm.

