

Ngày thi 28/01/2023

Họ và tên Học sinh: Lớp: Phòng: Số báo danh:

Câu 1. Bài toán sản xuất

Có ba nhóm máy A , B , C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II . Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Sản phẩm I	Sản phẩm II
A	10	2	2
B	2	0	1
C	12	1	3

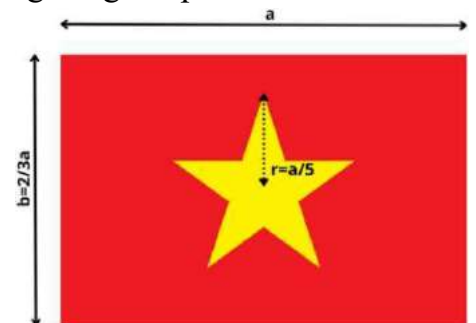
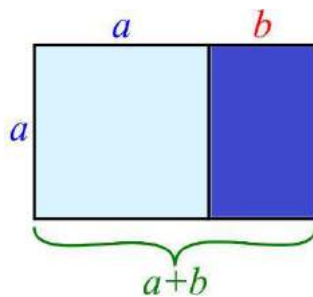
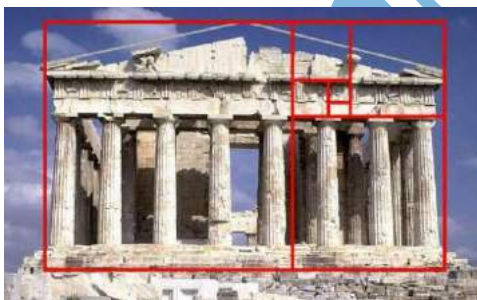
Cho biết một đơn vị sản phẩm I lãi 30 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 50 nghìn đồng. Em hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Câu 2. Bài toán “Lá cờ Việt Nam”

Trong toán học và nghệ thuật, hai đại lượng được gọi là có **tỷ số vàng** hay **tỷ lệ vàng** nếu tỷ số giữa tổng của các đại lượng đó với đại lượng lớn hơn bằng tỷ số giữa đại lượng lớn hơn với đại lượng nhỏ hơn. **Tỷ lệ vàng** thường được ký hiệu bằng ký tự φ (phi) trong bảng chữ cái Hy Lạp nhằm tưởng nhớ đến Phidias, nhà điêu khắc đã xây dựng nên đền Parthenon. **Tỷ lệ vàng** được biểu diễn $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$ trong đó $a > b$.

Hình chữ nhật tỷ lệ vàng với cạnh dài a và cạnh ngắn b , khi đặt cạnh hình vuông có cạnh a , sẽ tạo thành hình chữ nhật đồng dạng tỷ lệ vàng với cạnh dài $a+b$ và cạnh ngắn a . Đây cũng minh họa cho liên hệ $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$.

Bằng kiến thức liên quan đến toán học, em hãy nêu một lí do mà Hiến pháp năm 2013 đã quy định: Quốc kỳ nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam hình chữ nhật có chiều rộng bằng hai phần ba chiều dài.



Câu 3. Cho hai tập hợp $A = \{(2;5); (5;2); (7;8); (8;7); (4;4)\}$, $B = \{(x;y) | x^2 + 2x = y^2 + 31, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$.

Tìm tất cả các tập hợp G thỏa mãn $G \cup B = A$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 8$ có đồ thị là parabol (P) . Lấy hai điểm $A(-1;-5)$ và $B(5;7)$ thuộc (P) . Tìm tọa độ điểm C trên cung AB của (P) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất và tính diện tích đó.

Câu 5. Cho tam giác ABC , biết $BC = a$, $AB = AC = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2 = a^2.$$

----- Hết -----

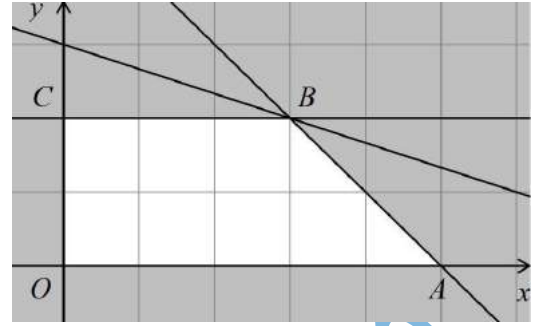
HƯỚNG DẪN

Câu 1 (4,0 điểm).

Gọi x và y lần lượt là số đơn vị sản phẩm I và II ($x, y \geq 0$).
Số tiền lãi là $30x + 50y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ y \leq 2 \\ x + 3y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Giải ra sản xuất 3 sản phẩm I và 2 sản phẩm II .



Câu 2 (4,0 điểm). Từ $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$ giải ra $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Lại có $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3}{2} \dots$

Câu 3 (4,0 điểm). $x^2 + 2x = y^2 + 31 \Leftrightarrow (x+1)^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x+1+y)(x+1-y) = 32$

Lại có $x+1+y > 0$ nên $x+1+y > x+1-y > 0$, $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$.

Nên $\begin{cases} x+1+y=32 \\ x+1-y=1 \end{cases}, \begin{cases} x+1+y=16 \\ x+1-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+1+y=8 \\ x+1-y=4 \end{cases}$, tìm ra $B = \{(8;7); (5;2)\}$.

Liệt kê được 4 tập hợp G thỏa mãn đề bài.

Câu 4 (4,0 điểm). Điểm C là tiếp điểm của đường thẳng d với (P) , trong đó d là tiếp tuyến của (P) và d song song với AB . Giải ra $C(2; -8)$ và diện tích tam giác ABC bằng 27.

Câu 5 (4,0 điểm).

Tam giác ABC cân tại A .

Chứng minh được hai đường trung tuyến BS và CH vuông góc với nhau tại G .

Gọi điểm I xác định bởi $\vec{IA} - 2\vec{IB} - 2\vec{IC} = \vec{0}$,

Chứng minh được điểm cố định I và $IBGC$ là hình vuông.

$$\begin{aligned} \text{Có } IA^2 - 2IB^2 - 2IC^2 &= 16IJ^2 - 4IB^2 \\ &= 12IJ^2 - 4JB^2 = 8JB^2 = 2a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 &= \vec{MA}^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 \\ &= \vec{MI}^2 + \vec{IA}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} = MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA}. \end{aligned}$$

Tương tự:

$$MB^2 = MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB}$$

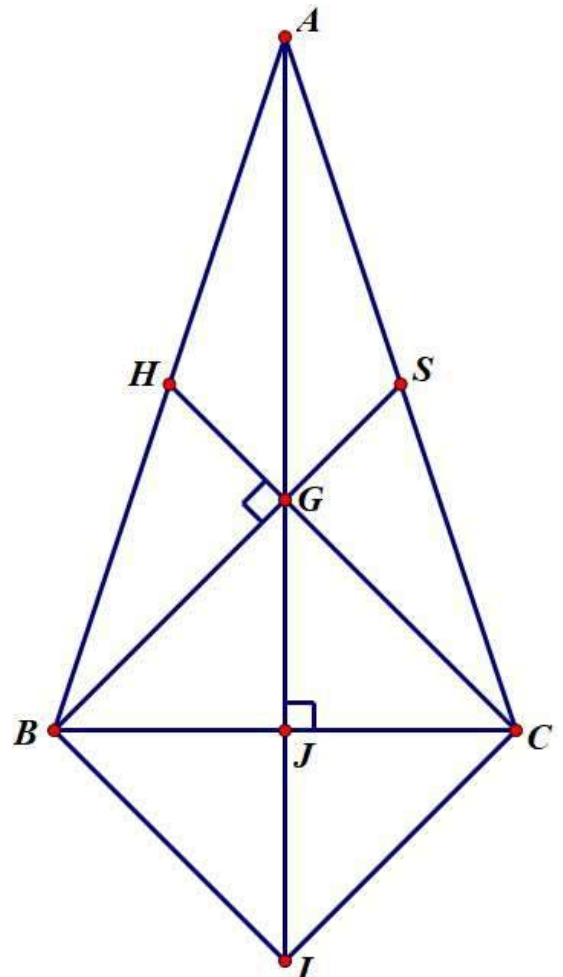
$$MC^2 = MI^2 + IC^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IC}$$

$$\text{Khi đó } MA^2 - 2MB^2 - 2MC^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow -3MI^2 + IA^2 - 2IB^2 - 2IC^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} - 2\vec{IB} - 2\vec{IC}) = a^2$$

$$\Leftrightarrow -3MI^2 + 2a^2 = a^2 \Leftrightarrow IM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tập hợp M là đường tròn $\left(I; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.



Các cách giải khác mà đúng vẫn cho điểm.

Handwritten signature