

PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023

Từ câu 41 đến câu 45

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + 2023$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-4; 3)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $y' = x^2 - 2x - m$. Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$ (1).

Để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-4; 3)$ thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 3)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow m = x^2 - 2x$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ có $g'(x) = 2x - 2$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	-4	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	24	-1	3

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 3)$ khi $-1 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = 1$.

Lời giải:

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì $m > 0$.

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là $A(0; 2m^4 - m), B(\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m), C(-\sqrt{m}; 2m^4 - m^2 - m)$

Ta có $A \in Oy$. Để $B, C \in Ox$ thì $2m^4 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 2m^3 - m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$.

Do $m > 0$ nên ta được $m = 1$.

Câu 3. Gọi m_0 là giá trị để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho khoảng cách từ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$ đến AB là lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

- A. $m_0 < 1$. B. $m_0 \in (1, 3)$. C. $m_0 \in (2; 4)$. D. $m_0 \in (-1; 1)$.

Lời giải:

Ta có $y' = 3mx^2 - 6mx + 2m + 1$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow PT : 3mx^2 - 6mx + 2m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 3m(2m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$$

Khi đó đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A, B là:

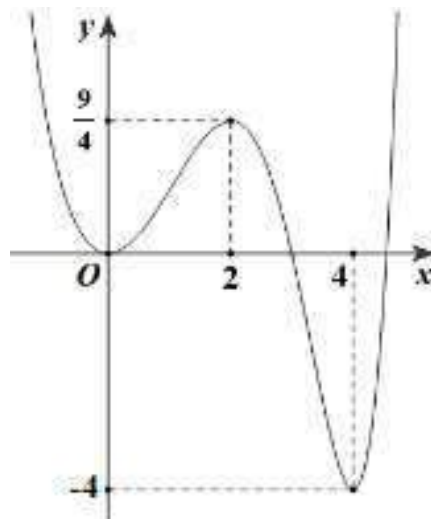
$$y = \left(-\frac{2m}{3} + \frac{2}{3}\right)x + \frac{10}{3} - \frac{m}{3} \Leftrightarrow (2-2m)x - 3y + 10 - m = 0$$

Đường thẳng AB luôn đi qua điểm $E\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ nên $d(I; AB) \leq IE$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow EI \perp AB$

$$\text{Mà } \overrightarrow{EI} = \left(1; \frac{3}{4}\right) \text{ nên } EI \perp AB \Leftrightarrow \frac{2-2m}{1} = -\frac{3}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow m = 3(tm).$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(5-2x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9; 9)$ thỏa mãn $2m \in \mathbb{Z}$ và hàm số $y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị?



- A. 26. B. 25. C. 24. D. 27.

Lời giải:

Đặt $t = 5 - 2x$. Khi $y = f(5 - 2x)$ có 3 điểm cực trị $x=0, x=2, x=4$ thì $y = f(t)$ có 3 điểm cực trị $t=5, t=1, t=-3$ và $f(5)=0, f(1)=\frac{9}{4}, f(-3)=-4$.

Bảng xét dấu $y = f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	-3	1	5	$+\infty$					
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(t)$		$+\infty$		-4		$\frac{9}{4}$		0		$+\infty$

$$\text{Xét } g(x) = 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 24x^2 f'(4x^3 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^3 + 1 = 5 \\ 4x^3 + 1 = 1 \\ 4x^3 + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x = 1 \\ x^3 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

$$\text{Xét phương trình } 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f(4x^3 + 1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}.$$

Đặt $u = 4x^3 + 1 \Rightarrow u \in \mathbb{R}$

Số nghiệm $f(4x^3 + 1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$ bằng số nghiệm phương trình $f(u) = f(t) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$.

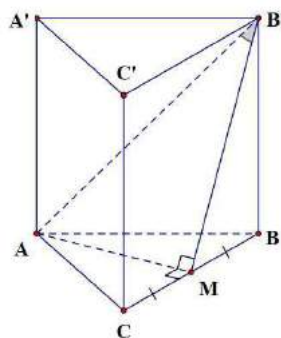
Để $y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị thì $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \geq \frac{9}{4} \\ -4 < \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ \frac{1}{2} \leq m < \frac{17}{2} \end{cases}. \text{ Vì } m \in (-9; 9) \text{ và } 2m \in \mathbb{Z} \text{ nên có 26 giá trị.}$$

Câu 5. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCB'C')$ bằng 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm BC

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$ do đó góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCB'C')$ bằng góc $\widehat{AB'M}$

$$\text{Xét tam giác } \triangle AB'M \text{ có } \widehat{AB'M} = 30^\circ, \widehat{AMB'} = 90^\circ, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ nên } AB' = \frac{AM}{\sin 30^\circ} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° , $A'A = A'B = A'C$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

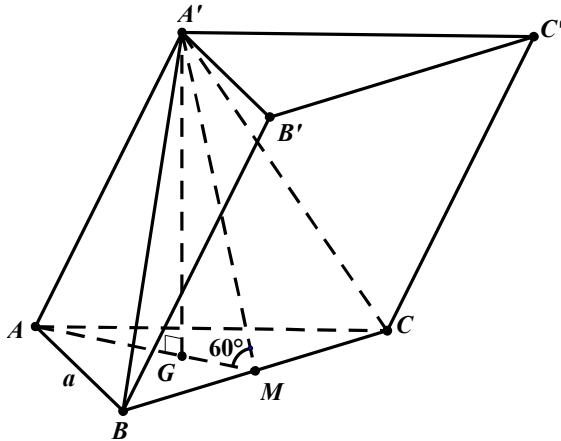
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải:



Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác đều ABC .

Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $A'G \perp (ABC)$.

Kết hợp với $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $GM \perp BC$ suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MG} = 60^\circ$.

Ta tính được $MG = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $A'G = MG \tan \widehat{A'MG} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($b, c, d, e \in \mathbb{R}$) có các giá trị cực trị là 1, 4 và 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ và trục hoành bằng

A. 4.

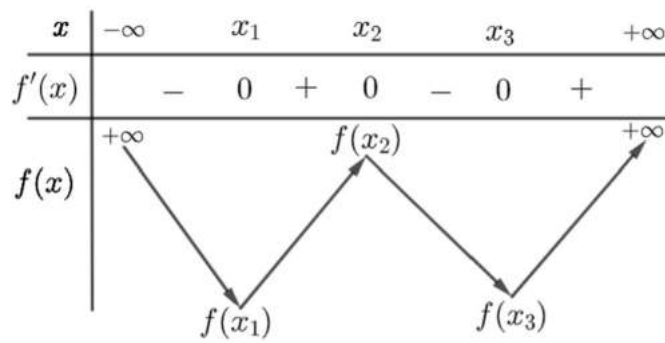
B. 6.

C. 2.

D. 8.

Lời giải:

+) Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là ba điểm cực trị của hàm số $f(x)$. Ta có bảng biến thiên:



+) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ và trục hoành là:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_i \ (i = 1, 2, 3) \\ f(x_i) > 0 \text{ (TM)} \end{cases}$$

+) Diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx - \int_{x_2}^{x_3} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} \Big|_{x_1}^{x_2} - 2\sqrt{f(x)} \Big|_{x_2}^{x_3} = 4\sqrt{f(x_2)} - 2\sqrt{f(x_1)} - 2\sqrt{f(x_3)} = 6.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2 + y'' \cdot y = -4$ và $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. 0,95.

B. 0,96.

C. 0,98.

D. 0,97.

Lời giải:

$$\text{Ta có } (f'(x))^2 + f''(x) \cdot f(x) = -4 \Leftrightarrow (f'(x) \cdot f(x))' = -4$$

$$\Leftrightarrow \int (f'(x) \cdot f(x))' dx = \int -4 dx \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = -4x + C$$

$$\Leftrightarrow \int f'(x) \cdot f(x) dx = \int (-4x + C) dx \Leftrightarrow \int f(x) d(f(x)) = -4 \frac{x^2}{2} + C \cdot x + B$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = -2x^2 + C \cdot x + B \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2C \cdot x + B}.$$

$$\text{Giả thiết cho } f(0) = 1 \text{ và } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{B} = 1 \\ \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{C}{2} + B} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} \quad (C)$$

*) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành $\sqrt{-4x^2 + 2x + 1} = 0$.

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } (C) \text{ luôn ở phía trên trục hoành nên } S = \int_{\frac{1 - \sqrt{5}}{4}}^{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} dx \approx 0,98.$$

- Câu 9.** Cho đường cong $(C): y = x^3$. Xét điểm A có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A tạo với (C) một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ của điểm A thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải:

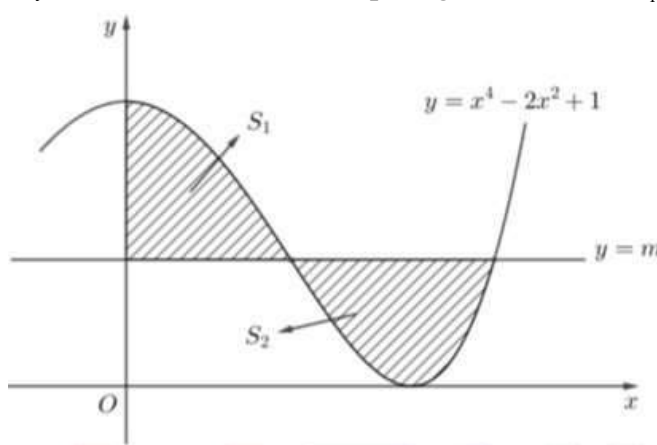
Xét $A(a; a^3) \in (C), (a > 0) \Rightarrow$ tiếp tuyến tại $A: y = 3a^2(x - a) + a^3 = 3a^2x - 2a^3$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \int_{-2a}^a |x^3 - 3a^2x + 2a^3| dx = \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx = \frac{27}{4}a^4 = 27 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} (a > 0).$$

- Câu 10.** Đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 1$) cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại hai điểm thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ.



Biết $S_1 = S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$. B. $m \in \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. D. $m \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

Lời giải:

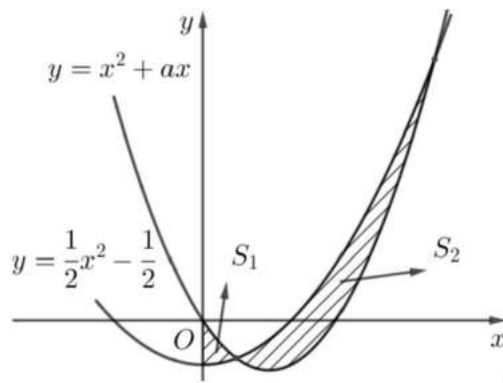
Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2x^2 + 1 = m \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = m \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{m}}$.

Vậy các giao điểm thuộc góc phần tư nhất của hệ tọa độ Oxy có hoành độ bằng $x = \sqrt{1 - \sqrt{m}}$ và $x = \sqrt{1 + \sqrt{m}}$.

$$\text{Diện tích } S_1 = \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx \text{ và } S_2 = \int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx.$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1+\sqrt{m})^5}}{5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sqrt{m})^3} + (1-m)\sqrt{1+\sqrt{m}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{9}.$$

- Câu 11.** Hai parabol $y = x^2 + ax$; $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ cùng với trục tung tạo thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên dưới:



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.** $\left(-\frac{5}{4}; -1\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$. **C.** $\left(-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-2; -\frac{7}{4}\right)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 + ax = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -a - \sqrt{a^2 - 1} \\ x_2 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } S_1 = \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{2}\right) dx; S_2 = -\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{2}\right) dx.$$

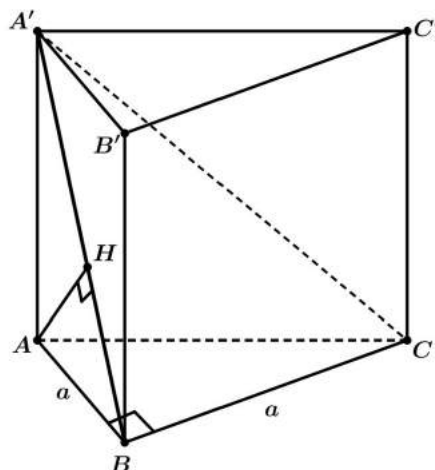
$$\text{Do đó } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{ax_1^2}{2} + \frac{1}{2}x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(-a + \sqrt{a^2 - 1})^3 + \frac{a}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 1})^2 + \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 1}) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{\sqrt{3}} \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right).$$

Câu 12. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Lời giải:



Kẻ $AH \perp A'B$, $H \in A'B$.

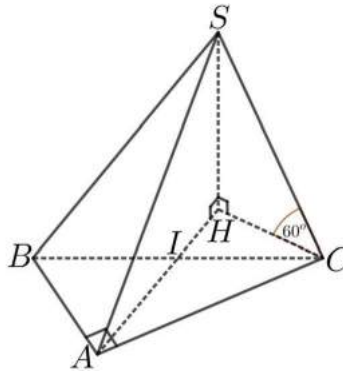
$$\text{Vì } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AH.$$

Ta có $BC \perp AH$, $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC)$. Do đó $d(A, (A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ vuông tại A , ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{9}{6a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow A'A = a\sqrt{2}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'A = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

- Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A , $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC , hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2. \quad BC = 2a, IA = a, IH = \frac{a}{2}.$$

Tam giác HIC vuông tại I ta có $HC^2 = HI^2 + IC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

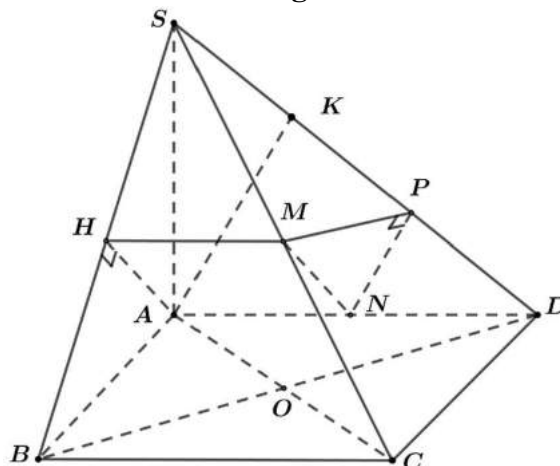
$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} \Leftrightarrow SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}.$$

- Câu 14.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải:



+ Gọi H là trung điểm SB , vì ΔSAB vuông cân tại $A \Rightarrow AH \perp SB$ (1).

+ Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (3).

+ Gọi K là hình chiếu của A lên SD , chứng minh tương tự ta có $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$ (4)

+ Từ (3), (4) $\Rightarrow (\widehat{SBC}, \widehat{SDC}) = (\widehat{AH}, \widehat{AK}) = \varphi$.

+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm SC, AD , dễ dàng chứng minh được $AHMN$ là hình bình hành, suy ra $MN \parallel AH$

+ Kẻ $NP \parallel AK$ ($P \in SD$), vì $NP \parallel AK \Rightarrow NP \perp (SCD) \Rightarrow NP \perp MP$.

+ Ta có $(\widehat{AH}, \widehat{AK}) = (\widehat{MN}, \widehat{NP}) = \widehat{MNP} = \varphi$ (vì ΔMNP vuông tại P).

+ Đặt $AD = x$, dễ thấy $AK = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow NP = \frac{ax}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$.

+ Xét ΔMNP vuông tại P , ta có $\cos \widehat{MNP} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{NP}{MN} = \frac{\frac{ax}{2\sqrt{a^2 + x^2}}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 \sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD . Biết mặt bên của hình chóp là tam giác đều và khoảng cách từ O đến mặt bên là $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

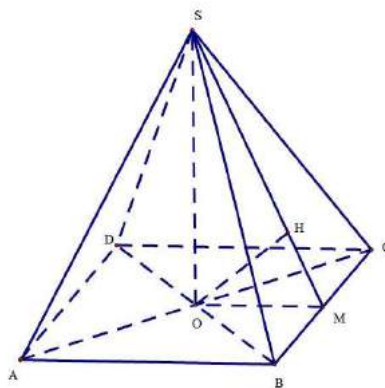
A. $16a^3 \sqrt{3}$.

B. $8a^3 \sqrt{3}$.

C. $48a^3 \sqrt{3}$.

D. $24a^3 \sqrt{3}$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của BC . Vì mặt bên là tam giác đều nên $BC \perp SM$. Mặt khác $BC \perp SO$ nên $BC \perp (SOM) \Rightarrow (SOM) \perp (SBC)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên SM ta có $OH \perp (SBC)$, do đó $d(O; (SBC)) = OH$.

Đặt $AB = x$, ta có $SA = x$, $SM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$; $OM = \frac{x}{2}$; $SO^2 = SM^2 - OM^2 = \frac{x^2}{2}$.

Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{x\sqrt{6}}{6}.$$

Theo giả thiết $d(O; (SBC)) = OH = 2a$ nên $a = \frac{x\sqrt{6}}{12} \Rightarrow x = 2a\sqrt{6}$.

Từ đó suy ra $SO = 2a\sqrt{3}; S_{ABCD} = 24a^2$. Thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 24a^2 = 16\sqrt{3}a^3$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

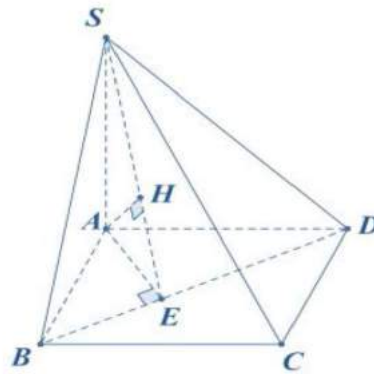
A. $\frac{2a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{2a^3}{9}$.

D. $2a^3$.

Lời giải:



Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD, (E \in BD)$.

Kẻ $AH \perp SE, (H \in SE)$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH$.

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$.

Xét tam giác ABD vuông tại A , ta có: $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét tam giác SAE vuông tại A ta có: $AS = \frac{AH \cdot AE}{\sqrt{AE^2 - AH^2}} = \frac{\frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{4a^2}{5} - \frac{4a^2}{9}}} = a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot SA = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A , $BC = 3a, AB = a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

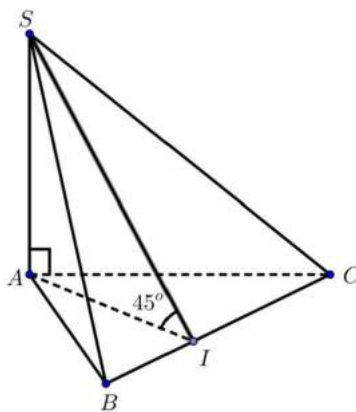
A. $V_{S.ABC} = \frac{4a^3}{9}$.

B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

D. $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{9}$.

Lời giải:



Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

Mà $BC \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABC), BC \subset (ABC)$). Suy ra $BC \perp (SAI)$, suy ra $BC \perp SI$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AI \perp BC, SI \perp BC \\ AI \subset (ABC), SI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SI, AI) = \widehat{SIA} = 45^\circ.$$

Xét tam giác ABC có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = (3a)^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}a$.

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ có } \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{8a^2} = \frac{9}{8a^2} \Rightarrow AI = \frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

Xét tam giác SAI vuông tại A , có $\widehat{SIA} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân.

$$\text{Suy ra } AI = SA = \frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2\sqrt{2}a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{4}{9}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Câu 18. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , các mặt bên tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp đó.

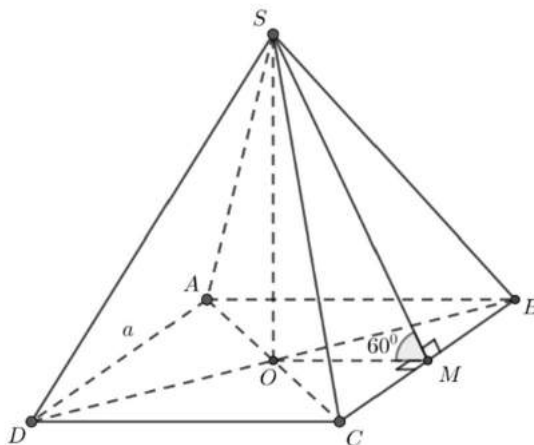
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:



Gọi O là giao điểm của AC và BD , gọi M là trung điểm BC . Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle SOM$ có $OM = \frac{a}{2}$, $\widehat{SMO} = 60^\circ$ thì $SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt).

Câu 19. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

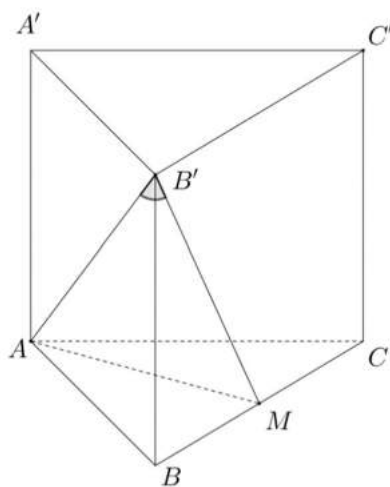
A. $2\sqrt{6}a^3$.

B. $6a^3$.

C. $2a^3$.

D. $\sqrt{6}a^3$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của BC

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$

$\Rightarrow B'M$ là hình chiếu của AB' trên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Do đó góc giữa AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng góc giữa AB' và $B'M$ và bằng $\widehat{AB'M} = 30^\circ$

Tam giác $AB'M$ vuông tại M nên $AB' = \frac{AM}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}a$.

Tam giác $AA'B$ vuông tại A nên $AA' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA' \cdot S_{ABC} = 2\sqrt{2}a \cdot a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}a^3$.

Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 3a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

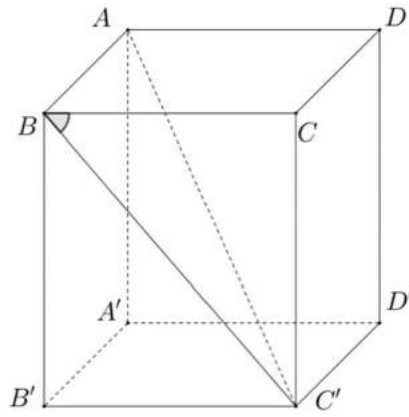
A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

B. $3\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{9\sqrt{3}a^3}{2}$.

D. $9\sqrt{3}a^3$.

Lời giải:



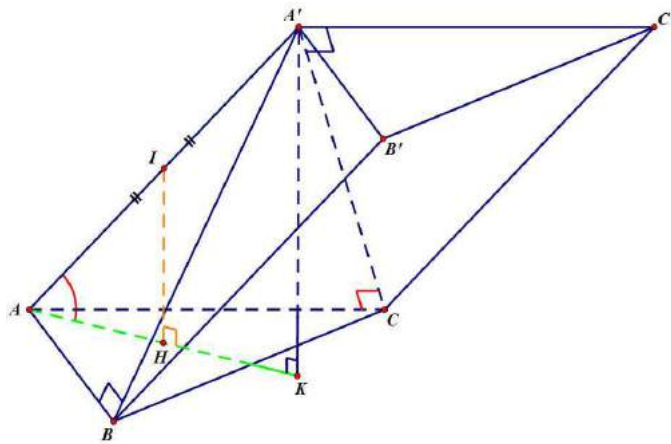
$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABC') \cap (ABCD) = AB \\ (ADD'A') \perp AB \\ (BCC'B') \cap (ABCD) = BC \\ (BCC'B') \cap (ABC') = BC' \end{cases} \Rightarrow \widehat{(ABC'), (ABCD)} = \widehat{C'BC} = 60^\circ.$$

Tam giác $C'BC$ vuông tại C nên $CC' = BC \cdot \tan \widehat{C'BC} = 3a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = 3\sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot 3a = \frac{9\sqrt{3}a^3}{2}$.

- Câu 21.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = 3a, AC = 4a, \widehat{A'BA} = \widehat{CA'C'} = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{5\sqrt{3}}{2}a$, góc giữa AA' và $(A'B'C')$ bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- A.** $30\sqrt{3}a^3$. **B.** $10\sqrt{3}a^3$. **C.** $5\sqrt{3}a^3$. **D.** $15\sqrt{3}a^3$.

Lời giải:



Ta có: $\widehat{A'BA} = \widehat{CA'C'} = 90^\circ \Rightarrow$ Điểm I trung điểm AA' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$. Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là điểm đối xứng của A qua $H \Rightarrow AK$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} IH \perp (ABC) \\ IH \parallel A'K \end{cases} \Rightarrow A'K \perp (ABC).$$

$$\text{Mà } IH = \frac{5\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow A'K = 5\sqrt{3}a.$$

$$\text{Và } (\widehat{AA', (A'B'C')}) = (\widehat{AA', (ABC)}) = \widehat{A'AK} \Rightarrow \widehat{A'AK} = 60^\circ$$

$$\text{Xét tam giác } A'AK \text{ có } AK = \frac{AK'}{\tan \widehat{A'AK}} = \frac{5a\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 5a.$$

Xét tam giác ABC . Áp dụng định lý sin ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R = 5a \Rightarrow \begin{cases} \sin B = \frac{4}{5} \\ \sin C = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin B = \cos C = \frac{4}{5} \text{ (vì } \cos C = -\frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ \Rightarrow \text{không tồn tại tam giác } ABC).$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{Thể tích lăng trụ: } V = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a \cdot 5\sqrt{3}a = 30\sqrt{3}a^3.$$

Câu 22. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $S.ABCD$ là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

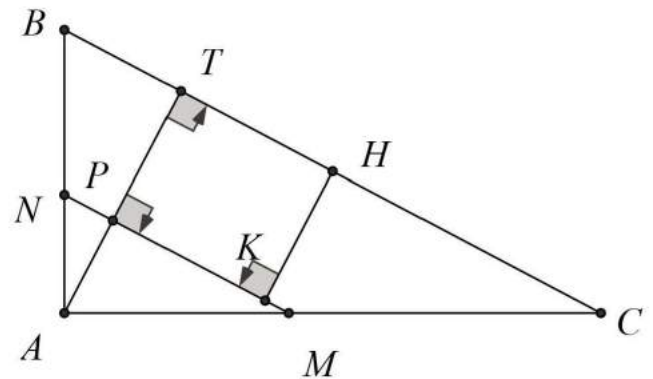
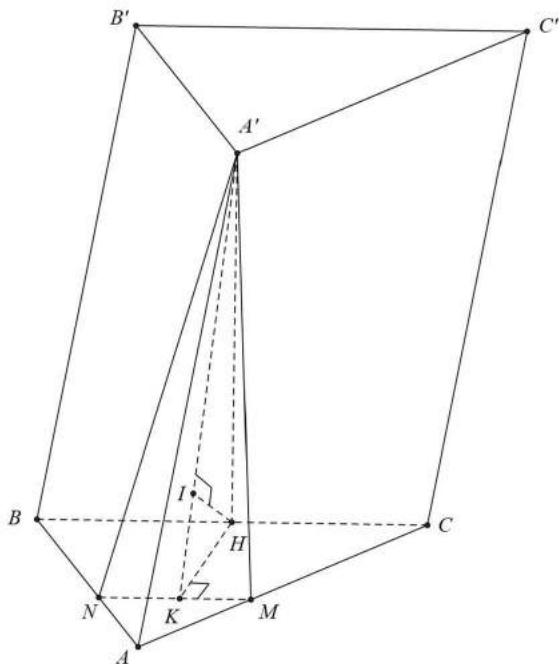
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $V = a^3$.

C. $V = \frac{3a^3}{2}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:



Kẻ $MN \parallel BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$$d(A'M; BC) = d(BC; (A'MN)) = d(H; (A'MN)) = HI \Rightarrow HI = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Kẻ } AT \parallel HK, AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \frac{2}{3} AT$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AT^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{2}{3} AT = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Tam giác } A'HK \text{ vuông tại } H \Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HI^2} - \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: } V = A'H \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 23. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết thể tích của khối lăng trụ là $2a^3\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

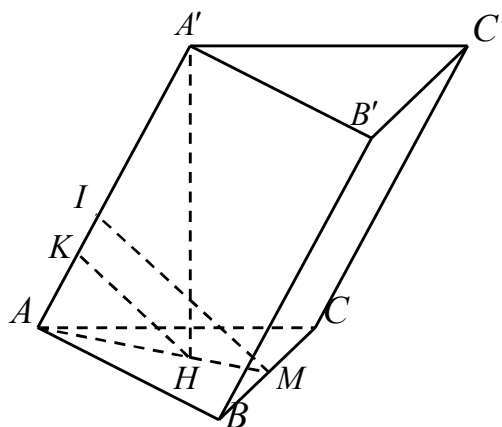
A. $\frac{4a}{3}$.

B. $\frac{8a}{3}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $3a$.

Lời giải:



Gọi H là trọng tâm của $\triangle ABC$, M là trung điểm BC .

Kẻ $MI \perp AA'$ tại I .

Kẻ $HK \perp AA'$ tại K .

Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$ mà $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp MI$.

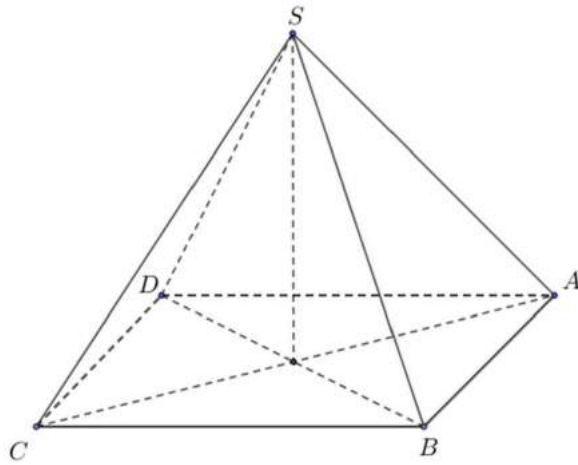
Suy ra MI là đoạn vuông góc chung của AA' và BC .

$$S_{ABC} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A'H = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = 2a$$

$$AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow HK = a$$

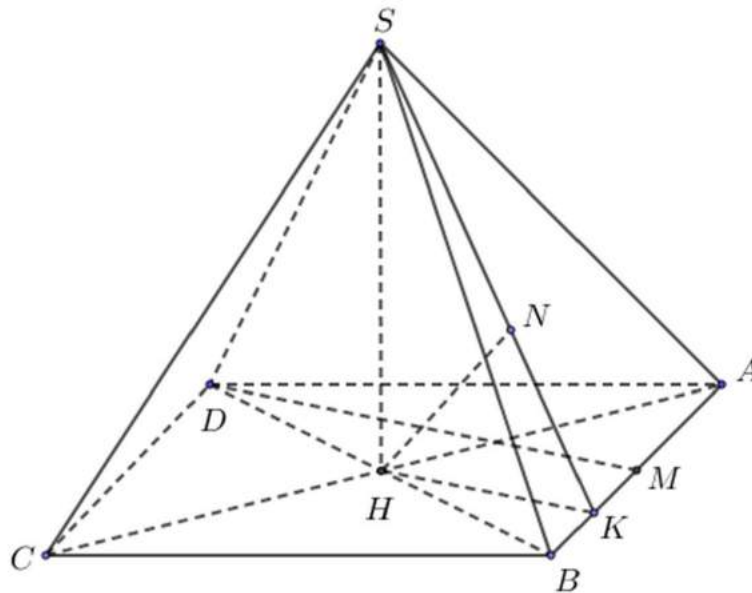
$$d(AA', BC) = MI = \frac{3}{2} HK = \frac{3a}{2}.$$

Câu 24. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, cạnh đáy bằng a , thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Biết hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của hình thoi (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng



- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải:



$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB \cdot AD \sin \hat{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \text{ Độ dài đường cao } SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Gọi M là trung điểm AB , K là trung điểm của BM

$$\text{Ta có } DM \perp AB \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HK \parallel DM \text{ và } HK = \frac{DM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

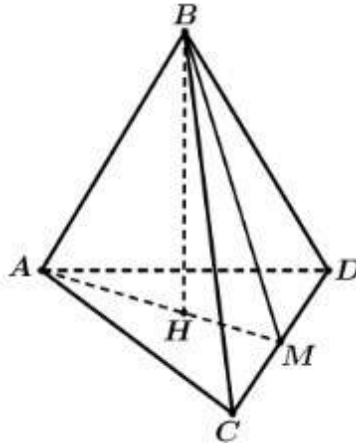
$$\text{Ta có } AB \perp (SHK) \Rightarrow (SAB) \perp (SHK), (SAB) \cap (SHK) = SK$$

$$\text{Vẽ } HN \perp SK \text{ tại } N \Rightarrow HN \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HN.$$

$$HN = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}, d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB)) = 2HN = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

- Câu 25.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = a\sqrt{2}, BC = BD = a$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng
- A. 90° . **B. 45° .** C. 30° . D. 60° .

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của CD .

Xét tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B nên $\begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM)$.
 $((ACD), (BCD)) = \widehat{AMB}$.

Kẻ BH vuông góc với AM tại $H \Rightarrow BH \perp AM$.

Mà $CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp BH \Rightarrow BH \perp (ACD)$.

Suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{3}BH \cdot S_{ACD}$ với $BH = d(B, (ACD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{ACD} = \frac{3V}{BH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$.

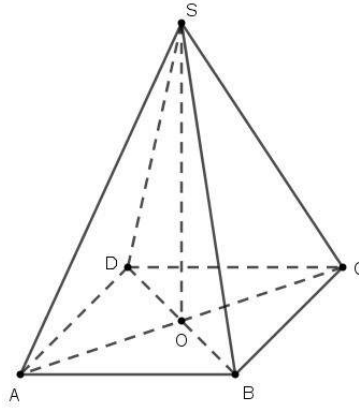
Đặt $CD = 2x$.

Suy ra $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - x^2} \Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2}AM \cdot CD = x\sqrt{2a^2 - x^2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$.
 $\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác BMH vuông tại H có $\sin \widehat{BMH} = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \widehat{AMB}$.
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = 45^\circ \Rightarrow ((ACD), (BCD)) = 45^\circ$.

- Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chu vi tam giác SAC bằng 8. Trong trường hợp thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất, hãy tính cosin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.
- A. $\frac{2}{3}$.** B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, đặt $SO = x$ và $OC = y$.

Chu vi tam giác SAC bằng là

$$C = 2SA + AC = 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2y = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (4 - y)^2 \Leftrightarrow y = \frac{16 - x^2}{8}.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$

$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.x.(y\sqrt{2})^2 = \frac{2}{3}.xy^2 = \frac{2}{3}.x\left(\frac{16 - x^2}{8}\right)^2.$$

$$\text{Ta có } V' = \frac{1}{96}(x - 4)(x + 4)(5x^2 - 16).$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } V_{\max} \text{ khi } x = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ và } y = \frac{8}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \cos(SA; (ABCD)) = \cos \widehat{SAO} = \frac{OA}{OS} = \frac{\frac{8}{5}}{\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) + x.f'(x) = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x)' \cdot f(x) + x.f'(x) = 4x^3 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow x.f(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + C}{x}$$

$$\text{Vì do } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ nên } C = 0. \text{ Do đó } f(x) = x^3 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$, ta có:

$$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường } y = f(x) \text{ và } y = f'(x) \text{ là: } S = \int_0^2 |f(x) - f'(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

- Câu 28.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(\sin x - x) = \frac{\cos 2x}{\cos x - 1}$. Khi đó $\int_{-\pi}^0 f(x) dx$ bằng
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Ta có $(\cos x - 1)f(\sin x - x) = \cos 2x$.

Lấy tích phân hai vế từ 0 tới π , suy ra

$$\int_0^{\pi} (\cos x - 1)f(\sin x - x) dx = \int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0.$$

Đặt $t = \sin x - x$, đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = -\pi$ và $dt = (\cos x - 1)dx$. Do đó

$$\int_0^{-\pi} f(t) dt = -\int_0^{\pi} f(x) dx = 0.$$

- Câu 29.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

- A.** 0. **B.** 1. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d(\sin x) = f(x) \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra: $f'(x) + \sin x = 0 \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f(x) = \cos x + C$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1.$$

- Câu 30.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 2$, $f(x) \neq 0, \forall x > 0$ và $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng
- A. $\frac{2}{5}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $-\frac{5}{2}$. **D. $\frac{5}{2}$.**

Lời giải:

$$\text{Ta có } (x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \quad \forall x \in [1; 2] (*)$$

Lấy tích phân 2 vế trên $[1; 2]$ ta được

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \int_1^2 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \Big|_1^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

- Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 4x^3 + 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. **C. $\frac{16}{15}$.** D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = [f(x) \cdot f'(x)]'. \text{ Từ giả thiết ta có: } [f(x) \cdot f'(x)]' = 4x^3 + 2x$$

$$\text{Suy ra: } f(x) \cdot f'(x) = \int (4x^3 + 2x) dx = x^4 + x^2 + C. \text{ Với } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Nên ta có: } f(x) \cdot f'(x) = x^4 + x^2$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^1 (x^4 + x^2) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{8}{15} \Rightarrow f^2(1) = \frac{16}{15}.$$

- Câu 32.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$; $f(x)$ và $f'(x)$ nhận giá trị dương trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(x) = 2, \int_0^1 [f'(x) f^2(x) + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$. Khi đó $I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx$ bằng

A. $I = \frac{15}{4}$.

B. $I = \frac{15}{2}$.

C. $I = \frac{17}{2}$.

D. $I = \frac{19}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)f^2(x) + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)f^2(x) - 2\sqrt{f'(x)}f(x) + 1] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [\sqrt{f'(x)}f(x) - 1]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{f'(x)}f(x) = 1$$

$$\Rightarrow f'(x)f^2(x) = 1$$

$$\Rightarrow \int f'(x)f^2(x) dx = \int dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 2 \Rightarrow C = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Do đó ta có: } f^3(x) = 3x + 8.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 (3x + 8) dx = \frac{19}{2}.$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0$ với $\forall x \in [0; 1]$ và $[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + [f(x)]^3$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\frac{3}{2} < f(1) < 2$.

B. $\frac{5}{2} < f(1) < 3$.

C. $2 < f(1) < \frac{5}{2}$.

D. $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Lời giải:

$f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0$ với $\forall x \in [0; 1]$ và $[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + [f(x)]^3$

$$\Rightarrow [f(x)]^2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{1 + [f(x)]^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3[f(x)]^2 \cdot f'(x)}{2\sqrt{1 + [f(x)]^3}} = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 cả hai vế ta được:

$$\int_0^1 \frac{3[f(x)]^2 \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+[f(x)]^3}} dx = \int_0^1 \frac{3}{2\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+[f(x)]^3} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+[f(1)]^3} - \sqrt{1+[f(0)]^3} = \frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow f(1) = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + 3\right)^2} - 1 \approx 2,605.$$

- Câu 34.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = e^x + \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t} dt$ với $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1 + \ln 2023) = a + be$, với $a; b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a + b$ có giá trị là
- A. 2023. B. 2025. C. 2024. D. 2026.

Lời giải:

Đặt $T = \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t} dt$. Ta có $f(x) = e^x + T$.

Khi đó $T = \int_0^1 \frac{e^t + T}{e^t} dt = \int_0^1 1 + T \cdot e^{-t} dt = t - T \cdot e^{-t} \Big|_0^1 = (1 - T \cdot e^{-1}) - (0 - T)$

Suy ra $T = e$, và $f(x) = e^x + e$.

Vậy $f(1 + \ln 2023) = e^{1 + \ln 2023} + e = 2023e + e = 2024e$. Do đó $a = 0; b = 2024 \Rightarrow a + b = 2024$.

- Câu 35.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1) \text{ với mọi } x \in (0; +\infty)$$

Biết $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

- A. 7. B. $\frac{29}{2}$. C. 5. D. $\frac{19}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \cdot \ln(x+1) \Leftrightarrow 2x \cdot f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = (2x+1) \cdot \ln(x+1) \quad (1)$

Lấy tích phân cận từ 0 đến 4 hai vế của (1) ta được

$$\int_0^4 2x \cdot f(x^2 + 1) dx + \int_0^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (2x+1) \cdot \ln(x+1) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^4 f(x^2 + 1) d(x^2 + 1) + \int_0^4 f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = \int_0^4 (2x+1) \cdot \ln(x+1) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{17} f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_0^4 (2x+1) \cdot \ln(x+1) dx \quad (2)$$

Lấy tích phân cận từ 0 đến 1 hai vế của (1) là xong.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(9) = 9$ và $[f(x) + xf'(x)]^2 = 4f(x), \forall x \in (0; +\infty)$. Nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là:

A. $4x + 24\sqrt{x} - 9\ln x + C.$

B. $2x + 12\sqrt{x} - 9\ln|x| + C.$

C. $x + 12\sqrt{x} + 9\ln|x| + C.$

D. $4 + \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} + C.$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } [f(x) + xf'(x)]^2 = 4f(x) \Rightarrow \frac{[f(x) + xf'(x)]^2}{4f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{[f(x) + xf'(x)]^2}{4xf(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{(x)'f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{(xf(x))'}{2\sqrt{xf(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{xf(x)})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{xf(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C_1.$$

$$\text{Mà } f(9) = 9 \Rightarrow \sqrt{9 \cdot f(9)} = 2\sqrt{9} + C_1 \Rightarrow C_1 = 3 \Rightarrow \sqrt{xf(x)} = 2\sqrt{x} + 3 \Rightarrow f(x) = \frac{(2\sqrt{x} + 3)^2}{x}$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \int \frac{(2\sqrt{x} + 3)^2}{x} dx = \int \left(4 + \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} \right) dx = 4x + 24\sqrt{x} - 9\ln x + C_2.$$

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f'(x)$ bằng:

A. $f'(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}.$

B. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$

C. $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$

D. $f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)^2}.$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -2x \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int 2x dx = -x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(1)} = -1^2 + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Câu 38. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 2$?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \Delta' = 2m + 2$$

$$\text{TH1: } \Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó: } |z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{m^2}.$$

$$\text{Suy ra: } 2\sqrt{m^2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} (l).$$

$$\text{TH2: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Vì $a.c = m^2 \geq 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1.z_2 \geq 0$ hoặc $z_1.z_2 \leq 0$.

$$\text{Suy ra: } |z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = 2 \Leftrightarrow |2m + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (l)} \\ m = 0 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 6z + m = 0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0; 20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1.z_1} = \overline{z_2.z_2}$?

A. 20.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải:

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta = 9 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$. Khi đó phương trình (*) có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và

$$z_1 = \overline{z_1}, z_2 = \overline{z_2}. \text{ Nên } \overline{z_1.z_1} = \overline{z_2.z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{cases}$$

Với $z_1 = z_2$, không thỏa mãn yêu cầu phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, nên loại.

Với $z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0$ không thỏa mãn, do theo Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = 6$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 9$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 và

$z_2 = \overline{z_1}, z_1 = \overline{z_2}$. Yêu cầu $\overline{z_1.z_1} = \overline{z_2.z_2} \Leftrightarrow z_1.z_2 = \overline{z_1.z_2}$ luôn đúng với $m > 9$.

Vậy trong khoảng $(0; 20)$ có 10 số m_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2mz - m + 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Phương trình đã cho có $\Delta' = m^2 + m - 12$.

$$\text{Trường hợp 1: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 3 \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2 phân biệt.

$$\text{Do đó, } |z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$$

$$\Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)^2 = (\sqrt{2}|z_1 - z_2|)^2$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1.z_2| = 2(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1.z_2)$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1.z_2 + 2|z_1.z_2| = 2[(z_1 + z_2)^2 - 4z_1.z_2]$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 6z_1z_2 - 2|z_1z_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 6(-m+12) - 2|-m+12| = 0 (*)$$

$$\text{Nếu } m < -4 \text{ hoặc } 3 < m < 12 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow 4m^2 - 8(-m+12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } m \geq 12 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow 4m^2 - 4(-m+12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0 \text{ (không thỏa mãn).}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3.$$

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp:

$$-m + i\sqrt{-m^2 - m + 12} \text{ và } -m - i\sqrt{-m^2 - m + 12}.$$

$$\text{Do đó, } |z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + (-m^2 - m + 12)} = 2\sqrt{-m^2 - m + 12}$$

$$\Leftrightarrow -m + 12 = -m^2 - m + 12$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 41. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 + 1 = 0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 4$?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Ta có: $\Delta' = 2m$

TH1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = m+1 \pm i\sqrt{-2m}$.

$$\text{Ta có } |z_1| = |z_2|, \text{ do đó } |z_1| + |z_2| = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m = 4 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} (l) \\ m = -\sqrt{3} (tm) \end{cases}.$$

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 .

Ta có $z_1 + z_2 = 2(m+1) > 0; z_1z_2 = m^2 + 1 > 0, \forall m > 0$. Suy ra: $z_1 > 0, z_2 > 0$.

Khi đó $|z_1| + |z_2| = 4 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 4 \Leftrightarrow 2(m+1) = 4 \Leftrightarrow m = 1 (tm)$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để trên tập số phức, phương trình $z^2 + 2mz + m^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{10}$.

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Ta có $\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 2) = m + 2$.

TH1: Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -2$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2m \\ z_1 \cdot z_2 = m^2 - m - 2 \end{cases}$$

Ta có: $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 + 2|z_1||z_2| = 40$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2(m^2 - m - 2) + 2|m^2 - m - 2| = 40$$

$$\Leftrightarrow |m^2 - m - 2| = 18 - m^2 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 18 - m^2 - m \\ m^2 - m - 2 = -18 + m^2 + m \\ 18 - m^2 - m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 10 \\ m = 8 \\ 18 - m^2 - m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{10}.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $m = \sqrt{10}$.

TH2: Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -2$ thì phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2} = -m \pm i\sqrt{-m-2}$

thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(-m)^2 + (\sqrt{-m-2})^2} = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện thì $m = -3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải:

Ta có $\Delta = -3a^2 - 10a + 9$.

+ TH1: $\Delta \geq 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2} = \frac{a-3 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, khi đó

$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |a-3| = |\sqrt{\Delta}| \Leftrightarrow (a-3)^2 = \Delta \Leftrightarrow 4a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$. Thỏa mãn điều kiện $\Delta \geq 0$.

+ TH2: $\Delta < 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_{1,2} = \frac{a-3 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$, khi đó

$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |a-3| = |i\sqrt{-\Delta}| \Leftrightarrow (a-3)^2 = -\Delta \Leftrightarrow 2a^2 + 16a - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -9 \end{cases}$. Thỏa mãn điều kiện $\Delta < 0$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Cho phương trình $z^3 - (m+1)z^2 + (m+1+mi)z - 1-mi = 0$ trong đó $z \in \mathbb{C}$, m là tham số thực. Số giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Xét phương trình:

$$z^3 - (m+1)z^2 + (m+1+mi)z - 1 - mi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 - mz + 1 + mi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 - i^2 - (mz - mi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ (z-i)(z+i-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = i \\ z = m-i \end{cases}.$$

Đặt $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(m;-1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các nghiệm $z=1$, $z=i$, $z=m-i$ trên mặt phẳng phức.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (m-1;-1)$, $\overrightarrow{BC} = (m;-2)$

$$AB = \sqrt{2}, BC = \sqrt{m^2+4}, AC = \sqrt{(m-1)^2+1}.$$

Ba điểm A , B , C tạo thành một tam giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay $m \neq 2$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ BC = AB \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(m-1)^2+1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{m^2+4} = \sqrt{2} \\ \sqrt{(m-1)^2+1} = \sqrt{m^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ -2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 2$ ta được $m \in \{0; -1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn đề.

Câu 45. Cho phương trình $az^2 + bz + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ có các nghiệm z_1, z_2 đều không là số thực. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ là

A. $P = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$

B. $P = \frac{2c}{a}.$

C. $P = \frac{4c}{a}.$

D. $P = \frac{2b^2 - 4ac}{a^2}.$

Lời giải:

Cách 1: Tự luận.

Ta có phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có các nghiệm z_1, z_2 đều không là số thực, do đó $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ta có $\Delta = i^2(4ac - b^2)$.

$$* \begin{cases} z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} |z_1 + z_2|^2 = \frac{b^2}{a^2} \\ |z_1 - z_2|^2 = \frac{4ac - b^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \frac{4c}{a}. \text{ Vậy } P = \frac{4c}{a}.$$

Cách 2: Trắc nghiệm.

Cho $a=1, b=0, c=1$, ta có phương trình $z^2 + 1 = 0$ có 2 nghiệm phức là $z_1 = i, z_2 = -i$. Khi đó $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4$.

Thế $a=1, b=0, c=1$ lên các đáp án, ta thấy chỉ có đáp án C cho kết quả giống.

- Câu 46.** Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Tính S .
- A. 20. **B. 12.** C. 14. D. 8.

Lời giải:

$$9z^2 + 6z + 1 - m = 0 \quad (*)$$

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1 - m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Với $z = 1 \Rightarrow m = 16$ (thỏa mãn).

Với $z = -1 \Rightarrow m = 4$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z = a + bi$ ($b \neq 0$) $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1 - m) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$.

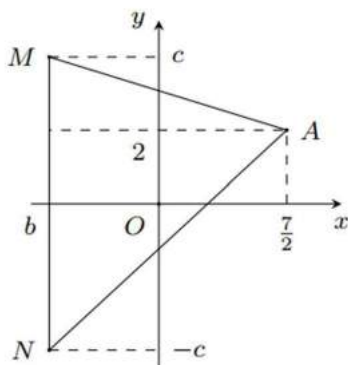
$$\text{Ta có } |z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - m}{9} = 1 \Leftrightarrow m = -8 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

- Câu 47.** Xét các số thực a thay đổi thỏa mãn $|a| \leq 2$ và z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - az + 1 = 0$. Gọi $A\left(\frac{7}{2}; 2\right)$ và M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 . Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN bằng
- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C. $\frac{15\sqrt{15}}{16}$.** D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải:

Phương trình $z^2 - az + 1 = 0$ có $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ (vì $|a| \leq 2$) nên có hai nghiệm phức liên hợp $z_1 = b + ci; z_2 = b - ci$ (giả sử $c > 0$).



$$\text{Ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = a \\ z_1 z_2 = 1 \end{cases} \text{ nên } b = \frac{a}{2} \text{ và } (z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2 = a^2 - 4 = i^2(4 - a^2).$$

$$\text{Do đó } z_1 - z_2 = 2ci = i\sqrt{4 - a^2} \Rightarrow |z_1 - z_2| = 2c = \sqrt{4 - a^2}.$$

$$\text{Khi đó } S_{AMN} = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} - b \right) \cdot 2c = \frac{1}{4} (7 - a) \cdot \sqrt{4 - a^2}.$$

Xét $f(a) = (7-a)\sqrt{4-a^2}$, với $-2 \leq a \leq 2$; có $f'(a) = -\sqrt{4-a^2} + (7-a)\frac{-a}{\sqrt{4-a^2}}$.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-a^2} = \frac{a^2-7a}{\sqrt{4-a^2}}, \text{ (điều kiện } a < 0)$$

$$\Leftrightarrow 4-a^2 = a^2-7a \Leftrightarrow 2a^2-7a-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện ta nhận $a = -\frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$f(-2) = 0; f(2) = 0; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2;2]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \max S_{AMN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{15\sqrt{15}}{4} = \frac{15\sqrt{15}}{16}.$$

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác AMN là $\frac{15\sqrt{15}}{16}$.

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a-4)z + a^2 - a = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

$$z^2 - (a-4)z + a^2 - a = 0 \quad (1)$$

$$\text{Có: } \Delta = (a-4)^2 - 4(a^2 - a) = -3a^2 - 4a + 16.$$

$$+) \text{ Nếu } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow a \in \left[\frac{-2-2\sqrt{13}}{3}; \frac{-2+2\sqrt{13}}{3} \right] \quad (2): \text{ Khi đó (1) có hai nghiệm thực } z_1, z_2.$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad (tm(2)).$$

$$+) \text{ Nếu } \Delta < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; \frac{-2-2\sqrt{13}}{3} \right) \cup \left(\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}; +\infty \right) \quad (3). \text{ Khi đó (1) có hai nghiệm phức}$$

z_1, z_2 là liên hợp của nhau.

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (a-4)^2 - 2(a^2 - a) = 0 \Leftrightarrow -a^2 - 6a + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = 2 \end{cases} \quad (tm(3)).$$

Vậy có 4 số nguyên a thỏa mãn.

Câu 49. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\left| \frac{z-1+3i}{1-i\sqrt{3}} \right| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a - 2b$

khi biểu thức $P = 2|z-i| + |z-5+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 2.

B. 5.

C. -3.

D. -2.

Lời giải:

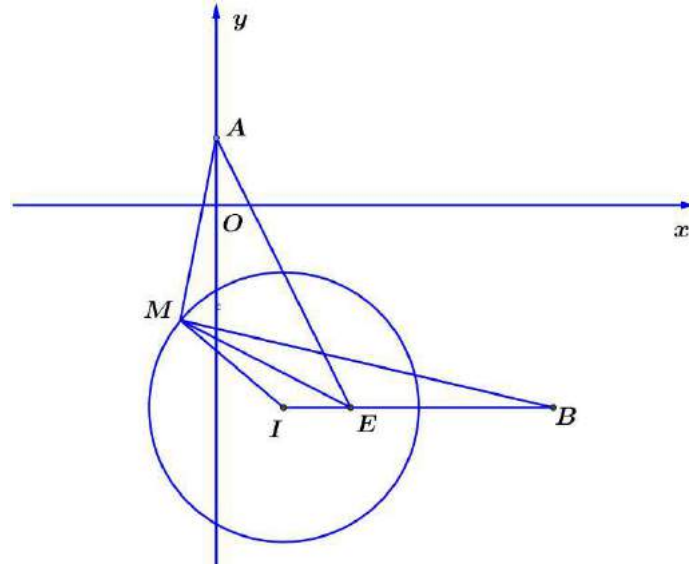
Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi \Rightarrow M(a; b)$.

Theo giả thiết $\left| \frac{z-1+3i}{1-\sqrt{3}i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1+3i| = |1-\sqrt{3}i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+3)^2 = 4$

Khi đó điểm M luôn thuộc đường tròn tâm $I(1; -3)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = i, z_2 = 5 - 3i$ ta có $A(0; 1), B(5; -3)$.

Do đó $P = 2|z-i| + |z-5+3i| = 2MA + MB$



Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng IB sao cho $IE = 1$.

Ta có $IB = 4 \Rightarrow \overrightarrow{IB} = 4\overrightarrow{IE} \Rightarrow E(2; -3)$.

Mặt khác $IM^2 = IE \cdot IB \Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{IB}{IM}$ mà $\widehat{MIE} = \widehat{BIM}$

suy ra hai tam giác $\triangle IME$ và $\triangle IBM$ đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{IB}{IM} = 2 \Rightarrow MB = 2ME \Rightarrow 2MA + MB = 2(MA + ME) \geq 2AE = 4\sqrt{5}$.

Do đó $P = 2MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là $4\sqrt{5}$ khi M là giao điểm của đoạn thẳng EA và đường tròn tâm I .

Đường thẳng EA nhận $\overrightarrow{EA} = (-2; 4)$ làm vectơ chỉ phương nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1)$. Mà EA đi qua điểm $A(0; 1)$ nên có phương trình là $2x + y - 1 = 0$.

Giả sử $M(t; 1-2t)$ thuộc đoạn EA ($0 \leq t \leq 2$).

Mặt khác M thuộc đường tròn tâm I nên $IM^2 = 4 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (4-2t)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 5t^2 - 18t + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{13}{5} \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện $0 \leq t \leq 2$ ta được $t = 1 \Rightarrow M(1; -1)$.

Vậy $a = 1; b = -1 \Rightarrow T = 3a - 2b = 5$.

- Câu 50.** Trên tập các số phức, xét phương trình $z^2 - mz + m + 8 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 phân biệt thỏa mãn $|z_1(z_1^2 + mz_2)| = (m^2 - m - 8)|z_2|$?
- A. 12. B. 6. C. 5. D. 11.

Lời giải:

Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 32$ là biệt thức của phương trình.

TH1: Xét $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 32 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < -4 \end{cases}$ khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân

biệt. Ta có $z_1^2 = mz_1 - m - 8$ suy ra $z_1^2 + mz_2 = m(z_1 + z_2) - m - 8 = m^2 - m - 8$ do đó

$$|z_1(z_1^2 + mz_2)| = (m^2 - m - 8)|z_2| \Leftrightarrow |m^2 - m - 8||z_1| = (m^2 - m - 8)|z_2|.$$

Nếu $z_1 \cdot z_2 = 0$ thì $m + 8 = 0 \Rightarrow m = -8$ không thỏa mãn. Khi đó $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ z_1 = -z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ m = 0 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm.}$$

TH2: Xét $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 8$ khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt và $|z_1| = |z_2|$,

$$\text{ta có } |z_1(z_1^2 + mz_2)| = (m^2 - m - 8)|z_2| \Leftrightarrow |m^2 - m - 8||z_1| = (m^2 - m - 8)|z_2|$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \\ m \leq \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}. \text{ Kết hợp điều kiện ta được } m \in \{-3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Vậy có tất cả là 5 số nguyên cần tìm.

- Câu 51.** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 3m + 10 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1| + |z_2| \leq 8$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải:

Ta có $\Delta' = m^2 - 3m - 10$.

Phương trình không có nghiệm thực khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 5(1)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = m + \sqrt{-m^2 + 3m + 10}i, z_2 = m - \sqrt{-m^2 + 3m + 10}i$

$$\text{Vậy } |z_1| + |z_2| \leq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3m + 10} \leq 8 \Leftrightarrow \sqrt{3m + 10} \leq 4 \Leftrightarrow 3m + 10 \leq 16 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $-2 < m \leq 2$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.