NGUYỄN QUỐC HOÀN

0913 661 886

Tuyển chọn và giới thiệu

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN LỚP 11

Dành cho học sinh lớp 11 và 12 ôn thi THPT QG

Hà Nội, 11 – 2018

LỜI NÓI ĐẦU

Quan hệ vuông góc trong không gian trong chương trình toán hình học lớp 11 là chủ đề rất lớn và rất khó. Với mong muốn giúp các em học sinh học tốt hơn phần này, tôi đã tập hợp các tài liệu hay từ các nguồn khác nhau vào cuốn sách này. Hi vọng các em học sinh sẽ học tốt hơn môn hình học để tích lũy kiến thức lên lớp 12, và không sợ hình học không gian đồng thời yêu thích môn toán hơn.

Sách viết tập trung chủ yếu các câu hỏi trắc nghiệm khách quan và hoàn toàn phù hợp chương trình lớp 11 hiện hành. Tuy nhiên thiếu sót khó tránh khỏi, rất mong nhận được góp ý tích cực của mọi người để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Trân trọng cảm ơn !

Hà Nội, 11 / 2018

Nguyễn Quốc Hoàn

MỤC LỤC

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Vectơ trong không gian

① Vectơ, giá và độ dài của vectơ

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$

Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng *song song* hoặc *trùng nhau*. Ngược lại, hai vectơ có *giá cắt nhau* được gọi là hai vectơ *không cùng phương*. Hai vectơ cùng phương thì có thể *cùng hướng* hoặc *ngược hướng*.

Độ dài của vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị. Kí hiệu độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Như vậy: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = BA$.

② Hai vectơ bằng nhau, đối nhau. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ $(\neq \vec{0})$

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$ và $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cuøng höôùng } \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$

Hai vectơ $\vec{a}$ và được gọi là *đối nhau* nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

Kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$ và $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cuøng höôùng } \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$

③ Vectơ – không

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Kí hiệu: $\vec{0}$, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots = \vec{0}$.

Vectơ – không có phương, hướng tùy ý, có độ dài bằng không.

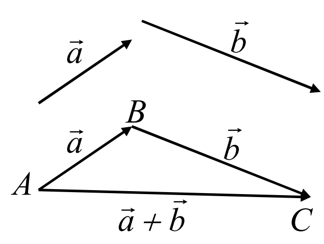
Vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

II. Phép cộng và phép trừ vectơ

① Định nghĩa 1

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\left(\vec{b}\right)$



② Tính chất 1

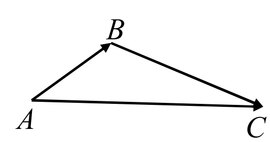
Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

Cộng với $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ ā

Cộng với vectơ đối: $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

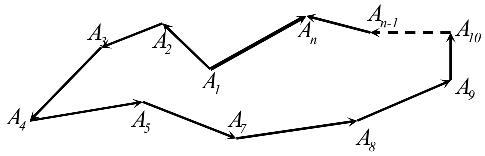
③ Các quy tắc

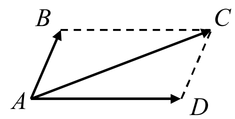


Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C bất kì ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Mở rộng: *Quy tắc đa giác khép kín*

Cho n điểm bất kì $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Ta có: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$





Quy tắc trừ (ba điểm cho phép trừ):

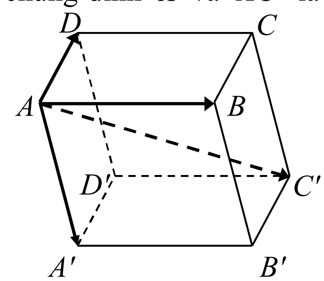
Với ba điểm A, B, C bất kì ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

Quy tắc hình bình hành:

Với hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Quy tắc hình hộp:

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$



III. Phép nhân một số với một vectơ

① **Định nghĩa 2**

Cho $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích $k.\vec{a}$ là một vectơ:

Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$

Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

② **Tính chất 2.** Với $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì; $m, n \in R$, ta có:

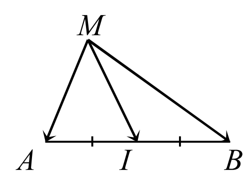
✦ $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = m\vec{a} + mb$ ✦ $\left(m+n\right)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

✦ $m\left(n\vec{a}\right) = \left(mn\right)\vec{a}$ ✦ $1.\vec{a} = \vec{a}$, $\left(-1\right).\vec{a} = -\vec{a}$ ✦ $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$

③ **Điều kiện để hai vectơ cùng phương**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\neq \vec{0}), k \neq 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$

Hệ quả: điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$



④ **Một số tính chất**

Tính chất trung điểm

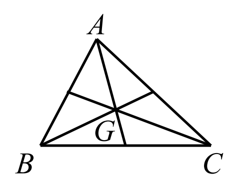
Cho đoạn thẳng AB có I là trung điểm, ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (M bất kì)

Tính chất trọng tâm

Cho ΔABC, G là trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (M bất kì)



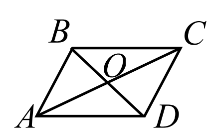
Tính chất trọng tâm của tứ diện: G là trọng tâm tứ diện ABCD:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ *và* $\forall M$ *ta có:* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

Tính chất hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, ta có:

✦ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ ✦ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$



IV. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

① **Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian**

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $(\neq \vec{0})$ trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

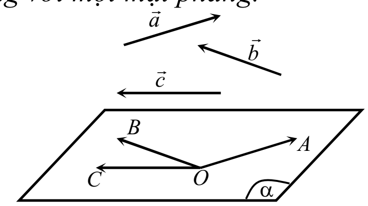
Các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

② **Định nghĩa 3**

Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

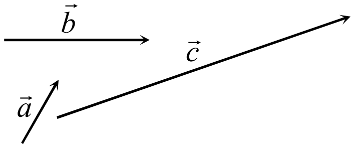
Trên hình bên, giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với mặt phẳng (α) nên ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

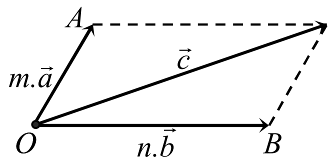


③ **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng**

Định lí 1.

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có duy nhất các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.



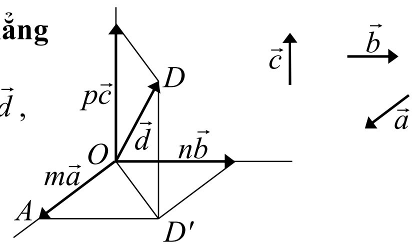


④ **Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng**

Định lí 2.

Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được duy nhất các số m, n, p sao cho

$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



Chú ý:

① *Để chứng minh ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$; hoặc có thể chọn điểm O nào đó để chứng minh $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, với $t + k = 1$.*

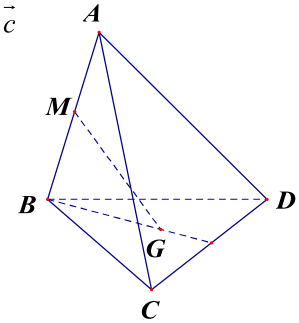
② *Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song trùng nhau, ta cần chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương. Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc đường thẳng CD hoặc ngược lại thì AB và CD là hai đường thẳng song song.*

③ *Để chứng minh đường thẳng AB song song hoặc nằm trong một mặt phẳng (P) ta chọn 2 điểm C, D thuộc (P) rồi chứng minh $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ hoặc ta lấy trong (P) hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, sau đó chứng minh $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đồng phẳng và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc (P) thì đường thẳng AB song song với (P).*

④ *Đường thẳng AB qua M khi A, M, B thẳng hàng. Đường thẳng AB cắt CD tại I thì $\overrightarrow{IA} = k.\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC} = t.\overrightarrow{ID}$. Đường thẳng AB cắt $mp(MNP)$ tại I thì A, I, B thẳng hàng và M, N, P, I đồng phẳng.*

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD, M$ là trung điểm của cạnh AB và G là trọng tâm của tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Phân tích véctơ $\overrightarrow{MG}$ theo $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$



A. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ B. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$

C. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ D. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$

Lời giải

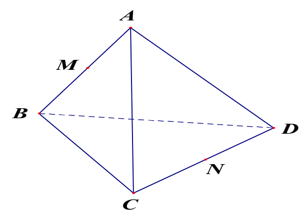
Đáp án A

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

Câu 2. Cho tứ diện đều $ABCD, M$ và N theo thứ tự là trung điểm của cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{NM}$ D. $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}-4\overrightarrow{MN}=\vec{0}$



Lời giải:

Đáp án D

A. Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

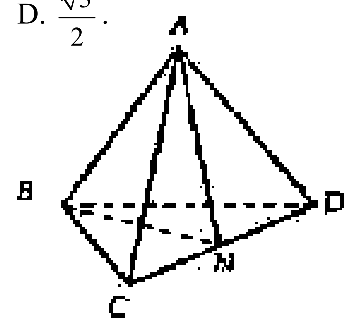
B. Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}\right)=2\overrightarrow{MN}$

C. Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}=2\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}\right)=-2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right)=-4\overrightarrow{NM}$.

Câu 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tam giác BCD đều, $AD=AC$. Giá trị của $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải:

Đáp án B

Gọi N là trung điểm của CD. Tam giác đều BCD nên $BN\perp CD$.

Tam giác ACD cân tại A nên $AN\perp CD$ ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{CD}=0$

$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=0$

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $AB=CD=a;BC=AD=b;CA=BD=c$. Giá trị của $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$ là

A. $\dfrac{a^2-c^2}{b^2}$. B. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}$. C. $\dfrac{c^2-a^2}{b^2}$. D. $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(CB^2+CD^2-BD^2\right)-\frac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(AB^2+CD^2-BD^2-CA^2\right)=\frac{1}{2}\left(2a^2-2c^2\right)=a^2-c^2$$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)=\dfrac{a^2-c^2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{DA}\right|}=\dfrac{a^2-c^2}{b^2}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{CD}$ (Với S là điểm tùy ý).

C. Nếu tồn tại điểm S mà $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ khi và chỉ khi O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải

Đáp án C

A. Sai vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\vec{0} \Leftrightarrow B \equiv C$ (Vô lí)

B. Sai vì: Gọi O và O' theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Ta có

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO'} \Leftrightarrow \overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SO'} \Leftrightarrow O \equiv O'$ điều này không đúng nếu $ABCD$ không phải là hình bình hành.

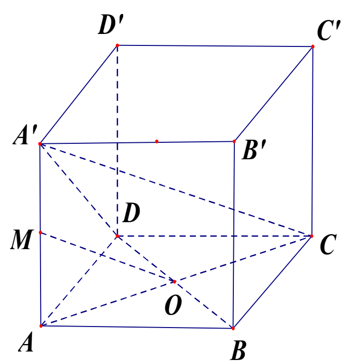
C. Đúng – Chứng minh tương tự như ý B.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AA', O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Cặp ba vectơ nào sau đây đồng phẳng

A. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{B'C}$ B. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$ C. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{DC'}$ và $\overrightarrow{B'C}$ D. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{B'C'}$

Lời giải

Đáp án A



Cách 1: Ta có $MO//(CDA'B'); AB//A'B'$

$\Rightarrow AB//(CDA'B'), B'C'$ nằm trong mặt phẳng $(CDA'B')$

nên các vecto $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì có giá song song hay nằm trên mặt phẳng $(CDA'B')$.

Cách 2: Ta có

$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{\overline{A'C}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C}$.

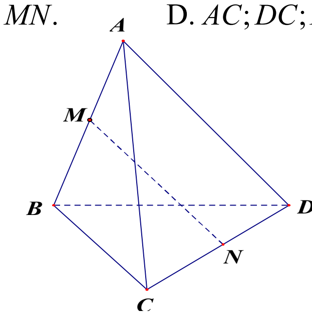
Vậy các vectơ $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Bộ ba vectơ nào dưới đây đồng phẳng

A. $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{MA}$.

Lời giải

Đáp án C



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$. đồng phẳng.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm trên đoạn AB và $MB=2MA$. N là điểm trên đường thẳng CD mà $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{CD}$. Nếu $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng thì giá trị của k là

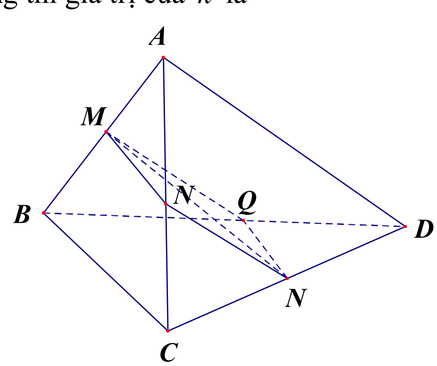
A. $k=\frac{2}{3}$. B. $k=\frac{3}{2}$. C. $k=\frac{4}{3}$. D. $k=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án A

Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với AD và BC.

(α) cắt AC tại P, BD tại Q và CD tại N.



Ta có $MP//PN//AD$.

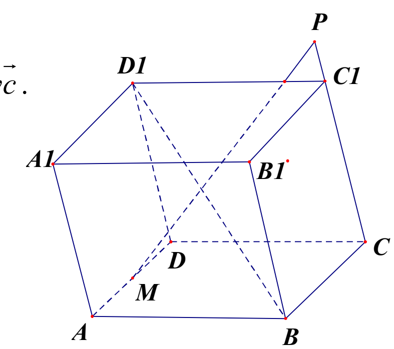
Các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ có giá song song hay nằm trong mặt phẳng (α) nên đồng phẳng. Ta có $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. Vậy $k = \frac{2}{3}$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. M là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. N là điểm trên đường thẳng BD_1. P là điểm trên đường thẳng CC_1 sao cho M, N, P thẳng hàng. Tính $\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{NP}|}$

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Đáp án B



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BD_1}; \overrightarrow{CP} = y\overrightarrow{CC_1} = y\vec{c}$.

Ba điểm M, N, P thẳng hàng nên $\overrightarrow{MN} = \alpha.\overrightarrow{NP}$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$= -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} + x\overrightarrow{BD_1} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} + x\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right)$

$= -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} + x\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = (1-x)\vec{a} + \left(x - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + x\vec{c}$ (2)

Ta lại có: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -x\overrightarrow{BD_1} + \vec{b} + y\vec{c} = -x\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right) + \vec{b} + y\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP} = x\vec{a} + (1-x)\vec{b} + (y-x)\vec{c}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được: $\begin{cases} 1 - x = \alpha x \\ x - \frac{1}{3} = \alpha(1-x) \\ x = \alpha(y-x) \end{cases}$. Giải hệ ta được $\alpha = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{5}, y = \frac{3}{2}$.

Vậy $\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{NP}|} = \frac{2}{3}$.

Câu 10. Cho tứ diện đều *ABCD*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, CB, AD* và *G* là trọng tâm tam giác *BCD*, α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{NP}$. Khi đó $\cos\alpha$ có giá trị là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

Đáp án: C

Lời giải:

Đặt $\overrightarrow{AB} = a; \overrightarrow{AC} = b; \overrightarrow{AD} = c;$ $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

Không mất tính tổng quát, giả sử độ dài các cạnh của tứ diện đều bằng 1

$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1$ và $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 1.1.\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow cos\alpha = cos(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{PN}) = \dfrac{\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN}}{\left|\overrightarrow{MG}\right|.\left|\overrightarrow{PN}\right|}$ (*)

Ta có: $\Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN} = \dfrac{1}{12}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

$= \dfrac{1}{12}(-\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \overline{2\vec{a}\vec{b}} + 2\vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{c}^2) = \dfrac{1}{12}$

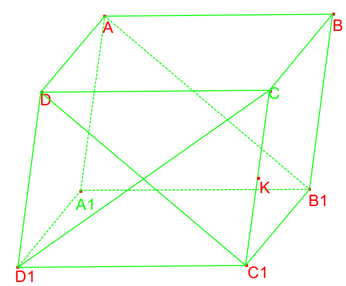
$\left|\overrightarrow{MG}\right| = \dfrac{1}{6}\sqrt{(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})^2} = \dfrac{1}{2}$; $\left|\overrightarrow{PN}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thay vào (*) ta được $\Rightarrow cos\alpha == \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 11. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, với K là trung điểm CC_1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ B. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$

C. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$



Hướng dẫn giải

Có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

Chọn A

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $M = CD_1 \cap C_1D$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ B. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_1} = AD + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ Chọn B

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khi đó tổng ba góc $(\overrightarrow{D_1A_1}, \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{DD_1}) + (\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{A_1B})$ là

A. 180^0 B. 290^0 C.360^0 D. 315^0

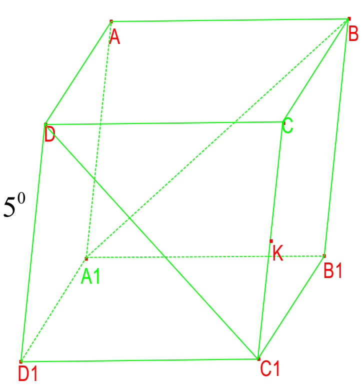
Hướng dẫn giải

Ta có:

$(\overrightarrow{D_1A_1}, \overrightarrow{CC_1}) = 90^0$, $(\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{DD_1}) = (\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{CC_1}) = 135^0$

$(\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{A_1B}) = (\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{D_1C}) = 90^0$

$\Rightarrow (\overrightarrow{D_1A_1}, \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{DD_1}) + (\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{A_1B}) = 90^0 + 135^0 + 90^0 = 315^0$



Chọn D

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Đặt $\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC_1})$; $\beta = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{BB_1})$; $\gamma = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C})$. Khi đó: là $\alpha + \beta + \gamma$

A. 360^0 B. 375^0 C. 315^0 D. 275^0

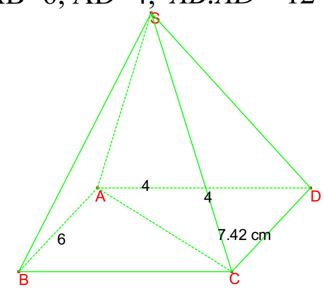
Hướng dẫn giải

$\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC_1}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) = 60^0$ $\beta = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{BB_1}) = (\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{A_1A}) = 135^0$

$\gamma = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C}) = (\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A}) = 180^0$ $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^0 + 135^0 + 180^0 = 375^0$ Chọn B

Câu 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, AB=6; AD=4; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 12$. Tính $(\overrightarrow{SC}.-\overrightarrow{SA})^2$.

A. 76 B. 28 C. 52 D. 40



Hướng dẫn giải

$(\overrightarrow{SC}.-\overrightarrow{SA})^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= 6^2 + 4^2 + 2(-12) = 28$

Chọn B

Câu 16. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Ba vectơ đồng phẳng là 3 vec tơ cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, với m, n là các số duy nhất

C. Ba vectơ đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vec tơ bất kỳ

D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai

Hướng dẫn giải

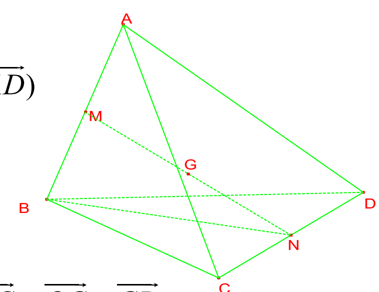
Phương án A: sai vi chỉ cần giá của chúng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng nào đó

Phương án B: Sai $\vec{a}, \vec{b}$ phải không cùng phương. Phương án C sai. Vậy chọn D

Câu 17. Cho hình tứ diện ABCD, trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$



Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD

$\Rightarrow$ G là trung điểm của MN $\Rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ B đúng

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD}$

$= 4\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{OG}$ $\Rightarrow$ A đúng

Khi O trùng A thì D đúng vậy đáp án là C. Chọn C

Câu 18. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{c}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hai vec tơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương   B. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương

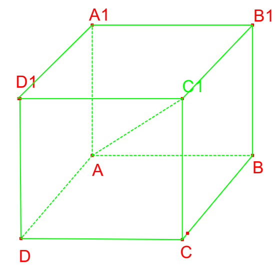
C. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương   D. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải

Ta thấy $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương. Chọn B

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp để $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$

A.k=4 B. k=1 C. k=0 D. k=2



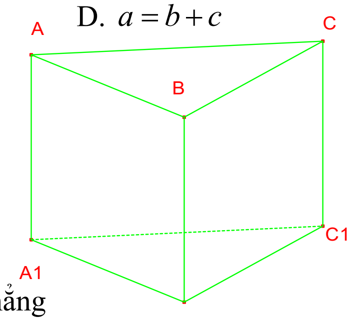
Hướng dẫn giải

Có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1$

Chọn B

Câu 20. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=a;\ \overrightarrow{AB}=b;\overrightarrow{AC}=c;\ \overrightarrow{BC_1}=d$ trong các đẳng thức sau đẳng thức nào đúng

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ D. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$



Hướng dẫn giải

Ta có: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Chọn C

Câu 21. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**

A. Nếu giá của ba vectơ cắt nhau từng đôi một thì 3 vectơ đồng phẳng

B. Nếu ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có một vec tơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đồng phẳng

C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vec tơ đó đồng phẳng

D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có ha vec tơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 22. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, trong các khẳng định sau khẳng định **sai**

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$ C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$ $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{C_1A_1}$

Chọn C

Câu 23. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

B. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

C. Cho hình chóp S.ABCD, nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác ABCD là hình bình hành

D. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng B. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vec tơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng D. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

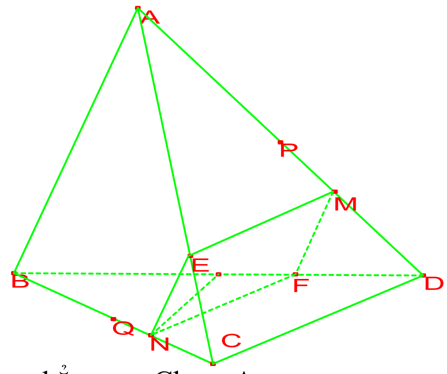
Câu 25. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AC, BD lần lượt lấy M, N sao cho AM = 3MD; BN = 3NC. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AD, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A.Các vec tơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

C. Các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải

Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho AE=3EC,
lấy F trên BD sao cho BF=3FD



$$\begin{cases} NE//AB, NE = \frac{1}{3}AB \\ MF//AB, MF = \frac{1}{3}AB \end{cases} \Rightarrow NE//MF, NE//MF$$

$\Rightarrow$ NEMF là hình bình hành và 3 vec tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (MFNE)

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng Chọn A

Câu 26. Cho tứ diện ABCD có các cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ D. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0$

Hướng dẫn giải

Phương án A: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0} + \overrightarrow{BD} \neq \vec{0} \Rightarrow$ A sai

Phương án B: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow B$ sai

Phương án C $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = 0 \Rightarrow C$ sai Chọn D

Câu 27. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Chọn khẳng định đúng

A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$ B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ Chọn B

Câu 28. Cho tứ diện ABCD và điểm G thỏa $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi O là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{OG}$ D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{OG}$

Hướng dẫn giải Chọn C

Gọi M, N là trung điểm của BC, AD

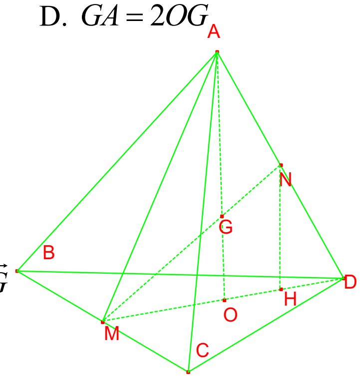
$\Rightarrow$ G là trung điểm MN.

Gọi H là hình chiếu của N lên MD

$\Rightarrow$ NH là đường trung bình của ΔAOD

và OG là đường trung bình của ΔMNH

$\Rightarrow OG = \frac{1}{2}NH = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AO \Rightarrow OG = \frac{1}{2}NH = \frac{1}{4}.AO$ hay $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{OG}$

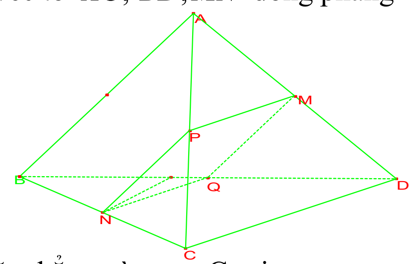


Câu 29. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không đồng phẳng

C. Các vec tơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AC, BD

$\Rightarrow$ Ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (MNPQ) nên 3 véc tơ này đồng phẳng

$\Rightarrow$ A đúng

Ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng $\Rightarrow$ B đúng

Ba vec tơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ có giá không thể song song với mặt phẳng nào $\Rightarrow$ C sai Chọn C

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có cạnh a. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{CC'} = -a^2$ B. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'} = a^2$ C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'} = 0$ D. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Xét phương án A có: $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AA'} = \left|\overrightarrow{AD'}\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cos 45^0 = a^2$ Chọn A

Câu 31. Trong không gian cho hai tia Ax, By chéo nhau sao cho AB vuông góc với cả hai tia đó. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên Ax, By sao cho độ dài đoạn MN luôn bằng giá trị c không đổi (c $\geq$ AB). Gọi φ là góc giữa Ax, By. Giá trị lớn nhất của AM.BN

A. $\dfrac{c^2 - AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$ B. $\dfrac{c^2 - AB^2}{2(1+\cos\varphi)}$ C. $\dfrac{c^2 + AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$ D. $\dfrac{c^2 + AB^2}{2(1+\cos\varphi)}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $c^2 = MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})^2 \geq AB^2 + 2AM.BN.(1-\cos\varphi)$

$\Rightarrow AM.BN. \leq \dfrac{c^2 - AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$. Vậy biểu thức AM.BN đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{c^2 - AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$

Chọn A

Câu 32. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ

$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng

A. Hai vectơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương B. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương

C. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương D. Ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Chọn đáp án B

Ta có: $\vec{y} = -2\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = -2\vec{x}$ do đó 2 vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.

Câu 33. Trong mặt phẳng cho tứ giác *ABCD* có hai đường chéo cắt nhau tại *O*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Nếu *ABCD* là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

B. Nếu *ABCD* là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì *ABCD* là hình bình hành.

D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì *ABCD* là hình thang.

Chọn đáp án B

Giả sử: $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{OD}$.

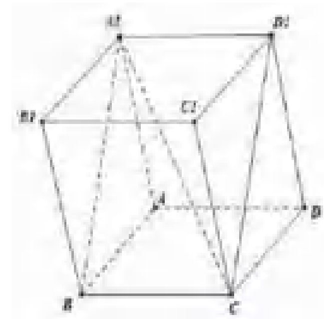
Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=(a+2)\overrightarrow{OC}+(b+2)\overrightarrow{OD}$

Do $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ là không cùng phương nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OD}\Rightarrow ABCD$ là hình thang. Điều ngược lại không đúng.

Chúng ta không thể từ $ABCD$ là hình thang suy ra $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OD}$.

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng



A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng

B. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng

C. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng

D. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng

Chọn đáp án C

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Mặt khác 3 vectơ $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng do đó 3 vectơ $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 35. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b};\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng

A. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng

B. Hai vectơ $\vec{x};\vec{a}$ cùng phương

C. Hai vectơ $\vec{x};\vec{b}$ cùng phương

D. Ba vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đôi một cùng phương

Chọn đáp án A

Ta có: $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}=2(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})-(-3\vec{b}-2\vec{c})=2\vec{y}-\vec{z}$

Do vậy 3 vectơ ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 36. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$

A. $k=4$ B. $k=1$ C. $k=0$ D. $k=2$

Chọn đáp án B

Ta có: $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{CC_1}$ do vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$

Suy ra $k=1$.

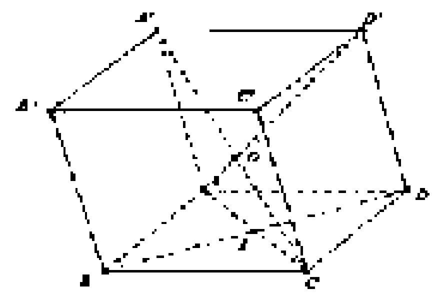
Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$



Chọn đáp án A

Ta có: $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA'}$

Mặt khác $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}$

$= \left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BB'}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}\right) = 4\overrightarrow{AA'}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

Câu 38. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Chọn đáp án C

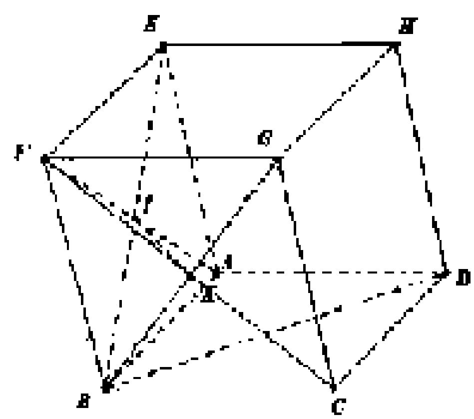
Ta có: $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Câu 39. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng D. Các khẳng định trên đều sai

Chọn đáp án B



Ta có IK là đường trung bình trong tam giác BEG

Do đó $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{CB}$ và 3 vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng do đó 3 vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

A. $k = \frac{1}{2}$ B. $k = \frac{1}{3}$ C. $k = 3$ D. $k = 2$

Chọn đáp án A

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) \to \overrightarrow{MN} = k\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Câu 41. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Chọn đáp án C

Ta có: $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{A_1C}$

Mặt khác $\overrightarrow{A_1C}\neq 0$ do đó đẳng thức ở câu C sai.

Câu 42. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

B. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

C. Cho hình chóp *S.ABCD*. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác *ABCD* là hình bình hành

D. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Chọn đáp án C

Ta có: $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Do đó *ABCD* là hình hình hành.

Câu 43. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi P,Q là trung điểm của *AB* và *CD*. Chọn khẳng định đúng

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Chọn đáp án B

Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$$

Câu 44. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M* và *P* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$

Chọn đáp án D. Ta có $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Câu 45. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**

A. Vì *I* là trung điểm đoạn *AB* nên từ *O* bất kì ta có: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

B. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ nên bốn điểm *A, B, C, D* đồng phẳng.

C. Vì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ nên *N* là trung điểm đoạn *MẶT PHẲNG*.

D. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Chọn đáp án B Rõ ràng A đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$ luôn bằng $\vec{0}\Rightarrow B$ sai.

Xét đáp án C, ta có $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}\Leftrightarrow N$ thuộc đoạn MP và $NM=NP$.

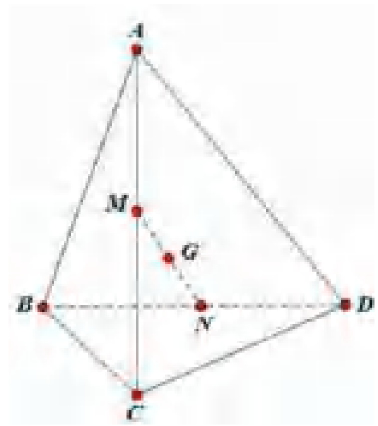
Nên *N* là trung điểm của đoạn $MP\Rightarrow C$ đúng.

Xét đáp án D, ta có $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Rightarrow D$ đúng.

Câu 46. Cho hình tứ diện *ABCD* có trọng tâm *G*. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$

C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$



Chọn đáp án A

Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$\Rightarrow A$ sai và B đúng.

Lại có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow D$ đúng.

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$= \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}\right)\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD}\right)$

$= 4\overrightarrow{OG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = 4\overrightarrow{OG} \Rightarrow C$ đúng.

Câu 47. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành tâm *O*. Gọi *G* là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. *G, S, O* không thẳng hàng B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$ D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$

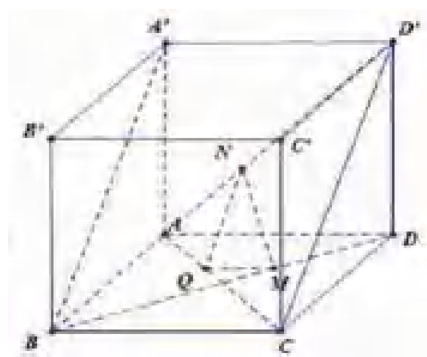
Chọn đáp án B

Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 2\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GO} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các đường chéo *BD* và *AD* của các mặt bên lần lượt lấy hai điểm *M, N* sao cho $DM = AN$. *MN* song song với mặt phẳng nào sau đây

A. (ADB') B. $(A'D'BC)$ C. $(A'AB)$ D. $(BB'C)$

Chọn đáp án B



Trên *AC* lấy điểm *Q* sao cho $AQ = DM = AN$

Khi đó $\frac{AB}{AD'} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow QN // CD'$

Tương tự ta có $QM // BC$. Từ đó suy ra

$(QNM) // (BCD'A') \Rightarrow MN // (BCD'A')$

Câu 49. Trong không gian cho điểm *O* và bốn điểm *A, B, C, D* không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để *A, B, C, D* tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Chọn đáp án C

A, B, C, D tạo thành hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$.

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi *I* và *K* lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**

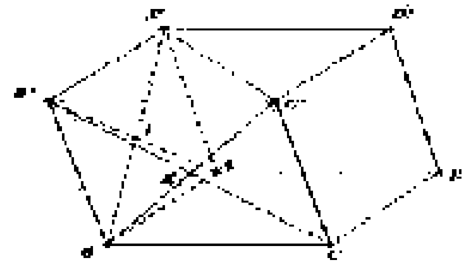
A. Bốn điểm *I, K, C, A* đồng phẳng

B. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng

D. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

Chọn đáp án C



Ta có: $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

(Do IK là đường trung bình trong tam giác $A'BC'$)

Do vậy A và B đều đúng

Lại có: $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$.

Câu 51. Cho tứ diện *ABCD*. Trên các cạnh *AD* và *BC* lần lượt lấy *M, N* sao cho $AM=3MD; BN=3NC$. Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm của *AD* và *BC*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Các vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng

B. Các vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

C. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

D. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Chọn đáp án C

Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ không đồng phẳng nên C sai.

Câu 52. Cho tứ diện *ABCD* có các cạnh đều bằng *a*. Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$

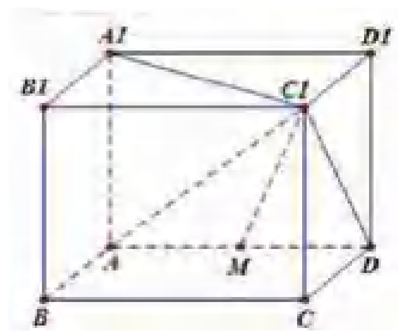
C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$

D. $AB\perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

Chọn đáp án C

Ta có $\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$.

Câu 53. Cho tứ diện *ABCD*. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, gọi *G* là trọng tâm của tam giác *BCD*. Trong các khẳng định sau, đẳng thức nào đúng



A. $\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

Chọn đáp án B

Câu 54. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi *M* là trung điểm *AD*. Chọn đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$

B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$

Chọn đáp án B

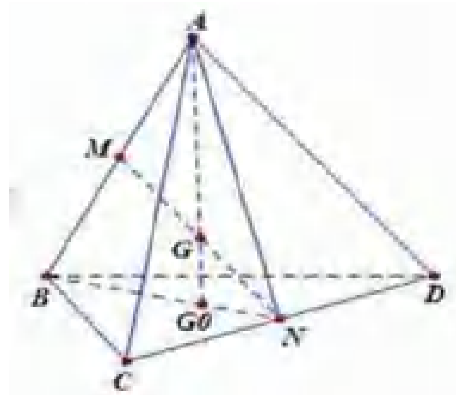
Ta có $\overrightarrow{C_1M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1C}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp(BCD). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$ B. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$

C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$ D. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$



Chọn đáp án C

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=0 \Rightarrow G$ là trung điểm của MN

Gọi G_0 là giao điểm của AG với $BN \Rightarrow G_0$ là giao điểm của GA với mặt phẳng (BCD).

Áp dụng Mennelauyt cho tam giác ABG_0 ta có

$$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NG_0}.\frac{GG_0}{GA}=1 \Leftrightarrow 1.3.\frac{GG_0}{GA}=1 \Leftrightarrow \frac{GG_0}{GA}=\frac{1}{3}\Rightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}.$$

Câu 56. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng B. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng

C. Các vectơ $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng D. Các vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Chọn đáp án C

Các vectơ $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng nên C sai.

Câu 57. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ B. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ C. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ D. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

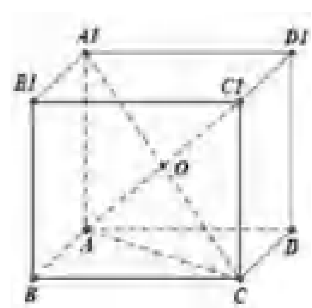
Chọn đáp án D

Ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 58. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$ B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$ D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$



Chọn đáp án B.

Ta có $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Câu 59. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng

A. Từ $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì *B* là trung điểm đoạn *AC*.

C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm *A, B, C, D* đồng phẳng

D. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$

Chọn đáp án C

Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm *A, B, C, D* không đồng phẳng.

Câu 60. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, CD* và *G* là trung điểm của *MN.* Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

Chọn đáp án A

Do *G* là trung điểm của *MN* nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG}\right) + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG}\right) + \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}\right) + \left(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG}\right) = 0$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

Câu 61. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Chọn đáp án D

Ta có $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 62. Cho hình chóp *S.ABCD*. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì *ABCD* là hình thang.

B. Nếu *ABCD* là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu *ABCD* là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì *ABCD* là hình bình hành.

Chọn đáp án C

Dựa vào các đáp án, ta có các nhận xét sau:

• *ABCD* là hình bình hành thì *O* là trung điểm của *AC* và *BD*, khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \end{cases}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ và điều ngược lại luôn đúng.

• Tương tự, $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì *ABCD* là hình thang và điều ngược lại không đúng.

Câu 63. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm *O*. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. *M* là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. *M* là trung điểm BB'

B. *M* là tâm hình bình hành $BCC'B'$

C. *M* là tâm hình bình hành $ABB'A'$

D. *M* là trung điểm CC'

Chọn đáp án A

Ta có $\frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Mặt khác $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \Rightarrow \begin{cases} OM \,//\, BD \\ OM = \frac{1}{2}BD \end{cases}$. Mà O là trung điểm của DB' suy ra M là trung điểm của BB'.

Câu 64. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng

A. Hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ cùng phương.
B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương.
C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ cùng phương.
D. Ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Nhận thấy: $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương.

Câu 65. Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$
C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 66. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.
B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

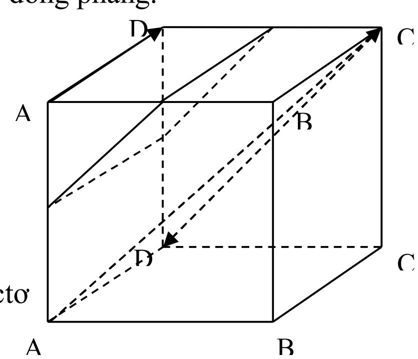
Hướng dẫn giải

Chọn C.

M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AA_1, DD_1, CD.

Ta có $CD_1 \,//(MNPQ); AD \,//\left(MNPQ\right); A_1C \,//(MNPQ)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.



Câu 67. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng

A. Ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.
B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{a}$ cùng phương.
C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{b}$ cùng phương.
D. Ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\vec{y} = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \vec{z}\right)$ nên ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 68. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$

A. $k = 4$.
B. $k = 1$.
C. $k = 0$.
D. $k = 2$

Hướng dẫn giải

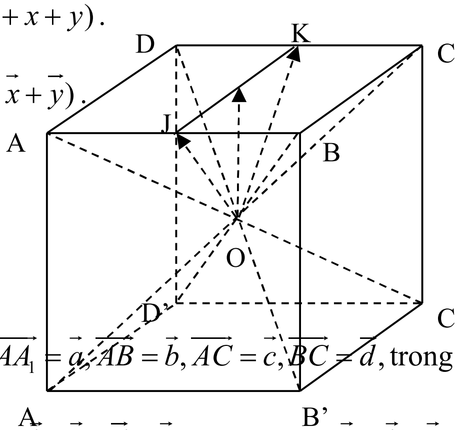
Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$. Nên $k=1$.

Câu 69. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$. B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$. D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$.



Hướng dẫn giải Chọn A.

+ Gọi J,K lần lượt là trung điểm của AB,CD.

+ Ta có: $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y})$

Câu 70. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{BC}=\vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$. C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. D. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. Dễ thấy: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}\Rightarrow\vec{b}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{0}$.

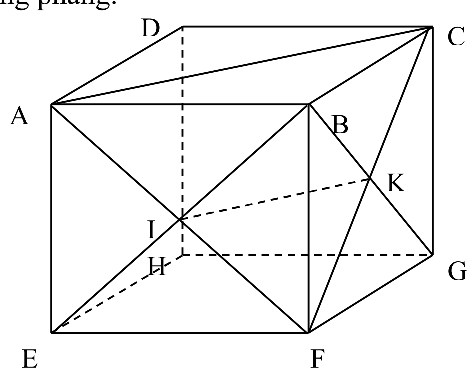
Câu 71. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



$+\begin{cases} IK//(ABCD) \\ GF//(ABCD) \\ \text{BD}\subset\text{(ABCD)} \end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.

+ Các bộ vectơ ở câu A,C,D không thể có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 72. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng

B. Nếu trong ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng

C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng

D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 73. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$ C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$

Hướng dẫn giải

Chọn A. Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Vận dụng công thức trung điểm

Câu 74. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{O}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}. \Leftrightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành

Câu 75. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$. B. a^2. C. $a^2\sqrt{3}$. D. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\ (\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD})=a^2$$

(Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$)

Câu 76. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A,B,C,D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A,B,C,D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

B. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Câu 77. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

B. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vectơ $\overrightarrow{BD};\overrightarrow{IK};\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

A. Đúng vì $\overrightarrow{IK},\overrightarrow{AC}$ cùng thuộc $(B'AC)$

B. Đúng vì $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'K}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}=2\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow$ ba véctơ đồng phẳng.

D. Đúng vì theo câu C $\Rightarrow \overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{c}=2\overrightarrow{B'C'}=2\overrightarrow{BC}$.

Câu 78. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M,N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Các vectơ $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

B. Các vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

C. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

D. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Chọn A.

A. Sai vì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

B. Đúng vì $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$: đồng phẳng.

C. Đúng. Bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên ta có $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

D. Đúng. Biểu diễn giống đáp án A ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$.

D. $AB \perp CD$ hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC, BCD, CDA, ABD là các tam giác đều.

A. Đúng vì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

B. Đúng vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -a.a.\cos 60^0 = \frac{-a^2}{2}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = -a.a.\cos 60^0 = -\frac{a^2}{2}$.

D. Đúng vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c},$ gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi M là trung điểm BC

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Câu 81. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD. Chọn đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

A. Sai vì $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1D_1}\right)$

$= \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}\right) = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$.

B. Đúng vì $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1D_1}\right)$

$= \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1D_1}\right) = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. Sai. theo câu B suy ra

D. Đúng vì $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD_1}$.

Câu 82. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

B. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng

C. Các vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

D. Các vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải

Chọn C.

A. Đúng vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

B. Đúng vì từ N ta vẽ véctơ bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ thì $\overrightarrow{MN}$ không nằm trong mặt phẳng (ABC).

C. Sai. Tương tự đáp án B thì $\overrightarrow{AN}$ không nằm trong mặt phẳng (CMN).

D. Đúng vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Câu 83. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_O là giao điểm của GA và mp (BCD). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$

B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Theo đề: G_O là giao điểm của GA và mp (BCD) $\Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD.

$\Rightarrow \overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = -\left(3\overrightarrow{GG_0} + \overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C}\right) = -3\overrightarrow{GG_0} = 3\overrightarrow{G_0G}$

Câu 84. Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa "G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$". Khẳng định nào sau đây **sai**

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD)

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC

D. Chưa thể xác định được.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$

G là trung điểm IJ nên đáp án A đúng. Tương tự cho đáp án B và C cũng đúng.

Câu 85. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$

D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

Mà $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}$ nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Câu 86. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng

A. Từ $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC .

C. Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ đồng phẳng

D. Từ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$. Suy ra: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ hay bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ đồng phẳng.

Câu 87. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B. $M,\ N,\ G$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ CD, MN$ theo quy tắc trung điểm

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN};\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GD}$.

Câu 88. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong những mệnh đề sau đây

A. $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$

D. $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'A'}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (vô lí)

Câu 89. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O. Hãy chỉ ra đẳng thức sai trong các đẳng thức sau đây:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$

D. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ (vô lí)

Câu 90. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c};\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c};\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c};\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c};\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c};\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c};\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c};\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c};\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải Chọn B.

Các vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n:\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$. Mà : $\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$

$$\Leftrightarrow \vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}=m\left(3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}\right)+n\left(2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}3m+2n=1\\-3m-3n=-2\\2m-3n=4\end{cases} \text{(hệ vô nghiệm)}$$

Vậy không tồn tại hai số $m,n:\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. G, S, O không thẳng hàng B. $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$ D. $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$

Hướng dẫn giải

Chọn B. $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

Câu 92. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ B. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ C. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ D. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

Hướng dẫn giải

Chọn D. Ta có: $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 93. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ B. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C. G là trọng tâm tứ diện $ABCD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 94. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

A. $k=\frac{1}{2}$. B. $k=\frac{1}{3}$. C. $k=3$. D. $k=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (quy tắc trung điểm) $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$

Mà $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (vì M là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Câu 95. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo giả thuyết $m+n+p\neq 0$ $\Rightarrow$ tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m\neq 0$. Từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}-\frac{p}{m}\vec{c}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng (theo định lý về sự đồng phẳng của ba véctơ).

Câu 96. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. D. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D. $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}$ (qt hình bình hành) $=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 97. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

B. Từ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

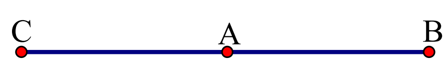
C. Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Từ $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Sai vì $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow$ A là trung điểm BC.



B. Sai vì $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ $\overrightarrow{CB}=-4\overrightarrow{AC}$.

C. Đúng theo định lý về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

D. Sai vì $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{CA}$ (nhân 2 vế cho -1).

Câu 98. Hãy chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây

A. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véctơ đó cùng phương.

B. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véctơ đó bằng véctơ $\vec{0}$.

C. véctơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véctơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải
Chọn C.
A. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.
B. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.
C. Sai
D. Đúng vì $\begin{cases} \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{c} \\ \overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA} = -\vec{b} - \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{CA} \Rightarrow$ 3 vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đp.

Câu 99. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

A. a^2. B. $a\sqrt{2}$ C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải
Chọn A.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\right)\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}\right)$$
$$= \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AE} + EF^2 + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FB}$$
$$= 0 + a^2 + 0 + 0 + 0 + \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EA} = a^2 + 0 = a^2$$

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.
B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.
C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$.
D. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải
Chọn C.
A. Đúng vì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
Vì O, A, C và O, B, D thẳng hàng nên đặt $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OC}; OB = m\overrightarrow{OD}$
$\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{OC} + (m+1)\overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
Mà $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ không cùng phương nên $k = -2$ và $m = -2$ $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = 2 \Rightarrow AB//CD$.
B. Đúng.
C. Sai. Vì nếu $ABCD$ là hình thang cân có 2 đáy là AD, BC thì sẽ sai.
D. Đúng. Tương tự đáp án A với $k = -1, m = -1 \Rightarrow O$ là trung điểm 2 đường chéo.

Câu 101. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**
A. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
B. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP.
C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.\right)$
D. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải
Chọn D.
A. Đúng theo định nghĩa về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

B. Đúng

C. Đúng vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}$

Mà $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (vì I là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

D. Sai vì không đúng theo định nghĩa sự đồng phẳng.

Câu 102. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. M là trung điểm BB'.
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.
D. M là trung điểm CC'.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

M là trung điểm BB' $\Rightarrow 2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B'D}+\overrightarrow{BD'}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B'B}+\vec{b}-\vec{a}+\overrightarrow{BB'}+\vec{b}-\vec{a}\right)$ (quy tắc hình hộp) $=-\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+2\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}$.

Câu 103. Cho hai điểm phân biệt A,B và một điểm O bất kỳ không thuộc đường thẳng AB. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{BA}$.

C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$.

D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

A. Sai vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ (I là trung điểm AB) $\Rightarrow \overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OI}\Rightarrow$ O,M,I thẳng hàng.

B. Sai vì $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow M\equiv B$ và $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{BA}\Rightarrow$ O,B,A thẳng hàng: vô lý

C. $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=k\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BA}\Rightarrow B,A,M$ thẳng hàng.

D. Sai vì $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow \overrightarrow{OB}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow O,B,A$ thẳng hàng: vô lý.

Câu 104. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

A. $k=4$.
B. $k=\frac{1}{2}$.
C. $k=\frac{1}{4}$.
D. $k=2$.

Hướng dẫn giải :

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PN}$

nên $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{PN}=2(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})=2.2.\overrightarrow{PI}=4\overrightarrow{PI}$. Vậy $k=\frac{1}{4}$

Câu 105. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$.
B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$.
C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$.
D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải :

Ta có : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}$ nên D sai.

Do $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ và $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1A_1}$ nên $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$. A đúng

Do $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1B_1}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DC}$ nên

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}$ nên B đúng.

Do $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BD_1}$ nên C đúng. Chọn D.

Câu 106. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng

A. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải :

Chọn B.

Ta có : $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$

nên $2\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{DQ}\right)=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$. Vậy $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 107. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC=3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $xC'D=C'N$. Với giá trị nào của x thì $MN//D'$.

A. $x=\frac{2}{3}$.

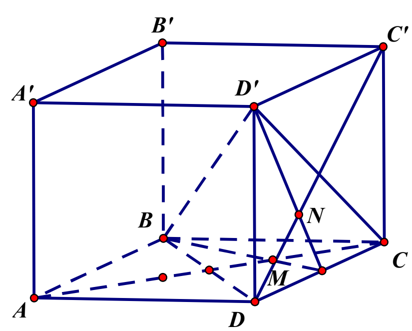
B. $x=\frac{1}{3}$.

C. $x=\frac{1}{4}$.

D. $x=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải :

Chọn A.



Câu 108. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

A. $k=2$.

B. $k=4$.

C. $k=1$.

D. $k=0$.

Hướng dẫn giải :

Chọn C. Ta có $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}$ nên $k=1$

Câu 109. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**

A. Vì I là trung điểm đoạn AB nên từ O bất kì ta có: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

B. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

C. Vì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ nên N là trung điểm đoạn NP.

D. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải :

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ đúng với mọi điểm A,B,C,D nên câu B sai.

Câu 110. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**

A. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba véctơ đó có giá thuộc một mặt phẳng

B. Ba tia Ox,Oy,Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

C. Cho hai véctơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m,n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m,n là duy nhất.

D. Nếu có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ và một trong ba số m,n,p khác 0 thì ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải :

Chọn A.

Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba véctơ đó có giá song song hoặc thuộc một mặt phẳng.

Câu A sai

Câu 111. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

A. $k=2$. B. $k=4$. C. $k=1$. D. $k=0$.

Hướng dẫn giải :

Chọn C. Ta chứng minh được $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ nên $k=1$

Câu 112. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ ta suy ra $m=n=p=0$

B. Nếu có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$, trong đó $m^2+n^2+p^2>0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

C. Với ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

D. Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu D sai. Ví dụ phản chứng 3 cạnh của hình chóp tam giác đồng qui tại 1 đỉnh nhưng chúng không đồng phẳng.

Câu 113. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ C. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$

Hướng dẫn giải :

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 114. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các biểu thức véctơ sau đây, biểu thức nào đúng

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=0$ D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Câu 115. Cho tứ diện $ABCD$ và I là trọng tâm tam giác ABC. Đẳng thức đúng là

A. $6\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$. B. $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

C. $\overrightarrow{SI}=3\left(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

D. $\overrightarrow{SI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn D.

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SI}\Leftrightarrow\overrightarrow{SI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Câu 116. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ với m,n là các số duy nhất.

C. Ba véctơ không đồng phẳng khi có $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctơ bất kì.

D. Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải:
Chọn D.
Câu A sai vì ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với cùng một mặt phẳng.
Câu B sai vì thiếu điều kiện 2 véctơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương.
Câu C sai vì $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctơ bất kì không phải là điều kiện để 3 véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 117. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$

A. $k=0$. B. $k=1$. C. $k=4$. D. $k=2$.

Hướng dẫn giải:
Chọn B.
Với $k=1$ ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+1.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABC$ Lấy các điểm A',B',C' lần lượt thuộc các tia SA,SB,SC sao cho $SA=a.SA',SB=b.SB',SC=c.SC'$, trong đó a,b,c là các số thay đổi. Tìm mối liên hệ giữa a,b,c để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC

A. $a+b+c=3$ B. $a+b+c=4$ C. $a+b+c=2$ D. $a+b+c=1$

Hướng dẫn giải:
Chọn A.
Nếu $a=b=c=1$ thì $SA=SA',SB=SB',SC=SC'$ nên $(ABC)\equiv(A'B'C')$.
Suy ra $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác $ABC=>a+b+c=3$ là đáp án đúng.

Câu 119. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$ B. $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}=\vec{0}$ C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ D. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$

Hướng dẫn giải:
Chọn A.
Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Ta có: $\begin{cases}\vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \vec{b}+\vec{d}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{cases}=>\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$

Câu 120. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn A.

Theo giả thuyết trên thì với O là một điểm bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Ta thay điểm O bởi điểm A thì ta có:

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Do vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ là sai.

Câu 121. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O. Chọn đẳng thức **sai**

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$.

B. $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{OC_1}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD_1}$ mà $\overrightarrow{AB_1}\neq\overrightarrow{AD_1}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}$ sai.

Câu 122. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. Ta có $\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{MP}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$.

Câu 123. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BD}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải:
Chọn C.

Ta có 3 véctơ $\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì chúng có giá cùng nằm trên mặt phẳng $\left(BCD_1A_1\right)$.

Câu 124. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

B. $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

D. $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

Hướng dẫn giải:
Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$; $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

B. Nếu $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đáp án C sai do nếu $ABCD$ là hình thang có 2 đáy lần lượt là AD và BC thì ta có $\overrightarrow{SD}+2\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SA}$.

Câu 126. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

A. $k=3$. B. $k=\frac{1}{2}$. C. $k=2$. D. $k=\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{array}\right\}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}$

Mà M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{MB};\ \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{CN}$

Do đó $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Câu 127. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c},$ gọi M là trung điểm của BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$ B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$. D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

Câu 128. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{DG}$

A. $k=\frac{1}{3}$. B. $k=2$. C. $k=3$. D. $k=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Câu 129. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ B. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ C. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Chọn D.

Câu 130. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

D. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

Chọn B.

Câu 131. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành..Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}, \overrightarrow{SB}=\vec{b}, \overrightarrow{SC}=\vec{c}, \overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$ C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ D. $\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{d}=\vec{0}$

Chọn A.

Câu 132. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c},\ \overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$

Chọn A.

Câu 133. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u},\ \overrightarrow{CA'}=\vec{v}, \overrightarrow{BD'}=\vec{x}, \overrightarrow{DB'}=\vec{y}$ đúng

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$

B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$

D. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$

Chọn C.

Câu 134. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

B. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

C. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$

D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng

Chọn C.

Câu 135. Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa "G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$". Khẳng định nào sau đây **sai**

A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD)

B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC

D. Chưa thể xác định được

Chọn D.

Câu 136. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AB},\ \vec{y}=\overrightarrow{AC},\ \vec{z}=\overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$

B. $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$

D. $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)$

Chọn A.

Câu 137. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$

C. M là trung điểm BB'

D. M là trung điểm CC'.

Chọn C.

Câu 138. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA',BC,C'D'$ lần lượt tại M,N,P sao cho $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

A. $\frac{MA}{MA'}=1$

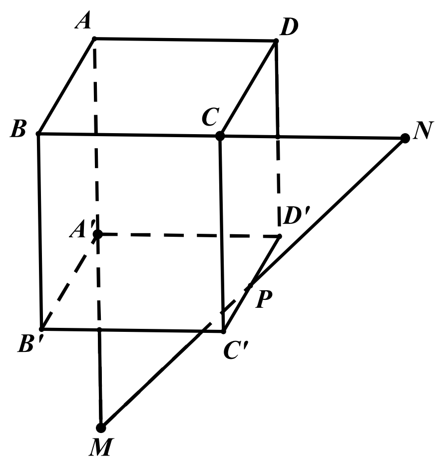
B. $\frac{MA}{MA'}=\sqrt{2}$

C. $\frac{MA}{MA'}=2$

D. $\frac{MA}{MA'}=\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Vì $M\in AA'$ nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AA'}=k\vec{c}$

$N\in BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}=l\overrightarrow{BC}=l\vec{a}$, $P\in C'D'\Rightarrow\overrightarrow{C'P}=m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'P}=(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NP}\Rightarrow -l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}=2[\left(1-l\right)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-l=2\left(1-l\right)\\-1=2m\\k=2\end{cases}\Leftrightarrow k=2,m=-\frac{1}{2},l=2$. Vậy $\frac{MA}{MA'}=2$.

Câu 139. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N,P xác định bởi

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB'}\left(k\neq 0\right),\overrightarrow{NB}=x\overrightarrow{NC'},\overrightarrow{PC}=y\overrightarrow{PD'}.$$

Hãy tính x,y theo k để ba điểm M,N,P thẳng hàng.

A. $x=\frac{2+k}{2-k},y=-\frac{2}{k}$

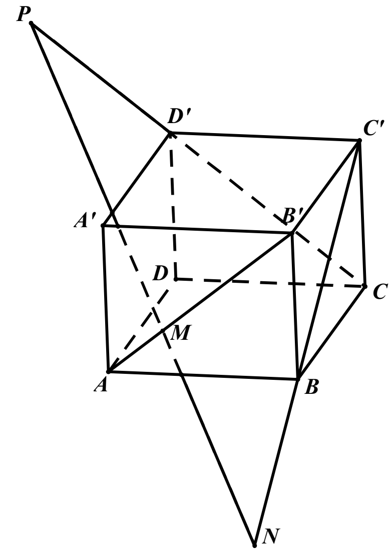
B. $x=\frac{1+2k}{1-2k},y=-\frac{1}{2k}$

C. $x=\frac{\frac{1}{2}+k}{2-k},y=-\frac{1}{2k}$

D. $x=\frac{1+k}{1-k},y=-\frac{1}{k}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Từ giả thiết ta có :

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{k}{k-1}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (1)

$\overrightarrow{AN}=\vec{b}+\dfrac{x}{x-1}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$ (2) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{y}{y-1}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$(3)

Từ đó ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{x}{x-1}\vec{a}-\dfrac{1}{k-1}\vec{b}+\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

$+\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-(\dfrac{y}{y-1}+\dfrac{1}{k-1})\vec{b}+\left(\dfrac{y}{y-1}-\dfrac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}$ $(*)$.

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ vào $(*)$ và lưu ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được $x=\dfrac{1+k}{1-k},y=-\dfrac{1}{k}$.

Câu 140. Giả sử M,N,P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA,SB,SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM),(CAN),(ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP),(BPM),(CMN)$. Ta được S,I,J thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng

A. $\dfrac{MS}{MA}+\dfrac{NS}{NB}+\dfrac{PS}{PC}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{JS}{JI}$

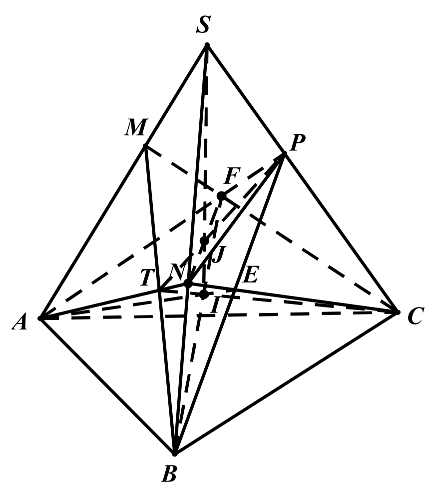
B. $\dfrac{MS}{MA}+\dfrac{NS}{NB}+\dfrac{PS}{PC}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{JS}{JI}$

C. $\dfrac{MS}{MA}+\dfrac{NS}{NB}+\dfrac{PS}{PC}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{JS}{JI}$

D. $\dfrac{MS}{MA}+\dfrac{NS}{NB}+\dfrac{PS}{PC}+1=\dfrac{JS}{JI}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Goi $E=BP\cap CN,F=CM\cap AP,T=AN\cap BM$.

Trong (BCM) có $I=BF\cap CT$ trong (ANP) có $NF\cap PT=J$.

Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c}$ và

$\overrightarrow{SM}=x\overrightarrow{MA},\overrightarrow{SN}=y\overrightarrow{NB},\overrightarrow{Sp}=z\overrightarrow{PC}$

Ta có $\overrightarrow{SM}=\dfrac{x}{x+1}\vec{a},\overrightarrow{SN}=\dfrac{y}{y+1}\vec{b},\overrightarrow{SP}=\dfrac{z}{z+1}\vec{c}$

$(x>0,y>0,z>0)$.

Do $T=AN\cap BM$ nên

$\begin{cases}T\in AN\\T\in BM\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{ST}=\alpha\overrightarrow{SM}+(1-\alpha)\overrightarrow{SB}\\\overrightarrow{ST}=\beta\overrightarrow{SN}+(1-\beta)\overrightarrow{SA}\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha\overrightarrow{SM}+(1-\alpha)\overrightarrow{SB}=\beta\overrightarrow{SN}+(1-\beta)\overrightarrow{SA}$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{x+1}\vec{a}+(1-\alpha)\vec{b}=\frac{\beta y}{y+1}\vec{b}+(1-\beta)\vec{a}$. Vì $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương nên ta có

$$\begin{cases}\frac{\alpha x}{x+1}=1-\beta\\ \frac{\beta y}{y+1}=1-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{x}{x+y+1}\\ \beta=\frac{y}{x+y+1}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{ST}=\frac{x}{x+y+1}\vec{a}+\frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$\overrightarrow{SE}=\frac{y}{y+z+1}\vec{b}+\frac{z}{y+z+1}\vec{c},\ \ \overrightarrow{SF}=\frac{z}{z+x+1}\vec{c}+\frac{x}{z+x+1}\vec{a}$.

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I=BF\cap CT$ và $NF\cap PT=J$ ta được :

$\overrightarrow{SI}=\frac{1}{x+y+z+1}\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right),\ \ \overrightarrow{SJ}=\frac{1}{x+y+z+2}\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SJ}=\frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI}\Rightarrow\overrightarrow{SJ}=(x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$

Vậy S,I,J thẳng hàng và $\frac{SI}{IJ}=x+y+z+1=\frac{SM}{MA}+\frac{SN}{NB}+\frac{SP}{PC}+1$.

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a,SB=b,SC=c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$.

A. $\frac{3}{a^2+b^2+c^2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}$ C. $\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$ D. $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$.

Mà G,A',B',C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\Leftrightarrow\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$

Theo BĐT Cauchy schwarz:

Ta có $\left(\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}\right)^2$

$\Leftrightarrow\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi

$\frac{1}{aSA'}=\frac{1}{bSB'}=\frac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\frac{a}{SA'}+\frac{b}{SB'}+\frac{c}{SC'}=3$ ta được

$SA'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3a},SB'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3b},SC'=\frac{a^2+b^2+c^2}{3c}$.

Vậy GTNN của $\frac{1}{SA'^2}+\frac{1}{SB'^2}+\frac{1}{SC'^2}$ là $\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại A',B',C',D'.Đẳng thức nào sau đây đúng?

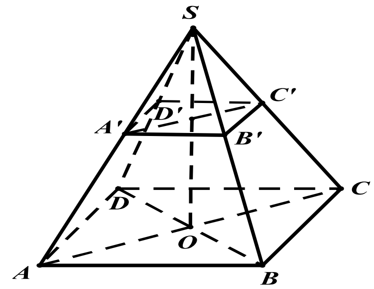
A. $\frac{SA}{SA'}+2\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+2\frac{SD}{SD'}$

B. $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{2SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{2SD'}$

C. $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$

D. $\frac{SA}{SA'}-\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}-\frac{SD}{SD'}$

Hướng dẫn giải:



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SC'}=\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$.

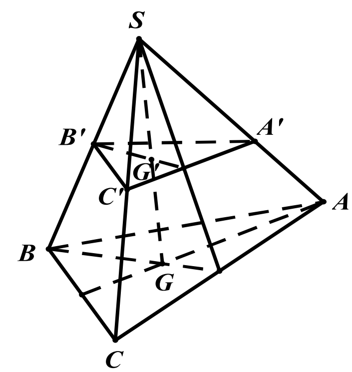
Do A',B',C',D' đồng phẳng nên đẳng thức trên

$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Câu 143. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',G'. Ta có $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=k\frac{SG}{SG'}$. Hỏi k bằng bao nhiêu?

A. 3 B. 4 C. 2 D. 1

Hướng dẫn giải:



Chọn A.

Do G là trọng tâm của ΔABC nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow 3\frac{SG}{SG'}\overrightarrow{SG'}=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}$

Mặt khác A',B',C',G' đồng phẳng nên

$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$.

Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ trong đó S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB. Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA,SB,SC,SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A',B',C',M'. Chứng minh: $\frac{S_aSA}{SA'}+\frac{S_bSB}{SB'}+\frac{S_cSC}{SC'}=\frac{S.SM}{SM'}$. (Với S_a,S_b,S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC,MCA,MAB và S là diện tích tam giác ABC).

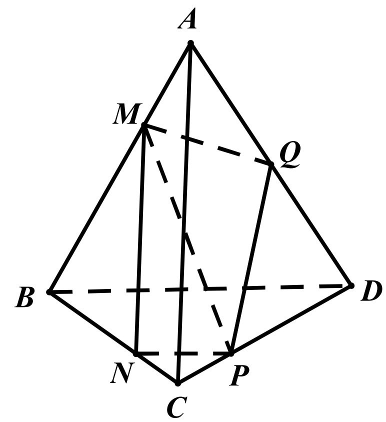
Câu 144. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M,N,P,Q lần lượt thuộc AB,BC,CD,DA sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DP}=k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để M,N,P,Q đồng phẳng

A. $k=\frac{1}{2}$ B. $k=\frac{1}{3}$ C. $k=\frac{1}{4}$ D. $k=\frac{1}{5}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1.



Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ do đó $MN\parallel AC$.

Vậy Nếu M,N,P,Q đồng phẳng thì

$(MNPQ)\cap(ACD)=PQ\parallel AC$

$\Rightarrow\frac{PC}{PD}=\frac{QA}{QD}=1$ hay $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$.

Cách 2.

Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+k\vec{c}$, $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

Các điểm M,N,P,Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow\exists x,y:\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MQ}$

$\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+k\vec{c}=x\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)+y\left(-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

Do các vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nên $\begin{cases}-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}x=k\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4},y=1,k=\frac{1}{2}$.

Câu 145. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}.$ D. $AB\perp CD$ hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC,BCD,CDA,ABD là các tam giác đều.

A. Đúng vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

B. Đúng vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-a.a.\cos 60^0=\frac{-a^2}{2}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-a.a.\cos 60^0=-\frac{a^2}{2}$.

D. Đúng vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0.$

Câu 146. Cho hình chóp $S.ABC$ Lấy các điểm A',B',C' lần lượt thuộc các tia SA,SB,SC sao cho $SA=a.SA',SB=b.SB',SC=c.SC'$, trong đó a,b,c là các số thay đổi. Tìm mối liên hệ giữa a,b,c để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC.

A. $a+b+c=3$ B. $a+b+c=4$ C. $a+b+c=2$ D. $a+b+c=1$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Nếu $a=b=c=1$ thì $SA=SA', SB=SB', SC=SC'$ nên $(ABC)\equiv(A'B'C')$.

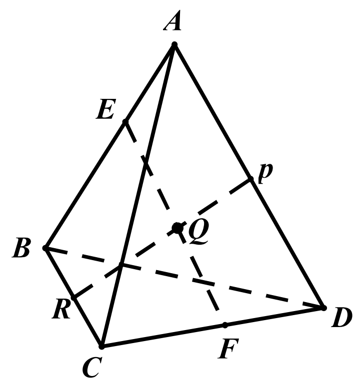
Suy ra $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác $ABC => a+b+c=3$ là đáp án đúng.

Câu 147. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F là các điểm thỏa năm $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ còn P,Q,R là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{PA}=l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE}=l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB}=l\overrightarrow{RC}$. Chứng minh ba điểm P,Q,R thẳng hàng.Khẳng định nào sau đây là đúng

A. P, Q, R thẳng hàng
B. P, Q, R không đồng phẳng
C. P, Q, R không thẳng hàng
D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FQ}$ (2)

Từ (2) ta có $l\overrightarrow{PQ}=l\overrightarrow{PD}+l\overrightarrow{DF}+l\overrightarrow{FQ}$ (3)

Lấy $(1)-(3)$ theo vế ta có

$(1-l)\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AE}-l\overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$

Tương tự $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}=k\overrightarrow{FC}$ nên $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE}-\frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}=\frac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB}-\frac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC}=-k\overrightarrow{QR}$

Vậy P,Q,R thẳng hàng.

Câu 148. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A,B,C,D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A,B,C,D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
B. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Câu 149. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ $(\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD})=a^2$

(Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$)

Câu 150. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}$.

A. $\frac{9}{S^2}$ B. $\frac{3}{S}$ C. $\frac{2}{S^2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{S}$

Hướng dẫn giải:

Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\Delta BCD = \Delta ADC = \Delta DAB = \Delta CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \le \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$.

Theo công thức Leibbnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + BC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2\right)$

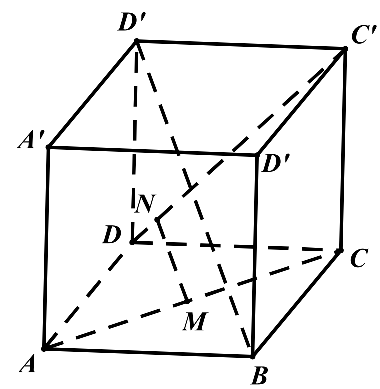
Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2 = aa^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 151. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định vị trí các điểm M, N lần lượt trên AC và DC' sao cho $MN // BD'$. Tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

$\vec{a} \neq \vec{0}$ là VTCP của d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.

2. Góc giữa hai đường thẳng:

- a′//a, b′//b $\Rightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = \left(\widehat{a',b'}\right)$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b, $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$.

$$\text{Khi đó: } \left(\widehat{a,b}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^0 \leq \alpha \leq 180^0 \\ 180^0 - \alpha & \text{nếu } 90^0 < \alpha \leq 180^0 \end{cases}$$

- Nếu a//b hoặc a ≡ b thì $\left(\widehat{a,b}\right) = 0^0$

Chú ý: $0^0 \leq \left(\widehat{a,b}\right) \leq 90^0$

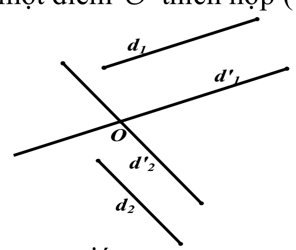
3. Hai đường thẳng vuông góc:

- $a \perp b \Leftrightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = 90^0$
- Giả sử $\vec{u}$ là VTCP của a, $\vec{v}$ là VTCP của b. Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- **Lưu ý:** Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

4. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng:

Cách 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng)

Từ O vẽ các đường thẳng d_1', d_2' lần lượt song song (có thể tròng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2. Góc giữa hai đường thẳng d_1', d_2' chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2.



Lưu ý 1: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cách 2. Tìm hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos\left(d_1, d_2\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Lưu ý 2: Để tính $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}, \left|\overrightarrow{u_1}\right|, \left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng, sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán

5. Phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc:

Chứng minh $d_1 \perp d_2$ ta chứng minh $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2} = 0$ trong đó $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của d_1 và d_2.

Sử dụng tính chất $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$.

Sử dụng định lí Pitago hoặc xác định góc giữa d_1, d_2 và tính trực tiếp góc đó.

Tính độ dài đoạn thẳng, diện tích của một đa giác. Tính tích vô hướng …

CÂU HỎI TNKQ

Câu 1. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây đúng

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a // b$.

B. Nếu $a // b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mp $(\alpha) // c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C sai do: Giả sử hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta dựng đường thẳng c là đường vuông góc chung của a và b. Khi đó góc giữa a và c bằng với góc giữa b và c và cùng bằng 90^0, nhưng hiển nhiên hai đường thẳng a và b không song song.

D sai do: giả sử a vuông góc với c, b song song với c, khi đó góc giữa a và c bằng $90°$, còn góc giữa b và c bằng 0^0.

Do đó B đúng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn **B.** Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn

C. Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn **D.** Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 4. Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

B. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(a,\ b)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 6. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi d_1, d_2, d_3 là 3 đường thẳng cắt nhau từng đôi một. Giả sử d_1, d_2 cắt nhau tại A, vì d_3 không nằm cùng mặt phẳng với d_1, d_2 mà d_3 cắt d_1, d_2 nên d_3 phải đi qua A. Thật vậy giả sử d_3 không đi qua A thì nó phải cắt d_1, d_2 tại hai điểm B, C điều này là vô lí, một đường thẳng không thể cắt một mặt phẳng tại hai điểm phân biệt.

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

C. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng.

D. Cho hai đường thẳng a và b song song, nếu a vuông góc với c thì b cũng vuông góc với c.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 8. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải:

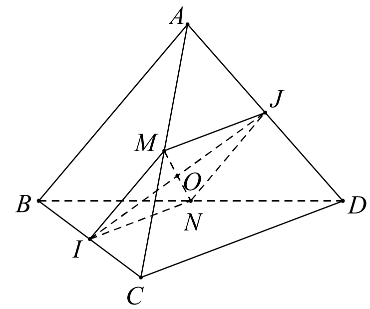
Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng

A. Cho hai đường thẳng $a,\ b$ song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a,b).

B. Cho ba đường thẳng $a,\ b,\ c$ vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.
C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.
D. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.
Hướng dẫn giải:
Chọn D.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là
A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.
Hướng dẫn giải:
Chọn C.

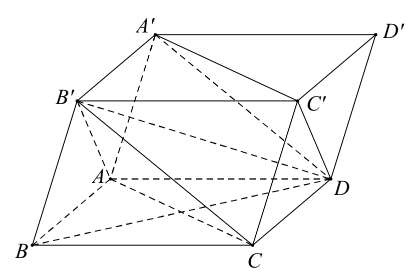


Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC.
Ta có:
$$\begin{cases} MI = NI = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ MI \,//\, AB \,//\, CD \,//\, NI \end{cases} \Rightarrow MINJ \text{ là hình thoi.}$$
Gọi O là giao điểm của MN và IJ.
Ta có: $\widehat{MIN} = 2\widehat{MIO}$.

Xét ΔMIO vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{MIO} = \dfrac{IO}{MI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MIO} = 30° \Rightarrow \widehat{MIN} = 60°$.

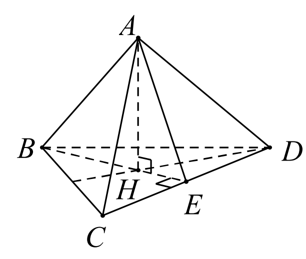
Mà: $(AB, CD) = (IM, IN) = \widehat{MIN} = 60°$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây
A. $\widehat{BDB'}$. **B.** $\widehat{AB'C}$. **C.** $\widehat{DB'B}$. **D.** $\widehat{DA'C'}$.
Hướng dẫn giải:
Chọn D.



Ta có: $AC \,//\, A'C'$ (tính chất của hình hộp)
$\Rightarrow (AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$ (do giả thiết cho $\Delta DA'C'$ nhọn).

Câu 13. Cho tứ diện đều $ABCD$ (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.
Hướng dẫn giải:
Chọn D.



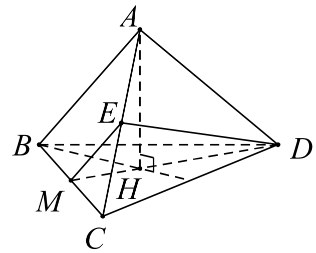
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.
Gọi E là trung điểm CD $\Rightarrow BE \perp CD$ (do ΔBCD đều).
Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.
Ta có: $\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = 90°$.

Câu 14. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow AH \perp \left(BCD\right)$.

Gọi E là trung điểm AC $\Rightarrow ME \,//\, AB \Rightarrow \left(AB, DM\right) = \left(ME, MD\right)$

Ta có:

$\cos\left(AB, DM\right) = \cos\left(ME, MD\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MD}\right)\right| = \left|\cos\widehat{EMD}\right|$.

Do các mặt của tứ diện đều là tam giác đều, từ đó ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của ΔMED: $ME = a$, $ED = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔMED, ta có: $\cos\widehat{EMD} = \dfrac{ME^2 + MD^2 - ED^2}{2ME.MD} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

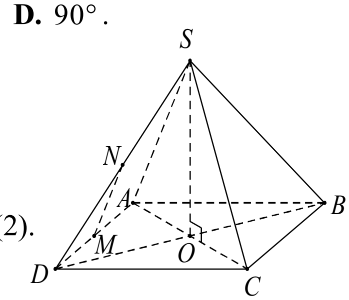
Từ đó: $\cos\left(AB, DM\right) = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(MN, SC\right)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA = SB = SC = SD$

$\Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp \left(ABCD\right)$.

Từ giả thiết ta có: $MN \,//\, SA$ (do MN là đường trung bình của ΔSAD)

$\Rightarrow \left(MN, SC\right) = \left(SA, SC\right)$.

Xét ΔSAC, ta có: $\begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = 2AD = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S $\Rightarrow SA \perp SC$.

$\Rightarrow \left(SA, SC\right) = \left(MN, SC\right) = 90°$.

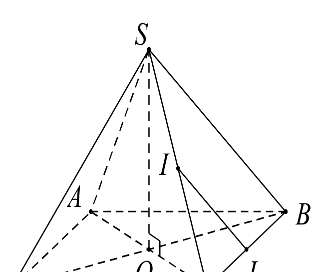
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc $\left(IJ, CD\right)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$



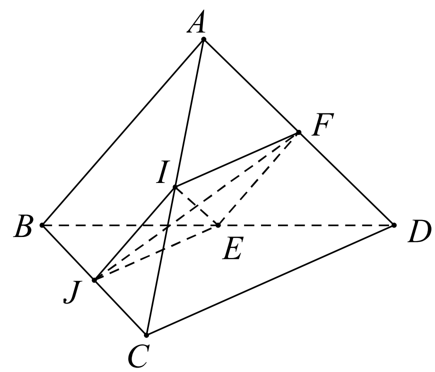
$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).
Ta có: $SA = SB = SC = SD$
$\Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
Từ giả thiết ta có: $IJ \,//\, SB$ (do IJ là đường trung bình của ΔSAB).
$\Rightarrow (IJ, CD) = (SB, AB)$.
Mặt khác, ta lại có ΔSAB đều, do đó $\widehat{SBA} = 60° \Rightarrow (SB, AB) = 60° \Rightarrow (IJ, CD) = 60°$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc giữa (IE, JF) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} IJ \,//\, EF \,//\, AB \\ JE \,//\, IF \,//\, CD \end{cases}$

Từ đó suy ra tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $AB = CD \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}AB = JE = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow IE \perp JF$

$\Rightarrow (IE, JF) = 90°$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $120°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\left.\begin{matrix} AB \perp AE \\ AE \,//\, DH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}\right)} = 90°$$

Câu 19. Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $120°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì $ABCD$ và $ABC'D'$ là hình vuông nên $AD \,//\, BC'$; $AD = BC' \Rightarrow ADBC'$ là hình bình hành

Mà O; O' là tâm của 2 hình vuông nên O; O' là trung điểm của BD và AC' $\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $ADBC' \Rightarrow OO' \,//\, AD$

Mặt khác, $AD \perp AB$ nên $OO' \perp AB \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{AB}\right)} = 90^o$

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

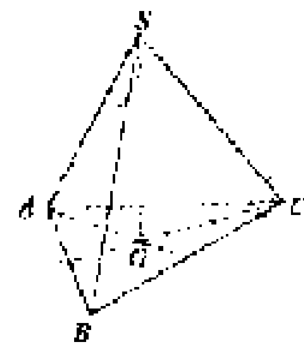
Chọn B. Ta có BAC và BAD là 2 tam giác đều, I là trung điểm của AB nên $CI = DI$ (2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều chung cạnh AB) nên CID là tam giác cân ở I.
Do đó $IJ \perp CD$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $60°$ **B.** $120°$ **C.** $45°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCA\ (c-g-c) \Rightarrow AB = BC = CA$.

Do đótam giác ABC đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$

nên hình chiếu của S trùng với G

Hay $SG \perp (ABC)$.

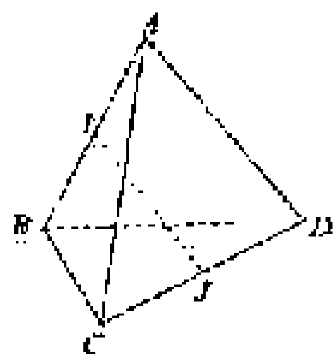
Ta có: $\begin{cases} AC \perp BG \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBG)$. Suy ra $AC \perp SB$.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$

A. $120°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $45°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60°$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn khẳng định đúng

A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$

$= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$

$= 3AG^2 + 3BG^2 + 3CG^2 + 3DG^2 + 2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(1)$

Lại có:

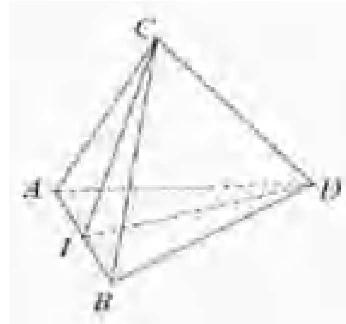
$\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(2)$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là

A. $120°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

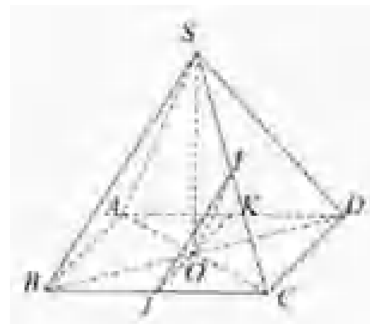
Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều

Nên $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$. Suy ra $AB \perp (CID) \Rightarrow AB \perp CD$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. $90°$ **B.** $45°$ **C.** $30°$ **D.** $60°$



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $OJ // CD$.

Nên góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ.

Xét tam giác IOJ có

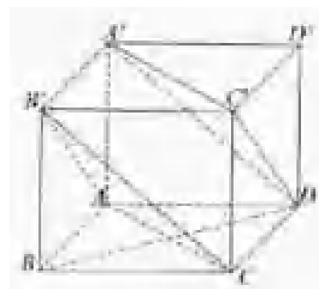
$IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}, OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}, IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$.

Nên tam giác IOJ đều.

Vậy góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ và bằng góc $\widehat{IJO} = 60^0$.

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây

A. $\widehat{AB'C}$ **B.** $\widehat{DA'C'}$ **C.** $\widehat{BB'D}$ **D.** $\widehat{BDB'}$



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

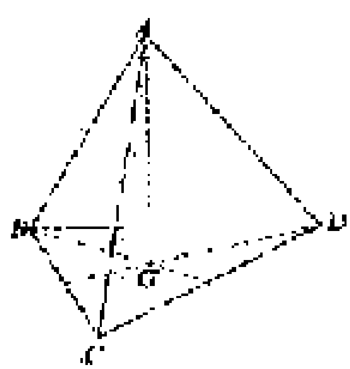
Ta có: $AC // A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $A'D$, bằng góc nhọn $\widehat{DA'C'}$ (Vì tam giác $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn).

Câu 27. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AG \\ CD \perp BG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABG) \Rightarrow CD \perp AB$.

Vậy số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90^0

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Thiết diện là hình chữ nhật. **B.** Thiết diện là hình vuông.
C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình thang.

Hướng dẫn giải:

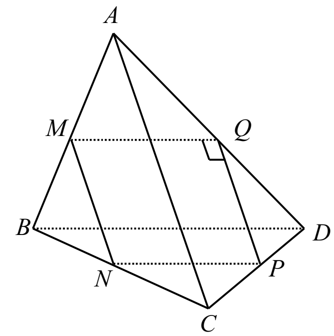
Chọn A.

Giả sử thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $MN//PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp PQ$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.



Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng. **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Bài giải đúng.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$

A. $120°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

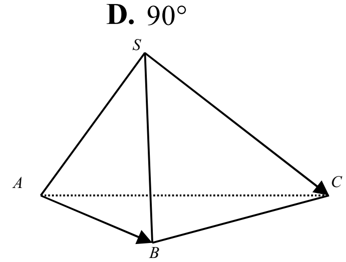
Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$= SA.SB\cos\widehat{BSC} - SC.SA.\cos\widehat{ASC} = 0$

Vì $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC}$. Do đó: $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 90^0$



Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C. Ta có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

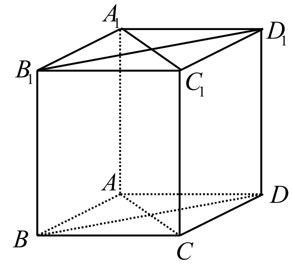
Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90° \Rightarrow (MN, SC) = 90°$

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai**

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng $90°$.
B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng $60°$.
C. Góc giữa AD và B_1C bằng $45°$.
D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có: $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$

$$= \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} = 0$$

(vì $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}\right) = 90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$)

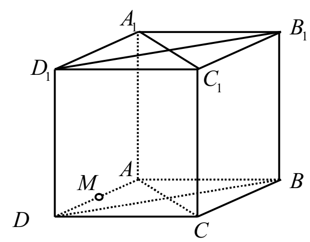
Do đó: $\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1D_1}\right) = 90^0 \Rightarrow \left(AA_1, B_1D_1\right) = 90^0$

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là

A. $\dfrac{1}{2}a^2$ **B.** a^2 **C.** $\dfrac{3}{4}a^2$ **D.** $\dfrac{3}{2}a^2$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**

A. $A'C' \perp BD$ **B.** $BB' \perp BD$ **C.** $A'B \perp DC'$ **D.** $BC' \perp A'D$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB'}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} = BB'.BA\left(\cos\widehat{B'BA} + \cos\widehat{B'BC}\right)$

Vì $AA'B'B$ và $ABCD$ là hai hình thoi bằng nhau nên

+ $\widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} \Rightarrow \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD} \neq 0$ suy ra BB' không vuông góc với BD

+ $\widehat{B'BA} + \widehat{B'BC} = 180^0 \Rightarrow \cos\widehat{B'BA} = -\cos\widehat{B'BC} \Rightarrow \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD} = 0$ suy ra $BB' \perp BD$

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc $\widehat{B'BA}$ và $\widehat{B'BC}$

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$

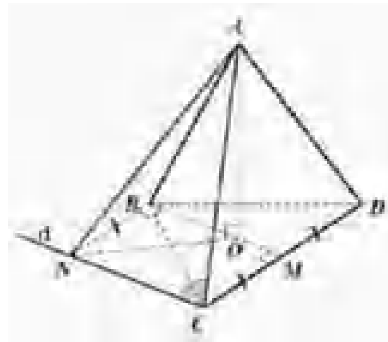
A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $EG // AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45°$

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng



A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\alpha = 60^0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi O là trọng tâm của ΔBCD $\Rightarrow AO \perp (BCD)$

Trên đường thẳng d qua C và song song BM lấy điểm N sao cho $BMCN$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra: $\left(\widehat{AC, BM}\right) = \left(\widehat{AC, CN}\right) = \left(\widehat{ACN}\right) = \alpha$

Có: $CN = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $BN = CN = \dfrac{a}{2}$

$AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - \left(\dfrac{2}{3}BM\right)^2 = \dfrac{2}{3}a^2$

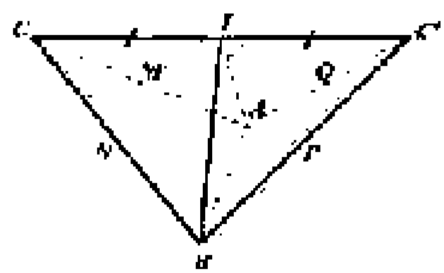
$ON^2 = BN^2 + BO^2 = \dfrac{7}{12}a^2$; $AN = \sqrt{AO^2 + ON^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AC^2 + CN^2 - AN^2}{2AC.CN} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 37. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$

A. 45^0 **B.** 120^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi I là trung điểm CC'

$\Delta CAC'$ cân tại A $\Rightarrow CC' \perp AI$ (1)

$\Delta CBC'$ cân tại B $\Rightarrow CC' \perp BI$ (2)

$\xrightarrow{(1),(2)} CC' \perp (AIB) \Rightarrow CC' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$

Kết luận: góc giữa $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{AB}$ là $90°$

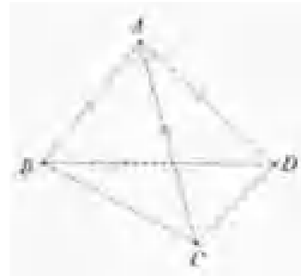
Câu 38. Cho $\vec{a} = 3,\ \vec{b} = 5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{19}$ **B.** $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 7$ **C.** $\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right| = \sqrt{139}$ **D.** $\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| = 9$

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Ta có: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 19$ $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}.cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 19$

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$



A. 60^0 **B.** 45^0 **C.** 120^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải:

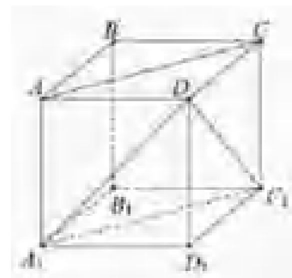
Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0 = 0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90^0$.

Câu 40. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là



A. 45^0 **B.** 90^0 **C.** 60^0 **D.** 120^0

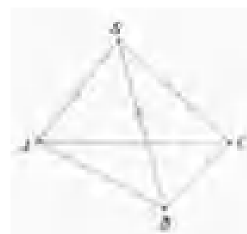
Hướng dẫn giải:

Vì $A'C'//AC$ nên góc giữa AC và DA_1 là $\widehat{DA_1C_1}$. Vì tam giác DA_1C_1 đều nên $\widehat{DA_1C_1} = 60^0$. Vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60^0.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$

A. 120^0 **B.** 90^0 **C.** 60^0

D. 45^0



Hướng dẫn giải:

Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

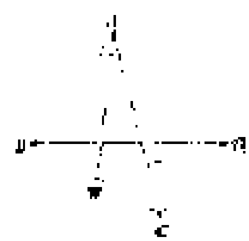
$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB} = 0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$

Câu 42. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AM.\cos 30^0 - AB.AD.\cos 60^0$

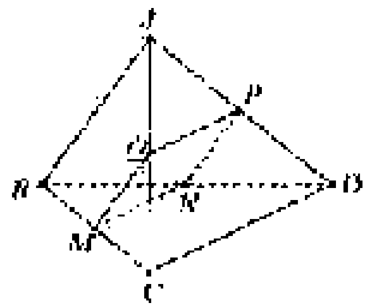
$= a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{4}$.

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB, DM\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 43. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC$ $\left(0 < x < 1\right)$. mp$\left(P\right)$ song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu

A. 9 **B.** 11 **C** 10. **D.** 8

Hướng dẫn giải:



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = 1 - x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

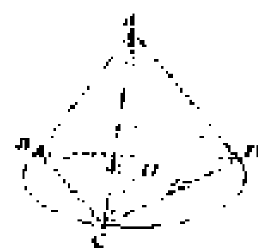
Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu

A. 0^0 **B.** 30^0 **C.** 90^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải:



Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CO.CD.\cos 30^0 - CA.CD.\cos 60^0$

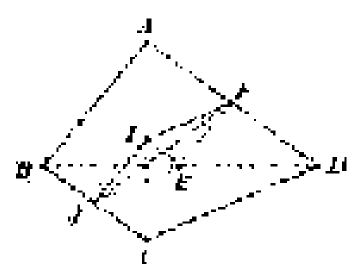
$= \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = 0.$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải:



Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

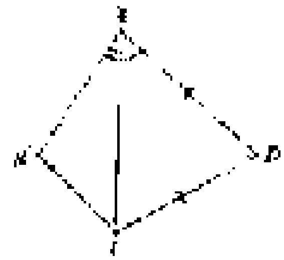
Mặt khác $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$ mà $AB = CD$ nên $IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90^0$.

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$ **B.** $\varphi = 60^0$ **C.** $\varphi = 30^0$ **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0$$

$$=AB.AD.\frac{1}{2}-AB.\frac{3}{2}AD.\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}AB.AD=-\frac{1}{4}AB.CD.$$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{-\frac{1}{4}AB.CD}{AB.CD}=-\dfrac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Câu 47. Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Tứ giác $CDD'C'$ là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:

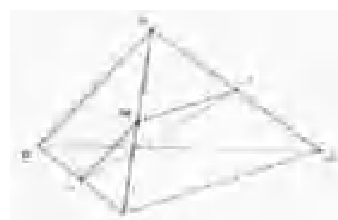
Tứ giác $CDD'C'$ là hình bình hành. Lại có: $DC\perp\left(ADD'\right)\Rightarrow DC\perp DD'$.

Vậy tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, IJ=$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I,J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của AC. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MI và MJ.

Tính được: $\cos \text{IMJ}=\dfrac{IM^2+MJ^2-\text{IJ}^2}{2MI.MJ}=-\dfrac{1}{2}$

Từ đó suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là: 60^0.

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC$, $AB\perp BD$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB bằng

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Hướng dẫn giải:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}\Rightarrow AB\perp PQ$

Câu 50. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Hướng dẫn giải:

$(\vec{a}-\vec{b})^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{9}{2}$. Do đó: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3}{8}$.

Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=k$

A. $k=1$. **B.** $k=2$. **C.** $k=0$. **D.** $k=4$.

Hướng dẫn giải:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$$
$$=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=0.$$

Chọn đáp án C.

Câu 52. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng

A. $AB^2+AC^2+BC^2=2\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

B. $AB^2+AC^2+BC^2=GA^2+GB^2+GC^2$.

C. $AB^2+AC^2+BC^2=4\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

D. $AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1

Ta có $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)^2=0\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=0$

$\Leftrightarrow GA^2+GB^2+GC^2+\left(GA^2+GB^2-AB^2\right)+\left(GA^2+GC^2-AC^2\right)+\left(GB^2+GC^2-BC^2\right)=0$

$\Leftrightarrow AB^2+AC^2+BC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$

Cách 2

Ta có: $\begin{cases} MA^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4} \\ GA=\dfrac{2}{3}MA \end{cases}\Rightarrow GA^2=\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}\right).$

Tương tự ta suy ra được

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}+\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}+\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).$$

$\Leftrightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2$. Chọn đáp án **D**.

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

$\begin{cases} AB^2+BC^2+CA^2=3 \\ GA^2+GB^2+GC^2=1 \end{cases}\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2$. Chọn đáp án **D**.

Câu 53. Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. M là trọng tâm tam giác ABC

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

C. M là trực tâm tam giác ABC

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Hướng dẫn giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

$$P=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\geq GA^2+GB^2+GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv G$.

Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC. **Chọn đáp án A.**

Câu 54. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a}+\vec{b}| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng

A. 25 **B.** $\sqrt{616}$ **C.** 9 **D.** $\sqrt{618}$

Hướng dẫn giải:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = 2(\vec{a}^2+\vec{b}^2) - (\vec{a}+\vec{b})^2$$

$$= 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right) - |\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2(26^2+28^2) - 48^2 = 616$$

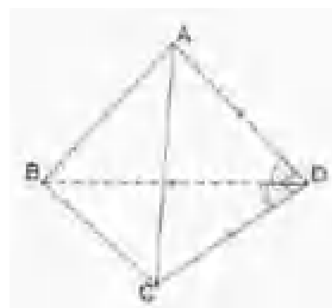
$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{616}.$$

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC$ và $\widehat{BDA} = 60^0, \widehat{ADC} = 90^0, \widehat{BDC} = 120^0$. Trong các mặt của tứ diện đó

A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất. **B.** Tam giác BCD có diện tích lớn nhất.
C. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất. **D.** Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải:

Đặt $DA = DB = DC = a$



Tam giác ABD đều cạnh a nên diện tích $S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ACD vuôn tại D nên diện tích

$S_{ACD} = \dfrac{1}{2}DA.DC = \dfrac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}DB.DC\sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABC có $AB = a, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a}.\vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$, . Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\vec{x}.\vec{y} = (\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a}.\vec{b} = 4$.

$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a}.\vec{b}} = 2\sqrt{3}$.

$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{5}$. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$

Câu 57. Cho tam giác ABC có diện tích S. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - 2k\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

A. $k = \dfrac{1}{4}$. **B.** k = 0. **C.** $k = \dfrac{1}{2}$. **D.** $k = 1$.

Hướng dẫn giải:

$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\sin^2 C}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\left(1-\cos^2 C\right)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$. **Chọn C.**

Câu 58. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều

a) Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. AB và CD chéo nhau **B.** AB và CD vuông góc với nhau

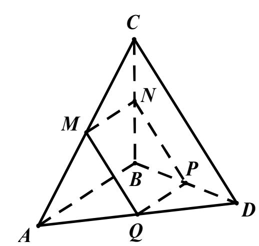
C. AB và CD đồng phẳng **D.** AB và CD cắt nhau

b) Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC,BC,BD,DA. Khẳng định nào sau đây là đúng nhất

A. $MNPQ$ là hình vuông **B.** $MNPQ$ là hình bình hành

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật **D.** $MNPQ$ là hình thoi

Hướng dẫn giải:



a) Đặt $AB=AD=AC=a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0-\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0=a.a.\frac{1}{2}-a.a.\frac{1}{2}=0$

Vậy $AB\perp CD$.

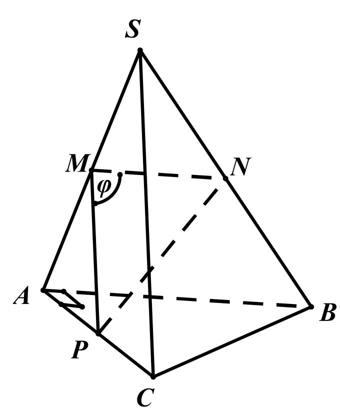
b) Ta có $MN\,||\,PQ\,||\,AB$ và $MN=PQ=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases}MN\,||\,AB\\ NP\,||\,CD\\ AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow MN\perp NP$, do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC

A. $\widehat{(AB,SC)}=60^0$ **B.** $\widehat{(AB,SC)}=45^0$ **C.** $\widehat{(AB,SC)}=30^0$ **D.** $\widehat{(AB,SC)}=90^0$

Hướng dẫn giải:



Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SA,SB,AC, khi đó

$MN\,//\,AB$ nên $\widehat{(AB,SC)}=\widehat{(MN,SC)}$.

Đặt $\varphi=\widehat{NMP}$, trong tam giác MNP có

$\cos\varphi=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2MN.MP}$ (1).

Ta có $MN=MP=\frac{a}{2}$, $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy $PB^2=AP^2+AC^2=\frac{5a^2}{4}$, $PS^2=\frac{3a^2}{4}$. Trong tam giác PBS theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$PN^2=\frac{PB^2+PS^2}{2}-\frac{SB^2}{4}=\frac{\frac{5a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$.

Thay MN, MP, NP vào (1) ta được $\cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^0$. Vậy $\widehat{(AB, SC)} = \widehat{(MN, SC)} = 60^0$

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC

A. $\widehat{(BC, SD)} = 30^0$ **B.** $\widehat{(BC, SD)} = 45^0$ **C.** $\widehat{(BC, SD)} = 60^0$ **D.** $\widehat{(BC, SD)} = 50^0$

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J

A. $\widehat{(IJ, AC)} = 90^0$ **B.** $\widehat{(IJ, AC)} = 60^0$ **C.** $\widehat{(IJ, AC)} = 30^0$ **D.** $\widehat{(IJ, AC)} = 45^0$

Hướng dẫn giải:

a) $\widehat{(BC, SD)} = 45^0$ b) $\widehat{(IJ, AC)} = 90^0$.

Câu 61. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung cạnh đáy BC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau

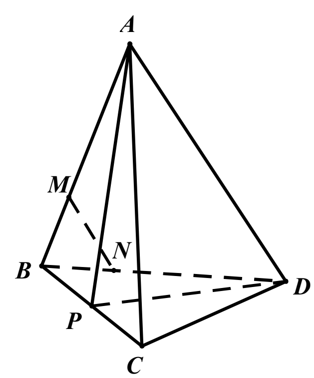
a) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất

A. $AD \perp BC$ **B.** AD cắt BC **C.** AD và BC chéo nhau **D.** Cả A, B, C đều đúng

b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC

A. $\widehat{(MN, BC)} = 90^0$ **B.** $\widehat{(MN, BC)} = 80^0$ **C.** $\widehat{(MN, BC)} = 60^0$ **D.** $\widehat{(MN, BC)} = 45^0$

Hướng dẫn giải:



a) Gọi P là trung điểm của BC, thì các tam giác ABC và DBC cân nên $\begin{cases} AP \perp BC \\ DP \perp BC \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}\right) = 0$. Vậy $BC \perp AD$.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = |k|$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB} \Rightarrow \frac{ND}{NB} = |k|$

$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NB}$

Suy ra $MN \parallel AD \Rightarrow \widehat{(MN, BC)} = \widehat{(AD, BC)} = 90^0$ (Theo câu a).

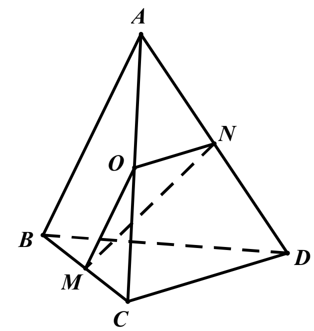
Câu 62. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^0$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và B'D'

A. $\widehat{(\text{AC}, B'\text{D}')} = 90^0$ **B.** $\widehat{(\text{AC}, B'\text{D}')} = 60^0$ **C.** $\widehat{(\text{AC}, B'\text{D}')} = 45^0$ **D.** $\widehat{(\text{AC}, B'\text{D}')} = 30^0$

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD

A. $\widehat{(AB, CD)} = 30^0$ **B.** $\widehat{(AB, CD)} = 45^0$ **C.** $\widehat{(AB, CD)} = 60^0$ **D.** $\widehat{(AB, CD)} = 90^0$

Hướng dẫn giải:



Gọi O là trung điểm của AC, ta có $OM = ON = a$.

$\begin{cases} OM \parallel AB \\ ON \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{OM,ON}\right)$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OMN ta có

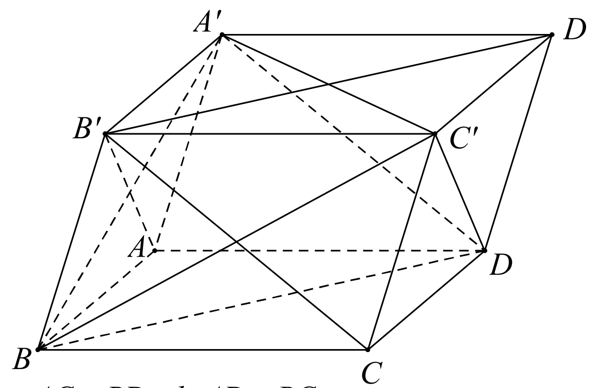
$$\cos\widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM.ON} = \frac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $\left(\widehat{AB,CD}\right) = 60^0$.

Câu 64. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**

A. $A'C' \perp BD$. **B.** $BB' \perp BD$. **C.** $A'B \perp DC'$. **D.** $BC' \perp A'D$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Chọn B.

A đúng vì: $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ B'D' \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp BD$.

B sai vì:

C đúng vì: $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ AB' \,//\, DC' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp DC'$.

D đúng vì: $\begin{cases} BC' \perp B'C \\ B'C \,//\, A'D \end{cases} \Rightarrow BC' \perp A'D$.

Câu 65. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.

a) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**

A. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó

B. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì không vuông góc với hai cạnh đó

C. các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì có thể vuông góc có thể không vuông góc với hai cạnh đó

D. cả A, B, C đều sai

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD

A. $\left(\widehat{AC,BD}\right) = \arccos\left|\frac{\left(a^2 - c^2\right)}{b^2}\right|$ **B.** $\left(\widehat{AC,BD}\right) = \arccos\left|\frac{2\left(a^2 + c^2\right)}{b^2}\right|$

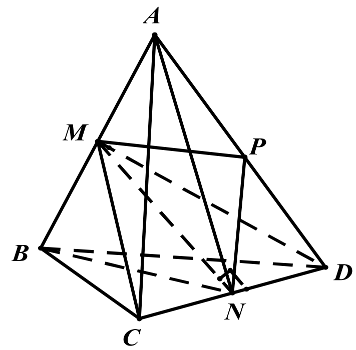
C. $\left(\widehat{AC,BD}\right) = \arccos\left|\frac{2\left(a^2 - c^2\right)}{3b^2}\right|$ **D.** $\left(\widehat{AC,BD}\right) = \arccos\left|\frac{2\left(a^2 - c^2\right)}{b^2}\right|$

Hướng dẫn giải:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD.

a) Do hai tam giác ACD và BCD có CD chung và $AC = BD, AD = BC$ nên chúng bằng nhau, suy ra $MC = MD$

Vậy tam giác MCD cân tại M và có trung tuyến MN nên $MN \perp CD$.



Tương tự $MN \perp AB$.
Chứng minh tương tự cho hai cặp cạnh đối còn lại.

b) Ta có $\begin{cases} PM \parallel BD \\ PN \parallel AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(BD, AC)} = \widehat{(PM, PN)}$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$$

Tương tự $DM^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$,

nên

$$MN^2 = \frac{MC^2 + MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác PMN ta có

$$\cos \widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2.PM.PN} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{2\left(a^2 - c^2\right)}{b^2}$$

Vậy $\widehat{(AC, BD)} = \arccos\left|\dfrac{2\left(a^2 - c^2\right)}{b^2}\right|$.

Câu 66. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$.

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai ở bước 3.

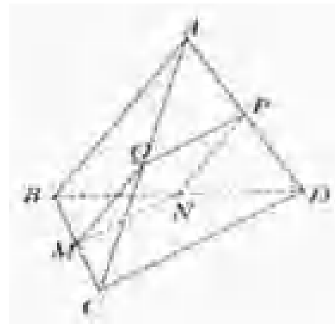
<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn A.

Câu 67. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải là hình thang.



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có: $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN\perp MQ$ $\left(do\ AB\perp CD\right)$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 68. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm của AB,CD,AD,BC và AC

a) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**

A. $MN\perp RP, MN\perp RQ$ **B.** $MN\perp RP$, MN cắt RQ

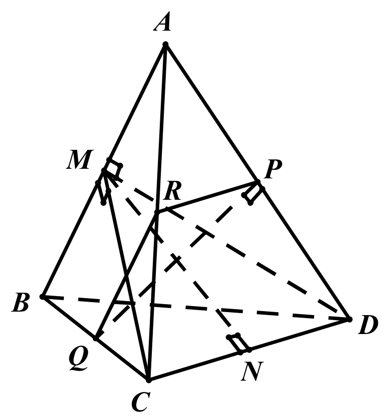
C. MN chéo RP; MN chéo RQ **D.** Cả A, B, C đều sai

b) Tính góc của hai đường thẳng AB và CD

A. $\left(\widehat{AB,CD}\right)=60^0$ **B.** $\left(\widehat{AB,CD}\right)=30^0$ **C.** $\left(\widehat{AB,CD}\right)=45^0$ **D.** $\left(\widehat{AB,CD}\right)=90^0$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $MC=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN\perp CD$.



Lại có $RP//CD\Rightarrow MN\perp RQ$.

b) Tương tự ta có $QP\perp AD$

Trong tam giác vuông PDQ ta có

$QP^2=QD^2-DP^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$ Ta có :

$RQ^2+RP^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2=QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP\perp RQ$.

Vì vậy $\begin{cases}AB\parallel RQ\\CD\parallel RP\\RP\perp RQ\end{cases}\Rightarrow AB\perp CD$.

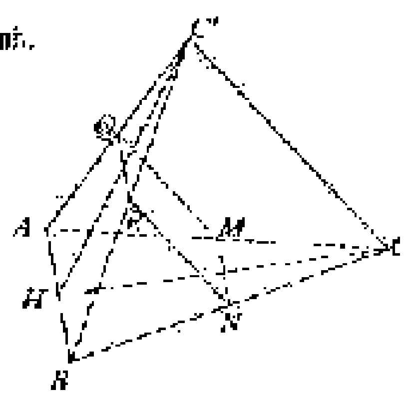
Câu 69. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì $M,\ N,\ P,\ Q$ nên dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



Gọi H là trung điểm của AB.

Vì hai tam giác ABC và ABC' nên $\begin{cases}CH\perp AB\\C'H\perp AB\end{cases}$

Suy ra $AB\perp\left(CHC'\right)$. Do đó $AB\perp CC'$.

Ta có: $\begin{cases} PQ//AB \\ PN//CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAB vuông can tại A, M là một điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng (α) đi qua M và song sog với (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q

a) $MNPQ$ là hình gì

A. $MNPQ$ là hình thang vuông. **B.** $MNPQ$ là hình vuông.

C. $MNPQ$ là hình chữ nhật. **D.** $MNPQ$ là hình bình hành.

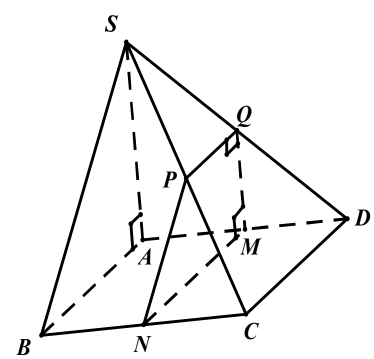
b)Tính diện tích của $MNPQ$ theo a

A. $S_{MNPQ} = \dfrac{3a^2}{8}$ **B.** $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{8}$ **C.** $S_{MNPQ} = \dfrac{3a^2}{4}$ **D.** $S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{4}$

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$. Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel SB$

$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SAD) \cap (SAB) = SA \\ (\alpha) \cap (SAD) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel SA$



Dễ thấy $MN \parallel PQ \parallel AB \parallel CD$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MQ \parallel SA \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Ta có $MN = AB = a$, $MQ = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$, $PQ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + PQ).MQ = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right)\dfrac{a}{2} = \dfrac{3a^2}{8}$.

Câu 71. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x(0 \le x \le a)$. Khẳng định nào sau đây là đúng

a) Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $AC' \perp B'D'$ **B.** AC’ cắt B’D’

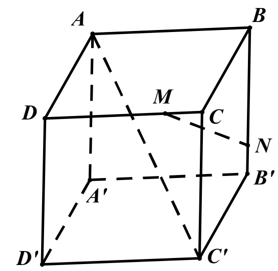
C. AC’và B’D’ đồng phẳng **D.** Cả A, B, C đều đúng

b) Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $AC' \perp MN$ **B.** AC’ và MN cắt nhau

C. AC’ và MN đồng phẳng **D.** Cả A, B, C đều đúng

Hướng dẫn giải:



Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'}=\vec{c}-\vec{b}$ nên

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$

$=\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\vec{c}^2-\vec{b}^2=a^2-a^2=0$

$\Rightarrow AC'\perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)[\left(\vec{b}+\frac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\frac{x}{a}\vec{b}\right)=\frac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}]$

$$=\frac{x}{a}\vec{a}^2+\left(1-\frac{x}{a}\right)\vec{b}^2-\vec{c}^2=x.a+\left(1-\frac{x}{a}\right)a^2-a^2=0.$$

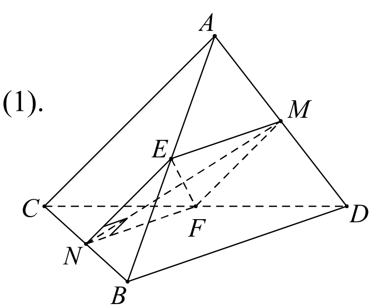
Vậy $AC'\perp MN$.

Câu 72. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=a$, $BD=3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $MN=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $\begin{cases}EN\ //\ AC\\ NF\ //\ BD\end{cases}\Rightarrow\left(AC,BD\right)=\left(NE,NF\right)=90^\circ\Rightarrow NE\perp NF$ (1).

Mà: $\begin{cases}NE=FM=\dfrac{1}{2}AC\\ NF=ME=\dfrac{1}{2}BD\end{cases}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow MENF$ là hình chữ nhật.

Từ đó ta có: $MN=\sqrt{NE^2+NF^2}=\sqrt{\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2+\left(\dfrac{BD}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 73. Trong không gian cho ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, chọn đẳng thức đúng

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-BC^2$ **B.** $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-2BC^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-BC^2$

Hướng dẫn giải:

Chọn A. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\left(AB,AC\right)=AB^2+AC^2-2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Câu 74. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

A. $a^2\sqrt{3}$. **B.** a^2 **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a^2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:.

Chọn B. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

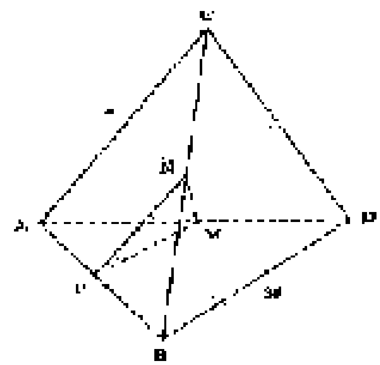
Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$

Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a,\ BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ **C.** $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $MN = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn B.



Kẻ $NP // AC\ (P \in AB)$, nối MP.

NP là đường trung bình $\Delta ABC \Rightarrow PN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.

MP là đường trung bình $\Delta ABD \Rightarrow PM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3a}{2}$.

Lại có $(AC, BD) = (PN, PM) = \overrightarrow{NPM} = 90^\circ$ suy ra

$\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại P.

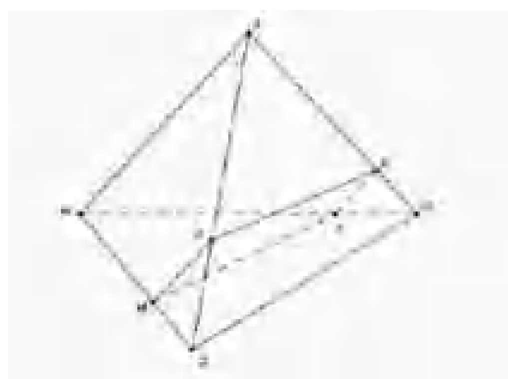
Vậy $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 76. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn C.



Thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $(AB, CD) = (QM, MP) = \widehat{QMP} = 60^\circ$.

Suy ra $S_{MPNQ} = QN.QN.\sin 60^\circ$. Lại có

$\Delta CMQ \# \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{AB} = \dfrac{MO}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2$

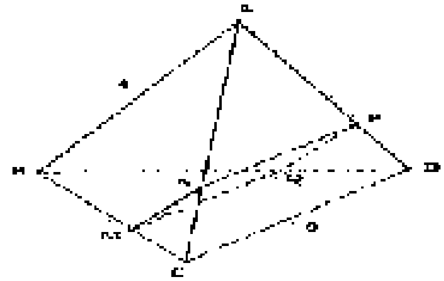
$\Delta AQN \# \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QN}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow QN = 2$

Do đó $S_{MPNQ} = QM.QN.\sin 60^\circ = 2.2.\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Câu 77. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4,\ CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là

A. 5 **B.** 6 **C.** $\frac{17}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $(AB,CD)=(MN,MQ)=\widehat{NMQ}=90°$.

Suy ra thiết diện $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có:

$\Delta CMN \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3}$

$\Delta ANP \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4$

Suy ra $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}$.

Câu 78. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP

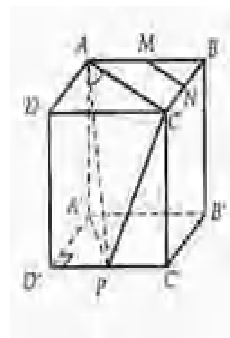
A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0

Đáp án A.

Lời giải

Phương pháp 1: Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a và $MN//AC$ nên:

$\left(\widehat{MN,AP}\right)=\left(\widehat{AC,AP}\right)$. Ta tính góc $\widehat{PAC}$.



Vì $\Delta A'D'P$ vuông tại D' nên $A'P=\sqrt{A'D'^2+D'P^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\Delta AA'P$ vuông tại A' nên $AP=\sqrt{A'A^2+A'P^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{3a}{2}$.

$\Delta CC'P$ vuông tại C' nên $CP=\sqrt{CC'^2+C'P^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên $AC=a\sqrt{2}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ACP ta có: $CP^2=AC^2+AP^2-2AC.AP.\cos\widehat{CAP}$

$\Rightarrow \cos\widehat{CAP}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \cos\widehat{CAP}=45°<90°$. Nên $\left(\widehat{AC;AP}\right)=\widehat{CAP}=45°$ hay $\left(\widehat{MN;AP}\right)=45°$

Phương pháp 2: Ta có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP}=\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|.\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right)\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right)=\frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|}$ (*)

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'P}\right)$

$=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{D'P}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{D'P}$

$=0+0+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+0+\frac{a}{2}.a+0=\frac{3a^2}{4}(1)$

$\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}(2)$

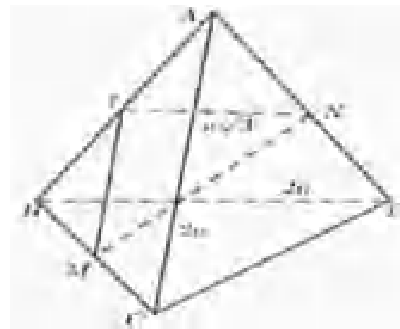
Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right)=\dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{\dfrac{3\sqrt{2}a^2}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\widehat{MN,AP}\right)=45^0.$

Câu 79. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm BC,AD. Biết rằng $MN=a\sqrt{3}$. Tính góc của AB và CD

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Đáp án C.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có $IM=IN=a$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔIMN ta có:

$\cos\widehat{MIN}=\dfrac{IM^2+IN^2-MN^2}{2.IM.IN}=\dfrac{a^2+a^2-3a^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2}.$

$\Rightarrow\widehat{MIN}=120^0$

Vì $IM//AB, IN//CD$

$\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,IN}\right)=180^0-120^0=60^0.$

Câu 80. Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$

Lời giải

Chọn D

Phương pháp 1:

Gọi H là trung điểm của BC, φ là góc giữa AA' và $B'C'$.

Ta có $AA'//BB'$ và $B'C'//BC$ nên góc giữa $\left(\widehat{AA',B'C'}\right)=\left(\widehat{BB',BC}\right)$.

Ta tính góc $\widehat{B'BH}$

ΔABC vuông tại A nên ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

$AH=\dfrac{1}{2}BC=a\Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

Vì $AH\perp(A'B'C')$ nên $\Delta A'B'H$ vuông tại A'

$B'H=\sqrt{A'H^2+A'B'^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

$\cos\widehat{B'BH}=\dfrac{B'B^2+BH^2-B'H^2}{2B'B.BH}=\dfrac{4a^2+a^2-4a^2}{2.2a.a}=\dfrac{1}{4}$. **Chọn A**

Phương pháp 2:

Ta có

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{B'C'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA'}\right).\overrightarrow{BC}\right|}{2a.2a}=\frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{4a^2}=\frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}\right|}{4a^2}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\right|}{4a^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)\right|}{4a^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(3a^2-a^2\right)\right|}{4a^2}=\frac{1}{4}.$$

Câu 81. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Gọi M là trung điểm CD. Tính cosin góc của AC và BM

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1. Gọi N là trung điểm AD ta có: $MN//AC \Rightarrow \left(\widehat{AC;BM}\right)=\left(\widehat{MN;BM}\right)$. Ta tính góc $\widehat{BMN}$. Ta có: $BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (trung tuyến tam giác đều). $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Áp dụng định lý côsin cho ΔBMN, ta được:

$\cos\widehat{BMN} = \frac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM.MN} = \frac{MN}{2BM} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$. Vậy $\cos\left(\widehat{AC;BM}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Cách 2. $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}\right)\right|}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left|a.\frac{a}{2}\cos 120^0 - a.a.\cos 120^0\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left|-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Câu 82. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $120°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B. $\left.\begin{array}{l} AB \perp AE \\ AE // DH \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DH}\right) = 90°$

Câu 83. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 84. Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $120°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Vì $ABCD$ và $ABC'D'$ là hình vuông nên $AD // BC'$; $AD = BC' \Rightarrow ADBC'$ là hình bình hành

Mà O; O' là tâm của 2 hình vuông nên O; O' là trung điểm của BD và AC' $\Rightarrow OO'$ là đường trung bình của $ADBC' \Rightarrow OO' // AD$

Mặt khác, $AD \perp AB$ nên $OO' \perp AB \perp\Rightarrow \left(\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{AB}\right) = 90^o$

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$

A. 45° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 120°

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có BAC và BAD là 2 tam giác đều, I là trung điểm của AB nên $CI = DI$ (2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều chung cạnh AB) nên CID là tam giác cân ở I. Do đó $IJ \perp CD$.

Câu 86. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a // b$.

B. Nếu $a // b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a // b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong $mp(\alpha) // c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Hướng dẫn giải:

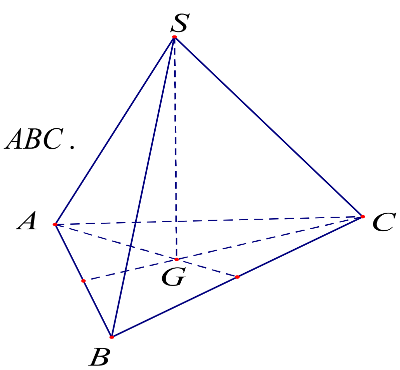
Chọn B.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. 60° **B.** 120° **C.** 45° **D.** 90°

Hướng dẫn.

Chọn D.



Ta có: $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCA\ (c-g-c) \Rightarrow AB = BC = CA$.

Do đó tam giác ABC đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S trùng với G

Hay $SG \perp (ABC)$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BG \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBG)$

Suy ra $AC \perp SB$. Vậy góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 90^0.

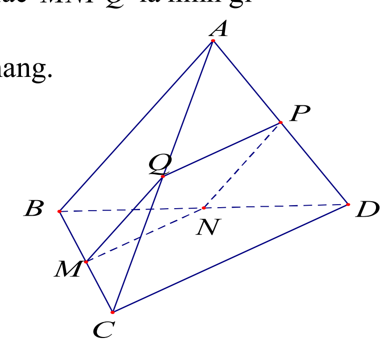
Câu 88. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải là hình thang.

Hướng dẫn

Chọn C.



Ta có: $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$

Tương tự ta có: $MN // CD$, $NP // AB$, $QP // CD$.

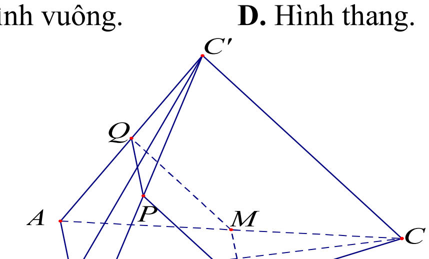
Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN \perp MQ\,(do\ AB \perp CD)$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 89. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Hướng dẫn



Chọn B.

Vì M, N, P, Q nên dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi H là trung điểm của AB.

Vì hai tam giác ABC và ABC' nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

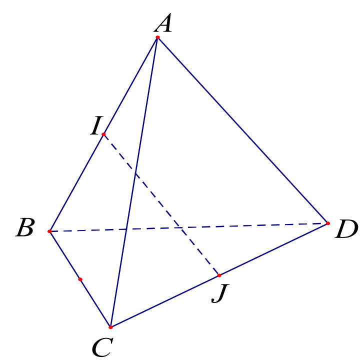
Ta có: $\begin{cases} PQ//AB \\ PN//CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 90. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$

A. 120° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 45°

Hướng dẫn

Chọn B.



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60°$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 91. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn khẳng định đúng

A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2\left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

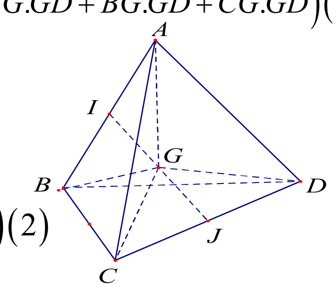
Hướng dẫn

Chọn B.

$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$

$= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$

$= 3AG^2 + 3BG^2 + 3CG^2 + 3DG^2 + 2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(1)$



Lại có:

$\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0}$

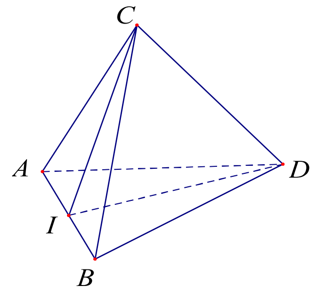
$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

$= 2\left(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD}\right)(2)$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 92. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là

A. $120°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$



Hướng dẫn

Chọn C.

Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều

Nên $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$. Suy ra $AB \perp (CID) \Rightarrow AB \perp CD$.

Câu 93. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Tứ diện có ít nhất một mặt là tam giác nhọn **B.** Tứ diện có cả bốn mặt là tam giác nhọn

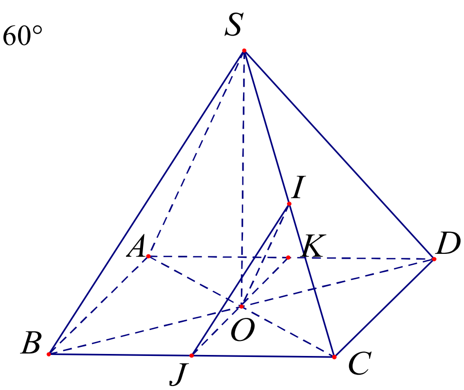
C. Tứ diện có ít nhất hai mặt là tam giác nhọn **D.** Tứ diện có ít nhất ba mặt là tam giác nhọn

Hướng dẫn

Chọn A.

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. $90°$ **B.** $45°$ **C.** $30°$ **D.** $60°$



Hướng dẫn

Chọn D.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $OJ // CD$.

Nên góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ.

Xét tam giác IOJ có

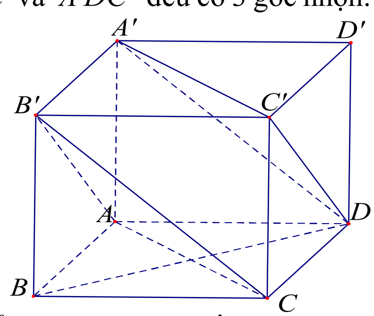
$IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}, OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2},\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$.

Nên tam giác IOJ đều.

Vậy góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ bằng góc $\widehat{IJO} = 60^0$.

Câu 95. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây

A. $\widehat{AB'C}$ **B.** $\widehat{DA'C'}$ **C.** $\widehat{BB'D}$ **D.** $\widehat{BDB'}$



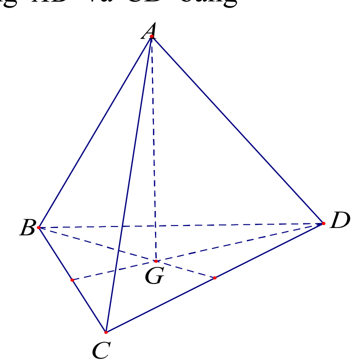
Hướng dẫn

Chọn B.

Ta có: $AC // A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $A'D$ và bằng góc nhọn $\widehat{DA'C'}$ (Vì tam giác $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn).

Câu 96. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$



Hướng dẫn

Chọn C.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AG \\ CD \perp BG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABG) \Rightarrow CD \perp AB$.

Vậy số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90^0

Câu 97. Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian , hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

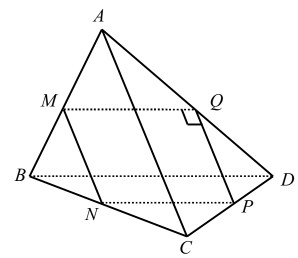
Câu 98. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Thiết diện là hình chữ nhật. **B.** Thiết diện là hình vuông.

C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình thang.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gỉa sử thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $MN//PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp PQ$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 99. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không

Sau đây là lời giải:

Bước 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = .\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$

Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.

Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

A. Sai ở bước 3. **B.** Đúng **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 1.

Hướng dẫn giải:

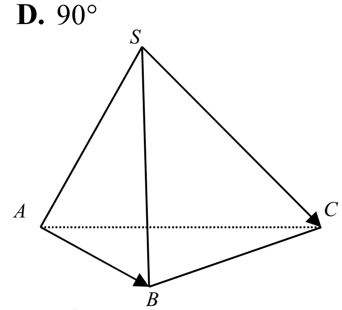
Chọn B.

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$

A. $120°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

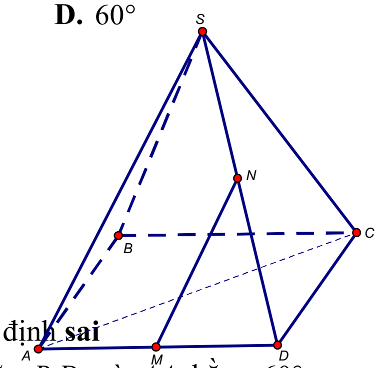
$= SA.SB\cos\widehat{BSC} - SC.SA.\cos\widehat{ASC} = 0$

Vì $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC}$

Do đó: $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 90^0$.

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$



Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

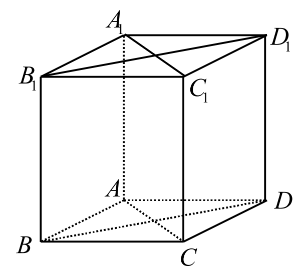
Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90°$

$\Rightarrow \left(MN, SC\right) = 90°$

Câu 102. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **sai**

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng $90°$. **B.** Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng $60°$.

C. Góc giữa AD và B_1C bằng $45°$. **D.** Góc giữa BD và A_1C_1 bằng $90°$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$

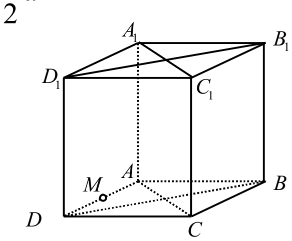
$= \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} = 0$

(vì $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}\right) = 90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$)

Do đó: $\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1D_1}\right) = 90^0 \Rightarrow \left(AA_1, B_1D_1\right) = 90^0$

Câu 103. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là

A. $\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{3}{4}a^2$. **D.** $\dfrac{3}{2}a^2$.



Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

Câu 104. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**

A. $A'C' \perp BD$ **B.** $BB' \perp BD$ **C.** $A'B \perp DC'$ **D.** $BC' \perp A'D$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB'}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}$

$= BB'.BA\left(\cos\widehat{B'BA} + \cos\widehat{B'BC}\right)$

Vì $AA'B'B$ và $ABCD$ là hai hình thoi bằng nhau nên

+ $\widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} \Rightarrow \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD} \neq 0$ suy ra BB' không vuông góc với BD

+ $\widehat{B'BA} + \widehat{B'BC} = 180^0 \Rightarrow \cos\widehat{B'BA} = -\cos\widehat{B'BC} \Rightarrow \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BD} = 0$ suy ra $BB' \perp BD$

Nên đáp án B có thể sai vì chưa có điều kiện của góc $\widehat{B'BA}$ và $\widehat{B'BC}$

Câu 105. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

B. Cho ba đường thẳng $a,\ b,\ c$ vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c

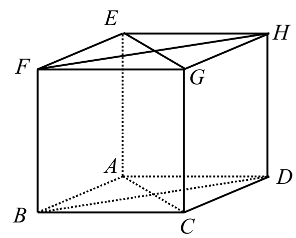
C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(a,\ b)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 106. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$



A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

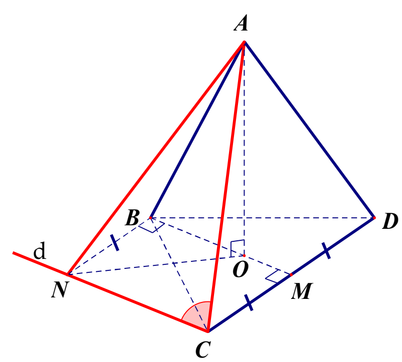
$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45°$

Câu 107. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\alpha=60^0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi O là trọng tâm của ΔBCD $\Rightarrow AO\perp(BCD)$

Trên đường thẳng d qua C và song song BM lấy điểm N sao cho $BMCN$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra:

$\left(\widehat{AC,BM}\right)=\left(\widehat{AC,CN}\right)=\left(\widehat{ACN}\right)=\alpha$

Có: $CN=BM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $BN=CN=\dfrac{a}{2}$

$AO^2=AB^2-BO^2=AB^2-\left(\dfrac{2}{3}BM\right)^2=\dfrac{2}{3}a^2$

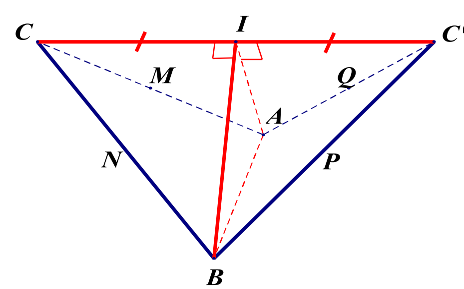
$ON^2=BN^2+BO^2=\dfrac{7}{12}a^2$; $AN=\sqrt{AO^2+ON^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{AC^2+CN^2-AN^2}{2AC.CN}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 108. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$

A. 45^0 **B.** 120^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi I là trung điểm CC'

$\Delta CAC'$ cân tại A $\Rightarrow CC'\perp AI$ (1)

$\Delta CBC'$ cân tại B $\Rightarrow CC'\perp BI$ (2)

$\xrightarrow{(1),(2)} CC'\perp(AIB)\Rightarrow CC'\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}$

Kết luận: góc giữa $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{AB}$ là $90°$

Câu 109. Cho $\vec{a}=3,\ \vec{b}=5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng đính sau

A. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}$ **B.** $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$ **C.** $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{139}$ **D.** $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=9$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

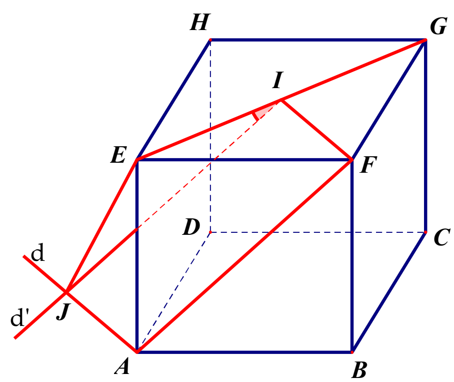
Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=19$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}.cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=19$

Câu 110. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Đặt cạnh của hình lập phương trên là a

Gọi I là giao trung điểm EG

Qua A kẻ đường thẳng $d//FI$

Qua I kẻ đường thẳng $d'//FA$

Suy ra d cắt d' tại J.

Từ đó suy ra $\left(\widehat{\overrightarrow{EG},\overrightarrow{AF}}\right)=\widehat{EIJ}=\alpha$

$IJ=AF=2EI=2FI=2AJ=a\sqrt{2}$

$EJ^2=AE^2+AJ^2=\dfrac{3}{2}$

$\cos\alpha=\left|\dfrac{EI^2+IJ^2+AJ^2}{2.EI.EJ}\right|=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60°$

Câu 111. Trong không gian cho ba điểm $A,\ B,\ C$ bất kỳ, chọn đẳng thức đúng

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-BC^2$ **B.** $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-2BC^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-BC^2$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\left(AB,AC\right)=AB^2+AC^2-2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Câu 112. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

A. $a^2\sqrt{3}$ **B.** a^2 **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a^2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải.

Chọn B. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

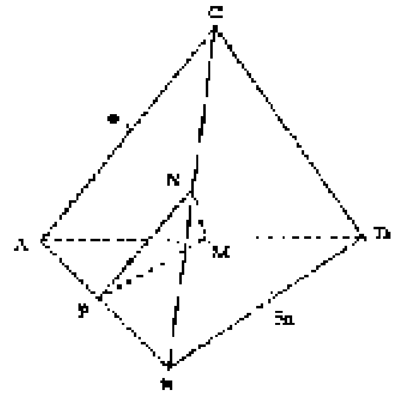
Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$

Câu 113. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a,\ BD=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN

A. $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ **C.** $MN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $MN=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Kẻ $NP//AC\ (P \in AB)$, nối MP.

NP là đường trung bình $\Delta ABC \Rightarrow PN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.

MP là đường trung bình $\Delta ABD \Rightarrow PM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3a}{2}$.

Lại có $(AC, BD) = (PN, PM) = \overline{NPM} = 90°$ suy ra

$\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại P.

Vậy $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 114. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

D. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng

Hướng dẫn giải

Chọn B.

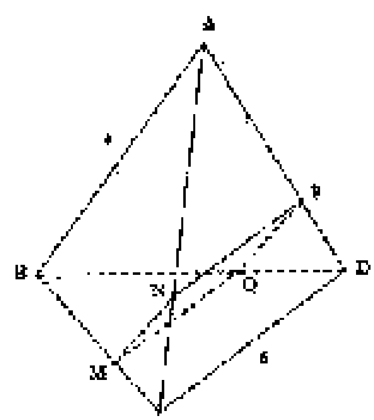
Gọi d_1, d_2, d_3 là 3 đường thẳng cắt nhau từng đôi một. Giả sử d_1, d_2 cắt nhau tại A, vì d_3 không nằm cùng mặt phẳng với d_1, d_2 mà d_3 cắt d_1, d_2 nên d_3 phải đi qua A. Thật vậy giả sử d_3 không đi qua A thì nó phải cắt d_1, d_2 tại hai điểm B, C điều này là vô lí, một đường thẳng không thể cắt một mặt phẳng tại hai điểm phân biệt.

Câu 115. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là $60°$ và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $(AB, CD) = (QM, MP) = \widehat{QMP} = 60°$.

Suy ra $S_{MPNQ} = QN.QN.\sin 60°$.

Lại có

$\Delta CMQ \# \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{AB} = \dfrac{MO}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2$

$\Delta AQN \# \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{QN}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow QN = 2$

Do đó $S_{MPNQ} = QM.QN.\sin 60° = 2.2.\sin 60° = 2\sqrt{3}$.

Câu 116. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là

A. 5 **B.** 6 **C.** $\frac{17}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\left(AB,CD\right)=\left(MN,MQ\right)=\widehat{NMQ}=90°$. Suy ra thiết diện $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có: $\Delta CMN \,\#\, \Delta CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3}$

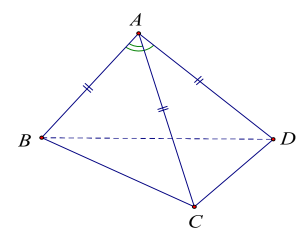
$\Delta ANP \,\#\, \Delta ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4$. Suy ra $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}$.

Câu 117. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $120°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0=0$

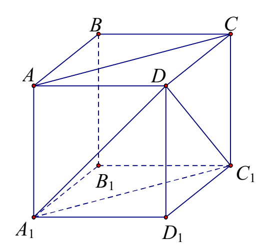
$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^0$

Câu 118. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là

A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $120°$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Vì $A'C'//AC$ nên góc giữa AC và DA_1 là $\widehat{DA_1C_1}$.

Vì tam giác DA_1C_1 đều nên $\widehat{DA_1C_1}=60^0$.

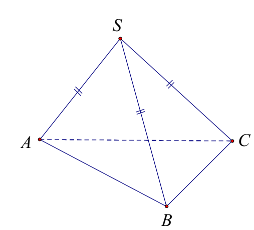
Vậy góc giữa AC và DA_1 bằng 60^0.

Câu 119. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$

A. $120°$ **B.** $90°$ **C.** $60°$ **D.** $45°$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$=SA.SC.\cos\widehat{ASC}-SA.SB.\cos\widehat{ASB}=0$

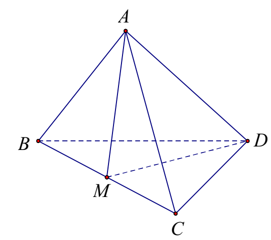
$\Rightarrow\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$

Câu 120. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AM.\cos 30^0-AB.AD.\cos 60^0$

$$=a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}.$$

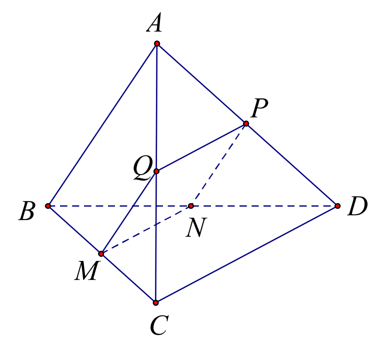
Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 121. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $\left(0<x<1\right)$. mp$\left(P\right)$ song song với AB và CD lần lượt cắt BC,DB,AD,AC tại M,N,P,Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu

A. 9 **B.** 11 **C.** 10 **D.** 8

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB\perp CD\Rightarrow MQ\perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{CM}{CB}=x\Rightarrow MQ=x.AB=6x$.

Theo giả thiết $MC=x.BC\Rightarrow BM=\left(1-x\right)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\dfrac{MN}{CD}=\dfrac{BM}{BC}=1-x\Rightarrow MN=\left(1-x\right).CD=6\left(1-x\right)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

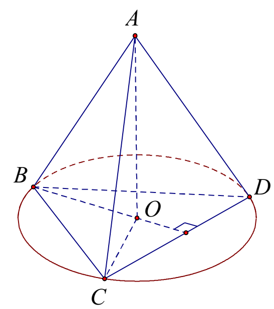
$$S_{MNPQ}=MN.MQ=6\left(1-x\right).6x=36.x.\left(1-x\right)\le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2=9\ .$$

Ta có $S_{MNPQ}=9$ khi $x=1-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 122. Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu

A. $0°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

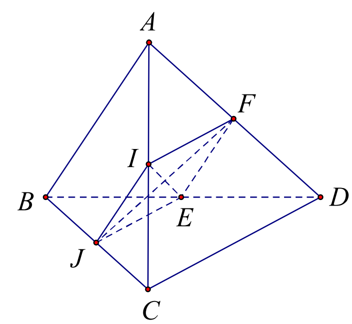
$= \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CO.CD.\cos 30^0 - CA.CD.\cos 60^0$

$= \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = 0.$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 123. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc $\left(IE,\ JF\right)$ bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$ mà $AB = CD$ nên $IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi.

Suy ra $\left(IE,\ JF\right) = 90^0$.

Câu 124. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

C. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Nếu đường thẳng c vuông góc với a và b thì a, b, c không đồng phẳng.

D. Cho hai đường thẳng a và b song song, nếu a vuông góc với c thì b cũng vuông góc với c.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 125. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải

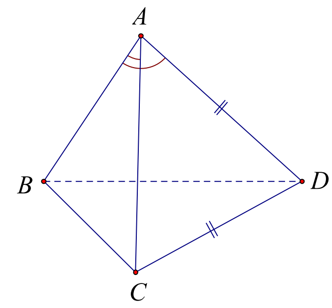
Chọn D. Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 126. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0$

$=AB.AD.\dfrac{1}{2}-AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}AB.AD=-\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{4}AB.CD}{AB.CD}=-\dfrac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Câu 127. Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Tứ giác $CDD'C'$ là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tứ giác $CDD'C'$ là hình bình hành. Lại có: $DC\perp\left(ADD'\right)\Rightarrow DC\perp DD'$.

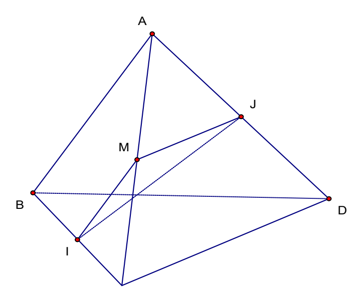
Vậy tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Câu 128. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, IJ=$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I,J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi M là trung điểm của AC.

Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MI và MJ.

Tính được: $\cos IMJ=\dfrac{IM^2+MJ^2-IJ^2}{2MI.MJ}=-\dfrac{1}{2}$

Từ đó suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 60^0.

Câu 129. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC$, $AB\perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Hướng dẫn giải

Chọn A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}\Rightarrow AB\perp PQ$

Câu 130. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30°$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60°$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{9}{2}$. Do đó: $\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{3}{8}$.

Câu 131. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = k$$

A. $k=1$. **B.** $k=2$. **C.** $k=0$. **D.** $k=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

Câu 132. Trong không gian cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chọn hệ thức đúng

A. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

B. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$.

C. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

D. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1

Ta có $\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = 0$

$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + \left(GA^2 + GB^2 - AB^2\right) + \left(GA^2 + GC^2 - AC^2\right) + \left(GB^2 + GC^2 - BC^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ GA = \dfrac{2}{3}MA \end{cases} \Rightarrow GA^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right).$$

Tương tự ta suy ra được

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} + \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} + \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}\right).$$

$$= \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right).$$

$\Leftrightarrow 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) = AB^2 + BC^2 + CA^2$

Cách 3: Chuẩn hóa giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 1. Khi đó

$$\begin{cases} AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3 \\ GA^2 + GB^2 + GC^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) = AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

Câu 133. Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. M là trọng tâm tam giác ABC.

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. M là trực tâm tam giác ABC.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải
Chọn A.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$P=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\geq GA^2+GB^2+GC^2.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv G.$

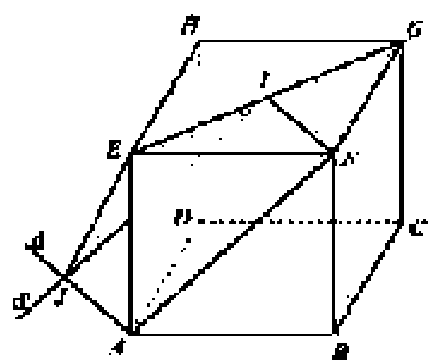
Vậy $P_{\min}=GA^2+GB^2+GC^2$ với $M\equiv G$ là trọng tâm tam giác $ABC.$

Câu 134. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 120^0

Hướng dẫn giải:

Chọn B. Đặt cạnh của hình lập phương trên là a. Gọi I là giao trung điểm EG. Qua A kẻ đường thẳng $d//FI$. Qua I kẻ đường thẳng $d'//FA$. Suy ra d cắt d' tại J. Từ đó suy ra $\left(\widehat{\overrightarrow{EG},\overrightarrow{AF}}\right)=\widehat{EIJ}=\alpha$



$IJ=AF=2EI=2FI=2AJ=a\sqrt{2}$

$EJ^2=AE^2+AJ^2=\dfrac{3}{2}$

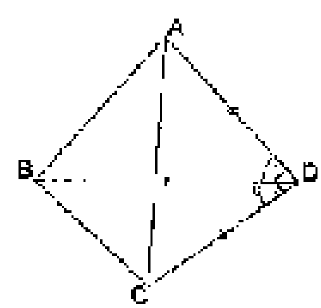
$\cos\alpha=\left|\dfrac{EI^2+IJ^2+AJ^2}{2.EI.EJ}\right|=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60°$

Câu 135. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC$ và $\widehat{BDA}=60^0,\widehat{ADC}=90^0,\widehat{BDC}=120^0$. Trong các mặt của tứ diện đó

A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất. **B.** Tam giác BCD có diện tích lớn nhất.
C. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất. **D.** Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải
Chọn D.

Đặt $DA=DB=DC=a$



Tam giác ABD đều cạnh a nên diện tích $S_{ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ACD vuông tại D nên diện tích $S_{ACD}=\dfrac{1}{2}DA.DC=\dfrac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác BCD là $S_{BCD}=\dfrac{1}{2}DB.DC\sin120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABC có $AB=a, AC=a\sqrt{2}, BC=a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông tại A. Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu 136. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải

Chọn D. Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 137. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng

A. Cho hai đường thẳng $a,\ b$ song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a,b).

B. Cho ba đường thẳng $a,\ b,\ c$ vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c .

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c.

D. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c .

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 138. Cho hai đường thẳng phân biệt $a,\ b$ và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b//a$.
B. Nếu $b//(P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b//a$ thì $b \perp (P)$.
D. Nếu $b \perp a$ thì $b//(P)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 139. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a}.\vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng

A. $\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{15}}$.
B. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$.
C. $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$.
D. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\vec{x}.\vec{y} = (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a}.\vec{b} = 4$.

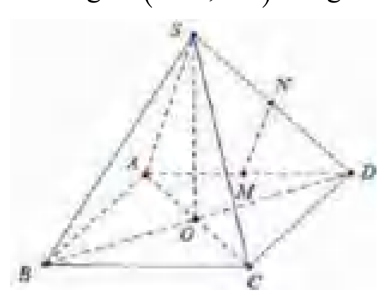
$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a}.\vec{b}} = 2\sqrt{3}$.

$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{5}$.

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 140. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a* và các cạnh bên đều bằng *a*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AD* và *SD.* Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°



Chọn đáp án D

Do *MN* là đường trung bình trong tam giác *SAD*

Do đó $MN//SA$ suy ra $\widehat{(MN, SC)} = \widehat{(SA, AC)}$

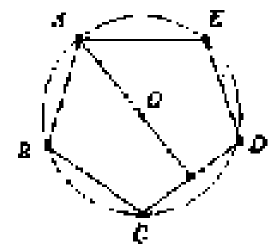
Lại có $SA = SC = a; AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{ASC} = 90° = \widehat{(SA, AC)}$

Do đó $\widehat{(MN, SC)} = 90°$.

Câu 141. Cho hình chóp ngũ giác đều *S.ABCDE*. Góc giữa cạnh bên *SA* và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là

A. 36° **B.** 54° **C.** 60° **D.** 90°

Chọn đáp án D



Gọi *O* là tâm ngũ giác đều *ABCDE* suy ra $SO \perp (ABCDE)$

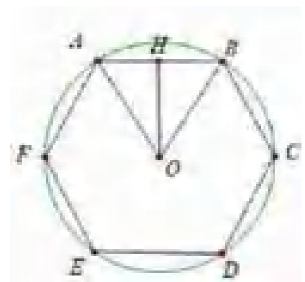
Lại có $\begin{cases} OC = OD \\ AC = AD \end{cases} \Rightarrow OA \perp CD$,

Mặt khác $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOA) \Rightarrow SA \perp CD$ do đó góc giữa cạnh bên *SA* và các cạnh đáy có số đo lớn nhất là 90°.

Câu 142. Cho hình chóp lục giác đều *S.ABCDE* có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *O* là hình chiếu của *S* lên mặt đáy và $SO = a$. Góc giữa cạnh bên *SA* và các cạnh đáy có số đo nhỏ nhất là

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Chọn đáp án B



Ta có: $\widehat{AOB} = \frac{360°}{6} = 60° \Rightarrow OAB$ là tam giác đều.

Khi đó gọi *H* là trung điểm của *AB* $\Rightarrow AH = \frac{a}{2}; OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \tan\widehat{SAH} = 1 \Rightarrow \widehat{SAH} = 45°$

Khi đó góc giữa cạnh bên *SA* và các cạnh đáy có số đo nhỏ nhất là góc $\widehat{SAB}$ và bằng 45°.

Câu 143. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**

Cho các tam giác đều *ABC*, *ABD* và *ABE*, trong đó *ABC* và *ABD* cùng thuộc một mặt phẳng còn *ABE* không thuộc mặt phẳng đó. Gọi *I* là trung điểm của *AB*, ta có

A. *CE* vuông góc với *DE*. **B.** *CD* vuông góc với *AB*.

C. *BE* vuông góc với *AE*. **D.** *AB* vuông góc với *EI*.

Chọn đáp án C

Câu 144. Nếu đường thẳng *d* có vectơ chỉ phương là $\vec{u} \neq 0$ thì

A. đường thẳng đó chỉ có một vectơ chỉ phương duy nhất là $\vec{u}$.

B. đường thẳng đó có đúng hai vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và $-\vec{u}$.

C. đường thẳng đó có thêm một vectơ chỉ phương nữa là $k\vec{u}$, với $k \neq 0$.

D. đường thẳng đó có vô số vectơ chỉ phương là $k\vec{u}$, với $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D

Câu 145. Hãy cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**

A. Một đường thẳng *d* hoàn toàn xác định khi biết hai điểm *A*, *B* (phân biệt) thuộc *d*..

B. Một đường thẳng *d* hoàn toàn xác định khi biết một vectơ chỉ phương của *d*.

C. Một đường thẳng *d* hoàn toàn xác định khi biết một điểm *A* thuộc *d* và biết *d* song song với một đường thẳng *a*.

D. Một đường thẳng *d* hoàn toàn xác định khi biết một điểm *A* thuộc *d* và biết đường thẳng *d* vuông góc với một đường thẳng *a*.

Chọn đáp án B

Câu 146. Hãy cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**. Hai đường thẳng vuông góc nếu

A. góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng là 90^0.

B. góc giữa hai đường thẳng đó là 90^0.

C. tích vô hướng giữa hai vectơ chỉ phương của chúng là bằng 0.

D. góc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng là 0^0.

Chọn đáp án D

Câu 147. Trong không gian

A. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì giá của hai vectơ đó song song với nhau.

B. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì giá của hai vectơ đó trùng nhau.

C. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì hai vectơ đó cùng phương.

D. nếu góc giữa hai vectơ bằng 180^0 thì hai vectơ đó cùng hướng.

Chọn đáp án C

Câu 148. Nếu $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ thì

A. góc giữa hai vectơ luông bằng 180^0.

B. góc giữa hai vectơ luôn bằng 0^0.

C. hai vectơ đó luôn cùng phương.

D. Hai vectơ đó luôn cùng hướng.

Chọn đáp án C

Câu 149. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành, hai đường chéo *AC*, *BD* cắt nhau tại *O* và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó

A. *AC* vuông góc với *BD*.

B. *SO* vuông góc với *AC*.

C. *SO* vuông góc với *BD*.

D. *SO* vuông góc với (*ABCD*).

Chọn đáp án A

Câu 150. Cho biết khẳng định nào sau đây là **sai**

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành, hai đường chéo *AC*, *BD* cắt nhau tại *O* và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó

A. $OA \neq OB = OC = OD$.

B. $OA = OB \neq OC = OD$.

C. $OA = OB = OC \neq OD$.

D. $OA = OB = OC = OD$.

Chọn đáp án D

Câu 151. Cho hai tam giác cân chung đáy là *ABC* và *ABD* và không cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó

A. *AB* vuông góc với *CD*.

B. *AC* vuông góc với *BD*.

C. *AD* vuông góc với *BC*.

D. các cặp cạnh đối của tứ diện *ABCD* vuông góc với nhau.

Chọn đáp án A.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa $d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (P)$

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $\begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$

3. Tính chất

- Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

- $\begin{cases} a /\!/ b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$
- $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P), b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a /\!/ b$
- $\begin{cases} (P) /\!/ (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \neq (Q) \\ (P) \perp a, (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) /\!/ (Q)$
- $\begin{cases} a /\!/ (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$
- $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a /\!/ (P)$

4. Định lí ba đường vuông góc

Cho $a \not\perp (P), b \subset (P)$, a′ là hình chiếu của a trên (P). Khi đó $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu $d \perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = 90^0$.
- Nếu $d \not\perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{d,d'}\right)$ với d′ là hình chiếu của d trên (P).

Chú ý: $0^0 \leq \left(\widehat{d,(P)}\right) \leq 90^0$.

6. Phương pháp chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và đường thẳng vuông góc với đường thẳng

Để chứng minh đường thẳng $d \perp (\alpha)$ ta có thể dùng một trong hai cách sau:

Cách 1. Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau trong (α).

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$

Cách 2. Chứng minh d vuông góc với đường thẳng a mà a vuông góc với (α).

$$\begin{cases} d \parallel a \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$

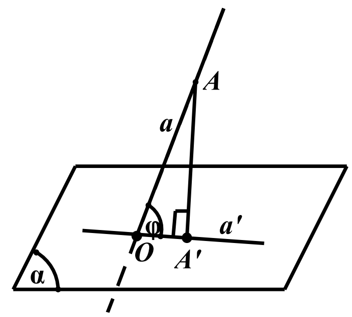
Cách 3. Chứng minh d vuông góc với (Q) và (Q) // (P).

Để chứng minh d $\perp$ a, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh d vuông góc với (P) và (P) chứa a.
- Sử dụng định lí ba đường vuông góc.
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

7. Phương pháp tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau



Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$

Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)

Góc $\widehat{AOA'} = \varphi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).

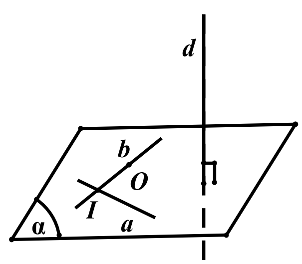
Lưu ý:

Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó $AA' \parallel b$.

Để tính góc φ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc φ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\varphi = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{n}\right|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vectơ có giá vuông góc với (α).

8. Phương pháp tìm thiết diện và bài toán liên quan

Để xác định thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d với một hình chóp ta thực hiện theo một trong hai cách sau:



Cách 1. Tìm tất cả các đường thẳng vuông góc với d, khi đó (α) sẽ song song hoặc chứa các đường thẳng này và ta chuyển về dạng thiết diện song song đã biết.

Cách 2. Ta tìm mặt phẳng (α) như sau:

Kẻ hai đường thẳng a, b cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có một đường thẳng đi qua O, khi đó (α) chính là mặt phẳng $mp(a,b)$.

CÂU HỎI TNKQ

Câu 1. Cho hai đường thẳng phân biệt $a,\ b$ và mặt phẳng $\left(P\right)$, trong đó $a\perp\left(P\right)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**

A. Nếu $b\perp\left(P\right)$ thì $b//a$.

B. Nếu $b//\left(P\right)$ thì $b\perp a$.

C. Nếu $b//a$ thì $b\perp\left(P\right)$.

D. Nếu $b\perp a$ thì $b//\left(P\right)$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn D.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước

A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn D.

Qua điểm O có thể dựng vô số đường thẳng vuông góc với Δ, các đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với Δ.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **có thể sai**

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn C.

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song chỉ đúng khi ba đường thẳng đó đồng phẳng.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Nếu đường thẳng $d\perp\left(\alpha\right)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong $\left(\alpha\right)$.

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong $\left(\alpha\right)$ thì $d\perp\left(\alpha\right)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong $\left(\alpha\right)$ thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong $\left(\alpha\right)$.

D. Nếu $d\perp\left(\alpha\right)$ và đường thẳng $a//\left(\alpha\right)$ thì $d\perp a$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn B.

Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong $\left(\alpha\right)$ thì $d\perp\left(\alpha\right)$ chỉ đúng khi hai đường thẳng đó cắt nhau.

Câu 5. Trong không gian tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là

A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

B. Đường trung trực của đoạn thẳng AB

C. Đường thẳng qua A và vuông góc với AB

D. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn A.

Theo định nghĩa mặt phẳng trung trực.

Câu 6. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ cho trước

A. Vô số B. 3 C. 2 D. 1

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn A.

Câu 7. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn A.

Theo tiên đề qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ

Câu 8. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mp (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Hướng dẫn giải: Chọn D.

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P). (*ĐN đường thẳng vuông góc với mặt phẳng*).

Câu 9. Cho a,b,c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai**

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b // (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a // b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a,c).

Hướng dẫn giải: Chọn A.

Nếu $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases}$ thì a và c có thể trùng nhau nên đáp án A sai.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Hướng dẫn giải: Chọn D.

Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 11. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $a \parallel b$ thì $b \parallel (P)$.

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 12. Cho hai đường thẳng a,b và $mp(P)$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$.

B. Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Hướng dẫn giải: Chọn B.

Câu A sai vì b có thể vuông góc với a.

Câu B đúng bởi $a // (P) \Rightarrow \exists a' \subset (P)$ sao cho $a // a'$, $b \perp (P) \Rightarrow b \perp a'$. Khi đó $\Rightarrow a \perp b$.

Câu C sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu D sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu 13. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mp chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.
C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 14. Tập hợp các điểm cách đều các đỉnh của một tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó và đi qua
A. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. B. Trọng tâm tam giác đó.
C. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. D. Trực tâm tam giác đó.

Câu 15. Mệnh đề đúng trong các mặt phẳng sau
A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
Hướng dẫn giải: Chọn D.
Đáp án A sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau.
Đáp án B sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.
Đáp án C sai vì hai đường thẳng đó có thể trùng nhau.

Câu 16. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau
A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mp thì song song với nhau.
B. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
C. Cho hai mp song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt mp này thì cũng vuông góc với mp kia.
D. Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
Hướng dẫn giải:
Qua một đường thẳng dựng được vô số mặt phẳng

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**
A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P).
B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P).
C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.
D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.
Hướng dẫn giải: Chọn A.
Giả sử xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ có $\begin{cases} A'B'//(ABCD) \\ B'C' \perp A'B' \end{cases}$ nhưng $B'C'//(ABCD)$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng

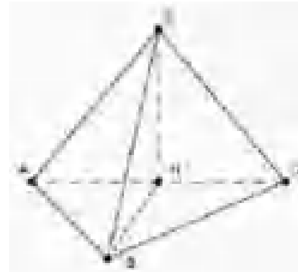
A. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.
B. H trùng với trực tâm tam giác ABC.
C. H trùng với trung điểm của AC.
D. H trùng với trung điểm của BC.

Hướng dẫn giải: Chọn C.

Do $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$.

Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà ΔABC vuông tại B nên H là trung điểm của AC.

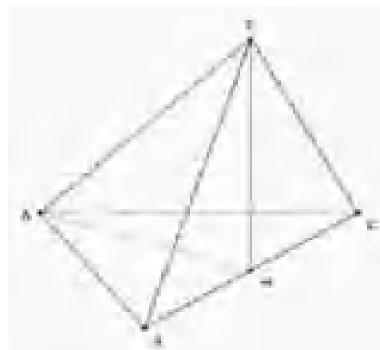


Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Tìm khẳng định **sai**

A. $(SBH)\cap(SCH) = SH$.
B. $(SAH)\cap(SBH) = SH$.
C. $AB \perp SH$.
D. $(SAH)\cap(SCH) = SH$.

Hướng dẫn giải: Chọn A.

$$(SBH)\cap(SCH) = (SBC)$$



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau $SA = SB = SC = SD$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $HA = HB = HC = HD$.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
C. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.
D. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy $ABCD$ những góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải: Chọn B.

Vì hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau $SA = SB = SC = SD$ và H là hình chiếu của S lên mặt đáy $ABCD$. Nên H tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$

Suy ra $HA = HB = HC = HD$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Các đường thẳng AH, SK, BC thỏa mãn:

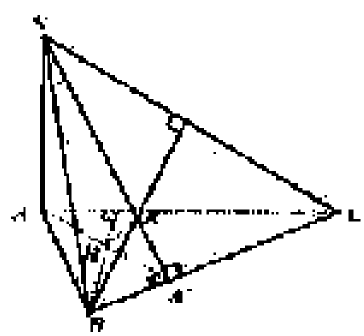
A. Đồng quy.
B. Đôi một song song.
C. Đôi một chéo nhau.
D. Đáp án khác.

Hướng dẫn giải:

Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AA' \perp BC$ mà

$BC \perp SA$ nên $BC \perp SA'$



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu H của S trên (ABC) là

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. Trọng tâm tam giác ABC. D. Giao điểm hai đường thẳng AC và BD.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S lên các cạnh AB, AC, BC.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh $AB, AC, BC \Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} \Rightarrow \Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SPH$.

$\Rightarrow HM = HN = NP \Rightarrow H$ là tâm dường tròn nội tiếp của ΔABC.

Câu 23. Cho hình chóp đều, chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A. Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đa giác đáy đó.

B. Tất cả những cạnh của hình chóp đều bằng nhau.

C. Đáy của hình chóp đều là miền đa giác đều.

D. Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

Hình chóp đều có thể có cạnh bên và cạnh đáy KHÔNG bằng nhau nên đáp án B sai.

Câu 24. Tính chất nào sau đây không phải là tính chất của hình lăng trụ đứng

A. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình bình hành.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật.

C. Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng bằng nhau và song song với nhau.

D. Hai đáy của hình lăng trụ đứng có các cạnh đôi một song song và bằng nhau.

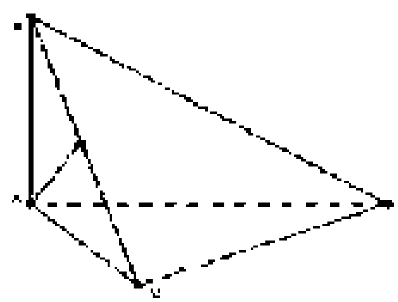
<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn A.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và ΔABC vuông ở B, AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SA \perp BC$. B. $AH \perp BC$.

C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn C.



Do $SA \perp (ABC)$ nên câu A đúng.

Do $BC \perp (SAB)$ nên câu B và D đúng.

Vậy câu C sai.

Câu 26. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$

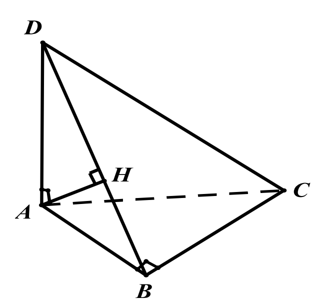
a) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**. Chứng minh $BC \perp (SAB)$

A. $BC \perp (SAB)$ B. $BC \perp (SAC)$ C. $\left(\widehat{AD, BC}\right) = 45^0$ D. $\left(\widehat{AD, BC}\right) = 80^0$

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB, thì khẳng định nào sau đây **đúng nhất**. Chứng minh $AH \perp SC$

A. $AH \perp AD$ B. $AH \perp SC$ C. $AH \perp (SAC)$ D. $AH \perp AC$

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>.



a) Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

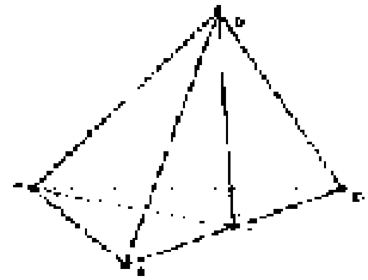
Do đó $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ Chọn A

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp SC$ .Chọn B

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng

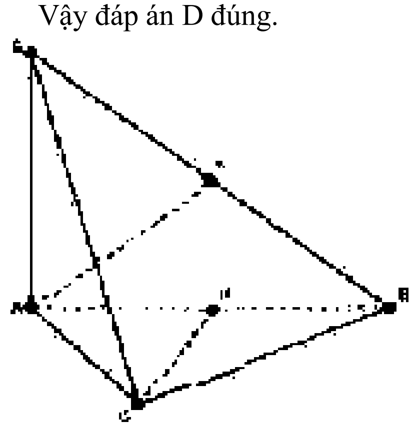
A. $AB\perp(ABC)$.   B. $AC\perp BD$.   C. $CD\perp(ABD)$.   D. $BC\perp AD$.



Hướng dẫn giải:
Chọn D.

Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\begin{cases}AE\perp BC\\DE\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(ADE)\Rightarrow BC\perp AD$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $AB\perp BC$. Số các mặt của tứ diện $S.ABC$ là tam giác vuông là:
A. 1   B. 2   C. 3   D. 4
Hướng dẫn giải:
Có $AB\perp BC\Rightarrow\Delta ABC$ là tam giác vuông tại B.
Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB\\SA\perp AC\end{cases}\Rightarrow\Delta SAB,\Delta SAC$ là các tam giác vuông tại A.
Mặt khác $\begin{cases}AB\perp BC\\SA\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow\Delta SBC$ là tam giác vuông tại B.
Vậy bốn mặt của tứ diện đều là tam giác vuông. Nên đáp án D đúng.
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA=SC$ và $SB=SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**
A. $SO\perp(ABCD)$.   B. $CD\perp(SBD)$.   C. $AB\perp(SAC)$.   D. $CD\perp AC$.
Hướng dẫn giải:
Chọn B.
Tam giác SAC cân tại S có SO là trung tuyến $\Rightarrow SO$ cũng là đường cao $\Rightarrow SO\perp AC$.
Tam giác SBD cân tại S có SO là trung tuyến $\Rightarrow SO$ cũng là đường cao $\Rightarrow SO\perp BD$.
Từ đó suy ra $SO\perp(ABCD)$.
Do $ABCD$ là hình thoi nên CD không vuông góc với BD. Do đó CD không vuông góc với (SBD).
Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$. Gọi $AE;AF$ lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau
A. $SC\perp(AFB)$.   B. $SC\perp(AEC)$.   C. $SC\perp(AED)$.   D. $SC\perp(AEF)$.
Hướng dẫn giải:
Ta có: $\begin{cases}AB\perp BC\\SA\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AE$. Vậy: $\begin{cases}AE\perp SB\\AE\perp BC\end{cases}\Rightarrow AE\perp SC(1)$
Tương tự : $AF\perp SC(2)$.   Từ $(1);(2)\Rightarrow SC\perp(AEF)$.   Vậy đáp án D đúng.
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**
A. $CH\perp SA$.   B. $CH\perp SB$.
C. $CH\perp AK$.   D. $AK\perp SB$.



<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn D.

Do ΔABC cân tại C nên $CH \perp AB$. Suy ra $CH \perp (SAB)$.

Vậy các câu A, B, C đúng nên D sai.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $CD \perp BD$. B. $AC = BD$. C. $AB = CD$. D. $AB \perp CD$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>:

$\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$ $\rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây **có thể sai**

A. $CH \perp AK$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp SA$. D. $AK \perp SB$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Từ đó suy ra $CH \perp AK, CH \perp SB, CH \perp SA$ nên A, B, C đúng.

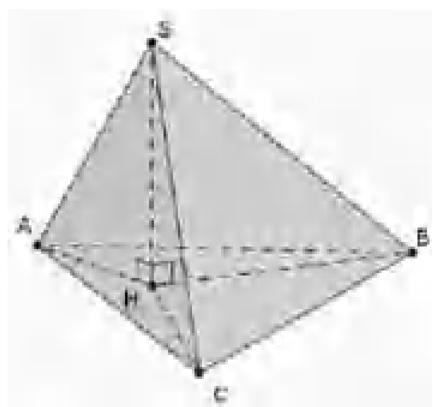
Đáp án D sai trong trường hợp SA và AB không bằng nhau $\rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 34. Cho tứ diện $SABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Đối với ΔABC ta có điểm H là

A. Trực tâm. B. Tâm đường tròn nội tiếp.

C. Trọng tâm. D. Tâm đường tròn ngoại tiếp.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



$SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AH \\ SH \perp BH \\ SH \perp CH \end{cases}$

Xét ba tam giác vuông $\Delta SHA, \Delta SHB, \Delta SHC$ có

$\begin{cases} SA = SB = SC \\ SH \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$ mà $H \in (ABC) \Rightarrow H$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Chọn đáp án D.

Câu 35. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên $mp(ABC)$. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau

A. H là trực tâm ΔABC. B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$. D. CH là đường cao của ΔABC.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>:

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ và $OH \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Tương tự, ta có $AB \perp CH$, suy ra đáp án A, D đúng.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$, với $I = AH \cap BC$, suy ra đáp án C đúng.

$\rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $mp(BCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. H là trực tâm tam giác BCD. B. $CD \perp (ABH)$.
C. $AD \perp BC$. D. Các khẳng định trên đều sai.

Hướng dẫn giải::

Ta có $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$. Tương tự $BD \perp CH$

Suy ra H là trực tâm ΔBCD. Suy ra đáp án A, B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$, suy ra C đúng. $\rightarrow$ Chọn đáp án D.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $AB \perp (ABC)$. B. $BC \perp AD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $AC \perp BD$.

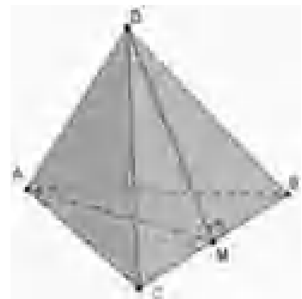
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC.

$\begin{cases} AB = AC \\ DB = DC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp DM \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow BC \perp AD.$

Chọn đáp án B.



Câu 38. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau

A. $BC \perp (SAH)$. B. $HK \perp (SBC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. SH, AK *và* BC đồng quy.

Hướng dẫn giải: Chọn đáp án C.

Ta có $BC \perp SA, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Ta có $CK \perp AB, CK \perp SA \Rightarrow CK \perp (SAB)$ *hay* $CK \perp SB$

Mặt khác có $CH \perp SB$ *nên suy ra* $SB \perp (CHK)$ hay $SB \perp HK$,

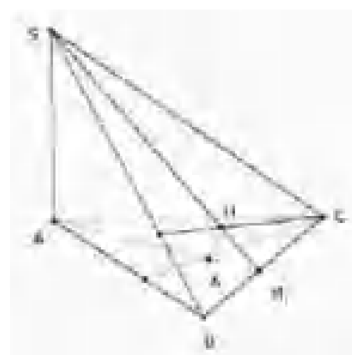
tương tự $SC \perp HK$ nên $HK \perp (SBC)$

Gọi M là giao điểm của SH và BC. Do

$BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$ hay đường thẳng

AM trùng với đường thẳng AK. Hay SH, AK *và* BC đồng quy.

Do đó $BC \perp (SAB)$. sai



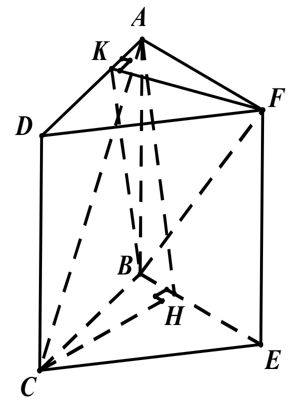
Câu 39. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường thẳng AC và BF vuông góc với nhau. Gọi CH và FK lần lượt là đường cao của hai tam giác BCE và ADF.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng về 2 tam giác ΔACH và ΔBFK

A. ΔACH và ΔBFK là các tam giác vuông B. ΔACH và ΔBFK là các tam giác tù
C. ΔACH và ΔBFK là các tam giác nhọn D. ΔACH và ΔBFK là các tam giác cân

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $BF \perp AH$ B. $\left(\widehat{BF, AH}\right) = 45^0$ C. $AC \perp BK$ D. $AC \perp (BKF)$



Hướng dẫn giải:.

a) Ta có $\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCE)$ …

$\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp BE \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp AH \Rightarrow \Delta ACH$ vuông ở H

Tương tự $\left.\begin{matrix} FK \perp AD \\ FK \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow FK \perp (ABCD) \quad \Rightarrow \Delta BFK$ vuông tại K.

b) Ta có $CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp BF$, mặt khác

$AC \perp BF \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp KF \\ AC \perp BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK$.

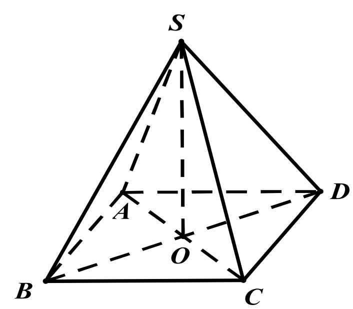
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$.

a) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $SO \perp (ABCD)$ B. $SO \perp AC$ C. $SO \perp BD$ D. Cả A, B, C đều sai

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $AC \perp (SBD)$ B. $AC \perp SO$ C. $AC \perp SB$ D. Cả A, B, C đều sai



Hướng dẫn giải:.

a) Ta có O là trung điểm của AC và $SA = SC \Rightarrow SO \perp AC$.

Tương tự $SO \perp BD$.

Vậy $\left.\begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Chọn D

b) Ta có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình thoi).

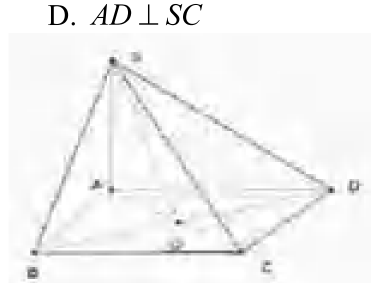
Lại có $AC \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)

Suy ra $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$. Chọn D

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $SA \perp BD$ B. $SC \perp BD$ C. $SO \perp BD$ D. $AD \perp SC$

Hướng dẫn giải:



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$,

mà $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$ *hay* $BD \perp SC, BD \perp SO$

AD không vuông góc SC

Chọn đáp án D.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $(IJK) // (SAC)$. B. $BD \perp (IJK)$.

C. Góc giữa SC và BD có số đo $60°$. D. $BD \perp (SAC)$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

Chọn C.

Do $IJ \,//\, AC$ và $IK \,//\, SA$ nên $(IJK) \,//\, (SAC)$.

Vậy A đúng.

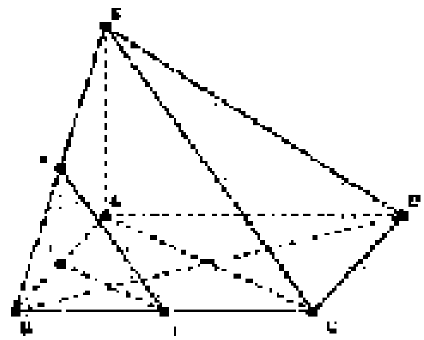
Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$

Vậy D đúng.

Do $BD \perp (SAC)$ và $(IJK) // (SAC)$ nên $BD \perp (IJK)$

Vậy B đúng.

Vậy C sai.



Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD

a) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $AC \perp SH$ B. $AC \perp KH$ C. $AC \perp (SHK)$ D. Cả A, B, C đều sai

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $CK \perp SD$ B. $DH \perp CK$ C. $\widehat{DKC} + \widehat{ADH} = 90^0$ D. Cả A, B, C đều sai

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>.

a) Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$

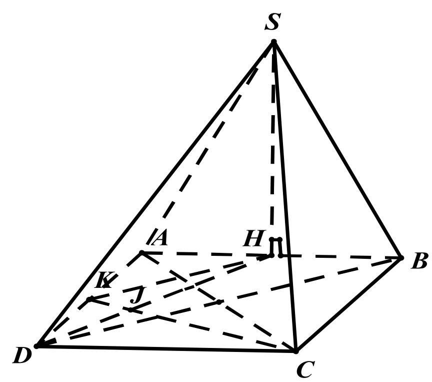
lại có $\begin{cases} HK \parallel BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$

$\Rightarrow AC \perp (SHK)$.

b) Dễ thấy $\Delta AHD = \Delta DKC \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{DKC}$

mà $\widehat{AHD} + \widehat{ADH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DKC} + \widehat{ADH} = 90^0$ hay $DH \perp CK$, mặt khác ta có $SH \perp CK \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$.



Câu 44. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góC. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $OA \perp BC$.

B. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm ΔABC.

D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

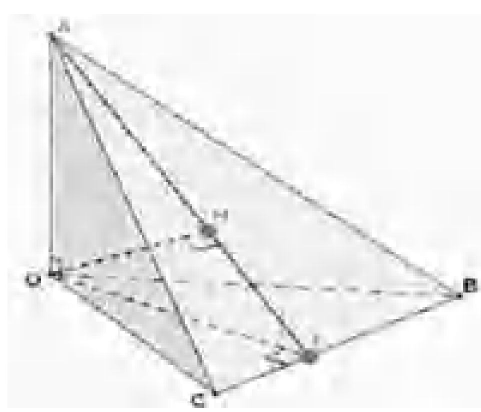
$\Rightarrow$ đáp án A đúng.

Tương tự chứng minh được $OC \perp AB$.

Hạ $\begin{cases} OI \perp BC \\ OH \perp AI \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} OI \perp BC \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAI)$

$\Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (ABC)$.



$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Ta có: $\begin{cases} AB\perp OC \\ AB\perp OH \end{cases}\Rightarrow AB\perp(OCH)\Rightarrow AB\perp HC\,(1)$. Tương tự $BC\perp OH$ (2).

Từ (1) và $(2)\Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta ABC\Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Chọn đáp án D.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$. Gọi H,K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Khẳng định nào sau đây là đúng

a) AH,SK và BC đồng qui

A. AH và BC chéo nhau
B. AH và SK chéo nhau
C. AH,SK và BC đồng qui.
D. AH,SK và BC không đồng qui.

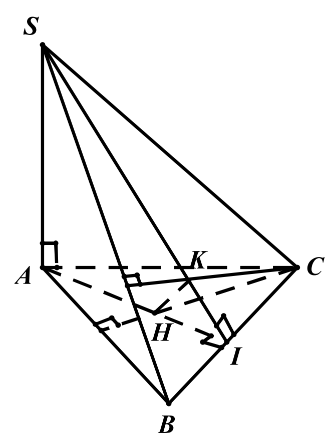
b) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $SB\perp(CHK)$ B. $SB\perp HK$ C. $CH\perp(SAB)$ D. Cả A, B, C đều sai

c) $HK\perp(SBC)$.Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $HK\perp(SBC)$ B. $BC\perp(SAI)$ C. $BC\perp HK$ D. Cả A, B, C đều sai

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>.



a) Gọi $I=AH\cap BC$, để chứng minh AH,SK và BC đồng qui. Ta cần chứng minh SI là đường cao của tam giác SBC, nhưng điều này đúng do $BC\perp SA$ và $BC\perp AI$.

b) Ta có $SB\perp CK$

thêm nữa ta có $\begin{cases} CH\perp AB \\ CH\perp SA \end{cases}\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow CH\perp SB$

Vậy $SB\perp(CHK)$.

b) Theo các chứng minh trên ta có

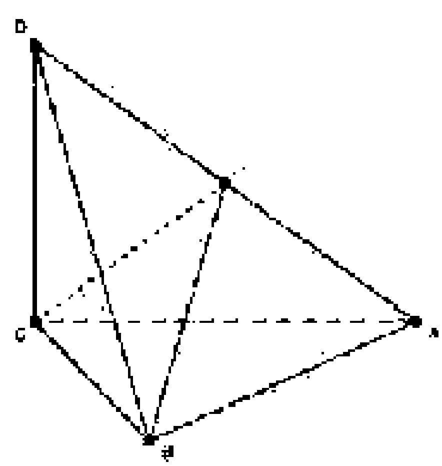
$SB\perp(CHK)\Rightarrow SB\perp HK$ và $BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp HK$

do đó $HK\perp(SBC)$.

Câu 46. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
B. O là trọng tâm tam giác ACD.
C. O là trung điểm cạnh BD.
D. O là trung điểm cạnh AD.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



Chọn D.

Gọi O là trung điểm của AD.

Từ giả thiết ta có

$\begin{cases} AB\perp CD \\ BC\perp CD \end{cases}\Rightarrow CD\perp(ABC)\Rightarrow CD\perp AC$. Vậy ΔACD vuông tại C.

Do đó $OA=OC=OA$ (1)

Mặt khác

$\begin{cases} AB\perp CD \\ AB\perp BC \end{cases}\Rightarrow AB\perp(BCD)\Rightarrow AB\perp BD\Rightarrow\Delta ABD$ vuông tại B.

Do đó $OA=OB=OD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $OA = OB = OC = OD$.

Câu 47. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng

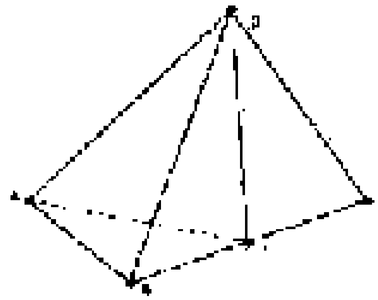
A. $AB \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $BC \perp AD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có

$$\begin{cases} AE \perp BC \\ DE \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow BC \perp AD.$$



Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây **không sai**

A. $AB = CD$. B. $AC = BD$. C. $AB \perp CD$. D. $CD \perp BD$.

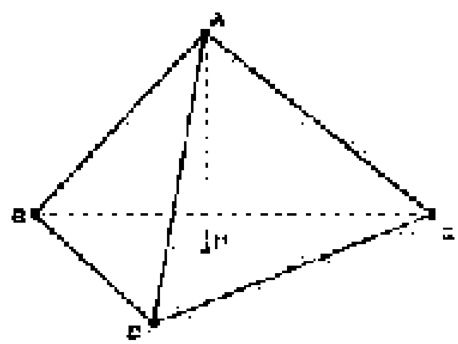
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.

Mặt khác, H là trực tâm ΔABC nên $BH \perp CD$.

Suy ra $CD \perp (ABH)$ nên $CD \perp AB$.



Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $SH \perp (ABCD)$ B. $SH \perp HC$ C. A, B đều đúng D. A, B là sai

b) Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $CK \perp HD$ B. $CK \perp SD$ C. $AC \perp SK$ D. Cả A, B, C đều sai

Hướng dẫn giải:.

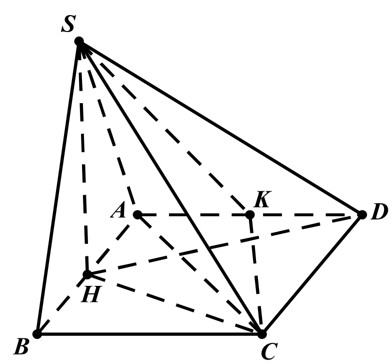
a) Vì H là trung điểm của AB và tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$

Lại có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SC = a\sqrt{2}$, $\text{HC} = \sqrt{DH^2 + DC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $HC^2 + HS^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} = 2a^2 = SC^2$

$\Rightarrow \Delta HSC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$

Vậy $\begin{cases} SH \perp HC \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



b) Ta có $AC \perp HK$ và $AC \perp SH \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Tương tự $CK \perp HD$ (như bài trên) và $CK \perp SH \Rightarrow CK \perp (SDH) \Rightarrow CK \perp SD$.

Câu 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây

A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases} A'D \perp AD' & (t/c\ HV) \\ A'D \perp C'D' & (C'D' \perp (A'D'DA)) \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (AC'D') \Rightarrow A'D \perp AC' \quad (1)$

$\begin{cases} A'B \perp AB' & (t/c\ HV) \\ A'B \perp B'C' & (B'C' \perp (A'D'DA)) \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC' \quad (2)$

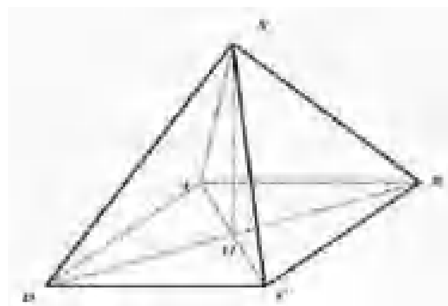
Từ $(1),(2) \Rightarrow AC' \perp (A'BD)$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của 2 đường chéo và $SA = SC$. Các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. $SA \perp (ABCD)$. B. $BD \perp (SAC)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $AB \perp (SAC)$

.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $SA = SC \Rightarrow SAC$ là tam giác cân.

Mặt khác: O là trung điểm của AC (tính chất hình thoi)

Khi đó ta có: $AC \perp SO$

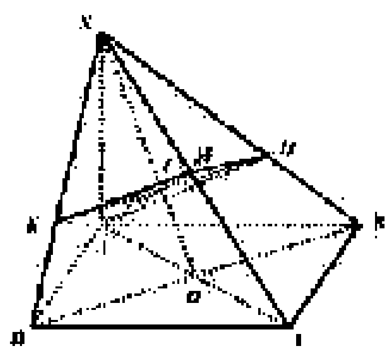
$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BD & (t/c\ hinh\ thoi) \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại H, M, K. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $AK \perp HK$. B. $HK \perp AM$. C. $BD \perp HK$. D. $AH \perp SB$.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$\begin{cases} BD \perp AC & (t/\ c\ \text{HV}) \\ BD \perp SA & (gt) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM$

Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap HK$

(P) là mặt phẳng A và vuông góc với SC

Qua I kẻ $\Delta \parallel BD \Rightarrow \Delta \perp AM \Rightarrow \Delta \subset (P)$

Khi đó: $K = \Delta \cap SD, H = \Delta \cap SB$

Ta có: $AK \perp (SDC)$, mà $HK \cap (SDC) = K$

$\Rightarrow AK$ không vuông góc với HK.

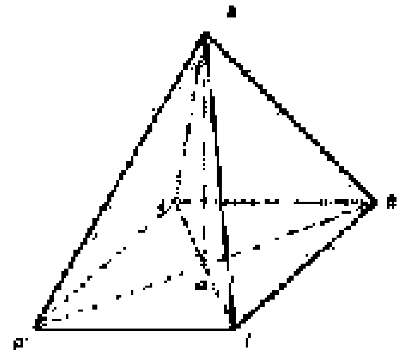
Vậy chọn đáp án A.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Trong các tam giác sau tam giác nào không phải là tam giác vuông

A. ΔSBC. B. ΔSCD. C. ΔSAB. D. ΔSBD.

Hướng dẫn giải:

Ta có :



$\begin{cases} AB \perp AD & (tc \text{ HV}) \\ AB \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$

Giả sử $SB \perp SD \Rightarrow SD \perp (SAB)$ (vô lý)

Hay ΔSBD không thể là tam giác vuông

Vậy chọn đáp án D.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^0, \widehat{CSA} = 60^0, \widehat{ASB} = 90^0, SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. I là trung điểm AB.

B. I là trọng tâm tam giác ABC.

C. I là trung điểm AC.

D. I là trung điểm BC.

Hướng dẫn giải:

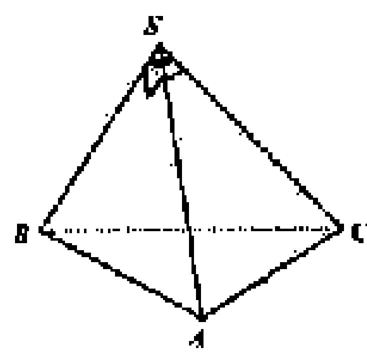
Gọi $SA = SB = SC = a$

Ta có : $\triangle SAC$ đều $\Rightarrow AC = SA = a$

$\triangle SAB$ vuông cân tại S $\Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos\widehat{BSC}} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A



Gọi I là trung điểm của AC thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là trục của tam giác ABC thi d đi qua I và $d \perp (ABC)$

Mặt khác : $SA = SB = SC$ nên $S \in d$. Vậy $SI \perp (ABC)$

nên I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC)

Vì H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC nên H và K lần lượt thuộc AA' và SA'. Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'

Câu 55. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Xét các mệnh đề sau

I. Vì $OC \perp OA, OC \perp OB$ nên $OC \perp (OAB)$.

II. Do $AB \subset (OAB)$ nên $AB \perp OC$. (1)

III. Có $OH \perp (ABC)$ và $AB \subset (ABC)$ nên $AB \perp OH$. (2)

IV. Từ (1) và (2) $AB \perp (OCH)$.

A. I, II, III, IV. B. I, II, III. C. II, III, IV. D. I, IV.

Hướng dẫn giải: Chọn A.

Ta có:

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \\ OA \cap OB = O \\ OA, OB \subset (OAB) \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB).$$ Vậy I đúng.

$$\begin{cases} OC \perp (OAB) \\ AB \subset (OAB) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OC.$$ Vậy II đúng.

$$\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow AB \perp OH.$$ Vậy III đúng.

$$\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \\ OC \cap OH = O \\ OC, OH \subset (OCH) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH).$$ Vậy IV đúng.

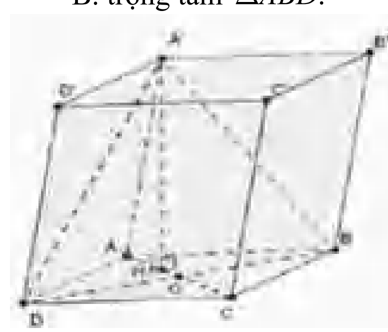
Câu 56. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có đáy là hình thoi $\widehat{BAD} = 60^0$ và $A'A = A'B = A'D$. Gọi $O = AC \cap BD$. Hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ là

A. trung điểm của AO.

B. trọng tâm ΔABD.

C. giao của hai đoạn AC và BD.

D. trọng tâm ΔBCD.



Hướng dẫn giải: Chọn đáp án B.

Vì $A'A = A'B = A'D \Rightarrow$ hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD (1).

Mà tứ giác $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^0$

Nên ΔBAD là tam giác đều (2).

Từ (1) & $(2) \Rightarrow H$ là trọng tâm ΔABD.

Câu 57. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB.

B. Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB.

C. Góc giữa AC và (ABD) là góc CAB.

D. Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD.

Hướng dẫn giải:

Chọn A. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$. Do đó $(AC, (BCD)) = \widehat{ACB}$.

Câu 58. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SA và (ABC)

.

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D. $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = 90°$.

Câu 59. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

B. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

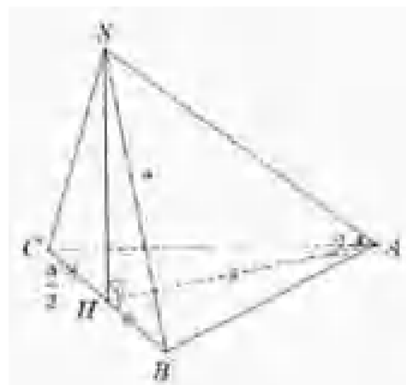
Hướng dẫn giải: Chọn B.

Do AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một nên $AB \perp (BCD)$, suy ra BC là hình chiếu của AC lên (BCD).

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

Hướng dẫn giải: Chọn C.



Gọi H là trung điểm của BC suy ra

$AH = BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

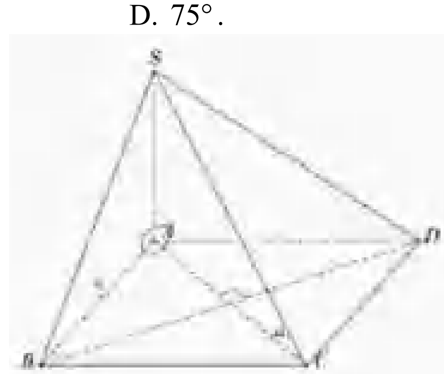
$\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

Hướng dẫn giải: Chọn A.



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = \alpha$

$ABCD$ là hình vuông cạnh a

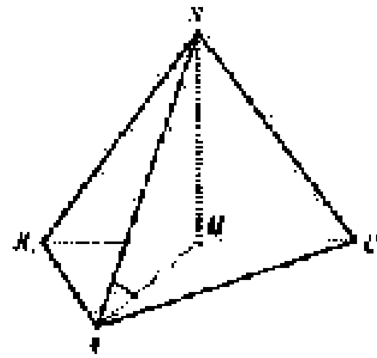
$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}, SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 60^0 B. 75^0 C. 45^0 D. 30^0

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



Do H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nên

$SH \perp (ABC)$

Vậy AH là hình chiếu của SH lên mp (ABC)

$\Rightarrow (SA;(ABC)) = (SA;AH) = \widehat{SAH}$

Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH$

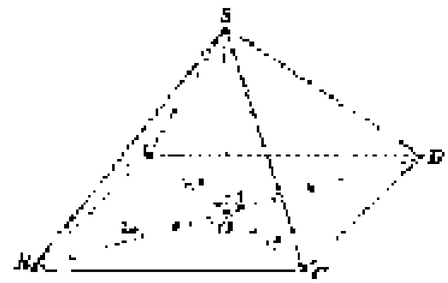
Mà: $\triangle ABC = \triangle SBC \Rightarrow SH = AH$. Vậy tam giác SAH vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{SAH} = 45^0$

Câu 63. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $AC = 2a; BD = 2AC$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$

.

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



Chọn B.

Ta có: $AC = 2a; BD = 2AC = 4a \Rightarrow OB = 2a$

$\Rightarrow \tan \widehat{SBO} = \frac{SO}{OB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow SO = \frac{1}{2}OB = a$.

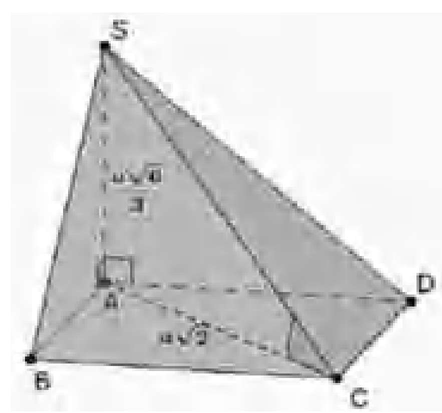
Mặt khác $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCO}; \frac{SO}{OC} = \frac{a}{a} = 1$

Suy ra số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30^0. B. 60^0. C. 75^0. D. 45^0.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa SC và $(ABCD)$.

Tam giác SAC vuông tại A nên

$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$.

Chọn đáp án A.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có:

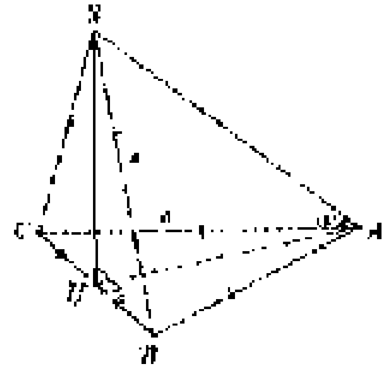
$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH \Rightarrow \widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$.

ΔABC và ΔSBC là hai tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta SHA$ vuông cân tại H

$\Rightarrow \alpha = 45°$.



Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mp $(ABCD)$. Tìm khẳng định đúng

A. $\alpha = 30^0$. B. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\alpha = 45^0$. D. $\alpha = 60^0$.

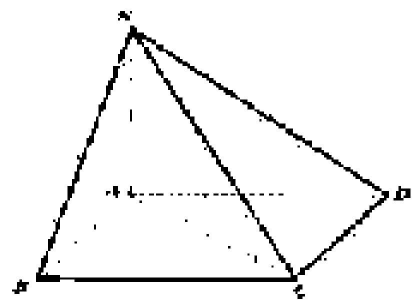
Hướng dẫn giải:

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa giữa SC và mp $(ABCD)$ bằng góc $SC \,\&\, AC. \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$.



Câu 67. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mp $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

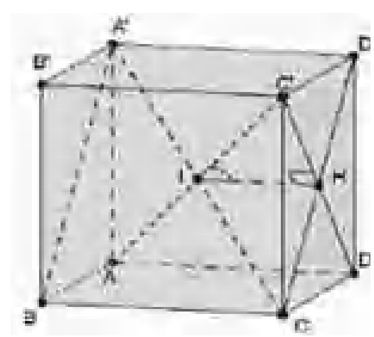
A. $\alpha = 30^0$. B. $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. C. $\alpha = 45^0$. D. $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $\begin{cases} A'C \cap AC' = I \\ C'D \cap CD' = H \end{cases}$

mà $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' lên $(A'BCD') \Rightarrow \widehat{C'IH}$ là góc giữa AC' và $(A'BCD')$. Mà $\tan\widehat{C'IH} = \dfrac{C'H}{IH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.2 = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án D.



Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi HK và $mp(SBC)$ là

A. $65°$. B. $90°$. C. $45°$. D. $120°$.

Hướng dẫn giải::

Gọi $I = AH \cap BC$. Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$ và $K \in SI$.

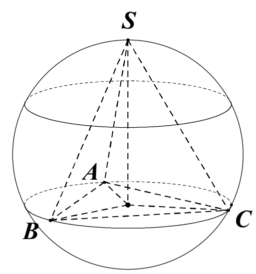
Ta lại có $\begin{cases} SB \perp CK \\ SB \perp CH \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CHK) \Rightarrow (SBC) \perp (CHK)$.

Mà $HK = (SAI) \cap (SHK)$, suy ra $HK \perp (SBC)$ $\rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
B. H là trực tâm tam giác ABC
C. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
D. H là trọng tâm tam giác ABC

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



Do hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $SH \perp (ABC)$

nên SH là trục của hình chóp $S.ABC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$

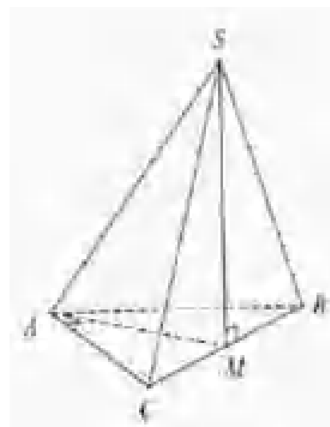
Nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy chọn A.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 30^0.
B. 45^0.
C. 60^0.
D. 75^0.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



$AM = BM = \frac{a}{2}, SB = a$

Có $SM \perp (ABC)$ nên AM là hình chiếu của SA lên $mp(ABC)$

$\Rightarrow (SA,(ABC)) = (SA, AM) = \widehat{SAM}$.

Áp dụng định lý Pytago $SM = \sqrt{SB^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

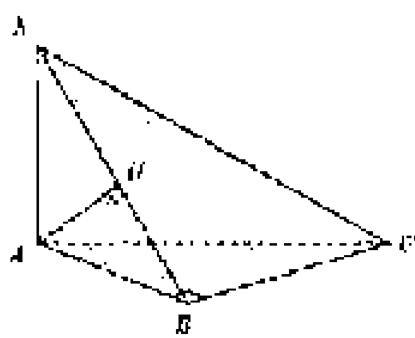
Xét tam giác SAM có $\tan \widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAM} = 60^0$.

Vậy chọn C.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở B. AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SA \perp BC$.
B. $AH \perp BC$.
C. $AH \perp AC$.
D. $AH \perp SC$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Nên Phương án A đúng.

Có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Phương án D đúng.

Suy ra $AH \perp BC$, $AH \perp SC$. Phương án B, D đúng.

Phương án C sai. Thật vậy với $AH \perp AC$, ta có

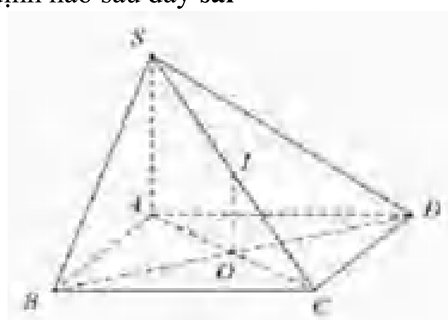
$\begin{cases} AH \perp AC \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý). Vậy chọn C.

Câu 72. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.
B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc a trùng với b).
C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).
D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.
Hướng dẫn giải: Chọn B.

Câu 73. Cho góc tam diện $Sxyz$ với $\widehat{xSy}=120^0$, $\widehat{ySz}=60^0$, $\widehat{zSx}=90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $SA=SB=SC=a$. Tam giác ABC có đặc điểm nào trong các số các đặc điểm sau
A. Vuông cân B. Đều C. Cân nhưng không vuông D. Vuông nhưng không cân
Hướng dẫn giải:
Xét ΔSAB có $AB^2=SA^2+SB^2-2SA.SB.\cos\widehat{ASB}=3a^2 \Rightarrow AB=a\sqrt{3}$.
ΔSBC đều $\Rightarrow BC=a.$
ΔSAC có $AB=\sqrt{SA^2+SC^2}=a\sqrt{2}$.
Từ đó ΔABC vuông tại $C.$ Vậy chọn D.

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của $ABCD$ và I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai**
A. $IO\perp(ABCD)$.
B. $BC\perp SB.$
C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn $BD.$
D. Tam giác SCD vuông ở $D.$
Hướng dẫn giải: Chọn C.



Có IO là đường trung bình tam giác SAC nên $IO//SA$ nên $IO\perp(ABCD)$.
Phương án A đúng.
Có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$. Phương án B đúng
Và $\begin{cases}CD\perp AD\\ CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp SD$ nên phương án D đúng.
Phương án C sai. Thật vậy nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD $\Rightarrow BD\perp AC$ (vô lý).

Câu 75. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng
A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
C. Với mỗi điểm $A\in(\alpha)$ và mỗi điểm $B\in(\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Hướng dẫn giải:

Phương án A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Phương án B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.

Phương án C sai.

Vậy chọn D.

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và $mp(SAB)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$. B. $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. C. $\alpha=30^0$. D. $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Hướng dẫn giải:

Do $BC\perp(SAB)$ nên SB là hình chiếu của SC lên (SAB) $\Rightarrow(SC,(SAB))=(SC,SB)=\widehat{BSC}$

Xét tam giác SBC có $\tan\widehat{BSC}=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{a}{a\sqrt{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Vậy chọn B.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABDC$, với đáy $ABDC$ là hình bình hành tâm O; AD,SA,AB đôi một vuông góc $AD=8,SA=6$. (P) là mặt phẳng qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. 20. B. 16. C. 17. D. 36.

Hướng dẫn giải:

Thiết diện là hình thang vuông đi qua trung điểm các cạnh $AB;CD;CS;SB$, nên diện tích thiết diện là $dt=\dfrac{(BC+\frac{1}{2}BC).\frac{1}{2}SA}{2}=\dfrac{(8+4)6}{2}=36$

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Độ dài SG là

A. $\dfrac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. D. $\dfrac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Theo bài ra hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $SG\perp(ABC), G\in AH$.

Mặt khác ta có: $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SH=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}$

$$\rightarrow SG=SA.\sin\widehat{SAG}=b.\sqrt{1-(\frac{AG}{SA})^2}=b\sqrt{1-\frac{\frac{a^2}{3}}{b^2}}=\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}$$

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $b>a\sqrt{2}$. B. $b<a\sqrt{2}$. C. $a<b\sqrt{2}$. D. $a>b\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Để C_1 nằm giữa S và C thì $\widehat{ASC} < 90^0 \to \cos\widehat{ASC} > 0 \leftrightarrow \dfrac{2b^2 - a^2}{2b^2} > 0 \leftrightarrow b\sqrt{2} > a$

Chọn đáp án C

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc. Điểm cách đều A, B, C, D là:

A. Trung điểm BC B. Trung điểm AD C. Trung điểm AC D. Trung điểm AB

Hướng dẫn giải:

Sử dụng tính chất trung điểm của tam giác vuông

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $AB \perp (SAC)$. B. $CD \perp AC$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp (SBD)$.

Hướng dẫn giải:

Do hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA = SC, SB = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao AH vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và $mp(SAD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha = 60^0$. B. $\alpha = 30^0$. C. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. D. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm AS, suy ra $BI \perp (SAD) \to \alpha = \widehat{IDB}$. Ta có: $BI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}, BD = AB\sqrt{2}$.

Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{BI}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Câu 83. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và $mp(BCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\cos\alpha = 0$. D. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải::

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(BCD)$, a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD$.

Ta có $\alpha = \widehat{ABH}$, $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. $\cos\alpha = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\to$ Chọn đáp án A.

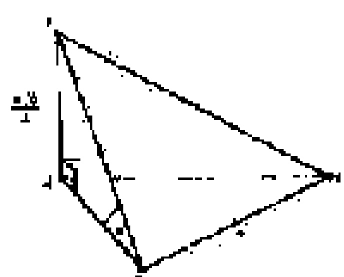
Câu 84. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và (ABC).

A. 75^0 B. 30^0 C. 45^0 D. 60^0

Hướng dẫn giải:

$\widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SBA} = \alpha$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^o$$



Câu 85. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp$(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha = 45^0$ B. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\alpha = 30^0$

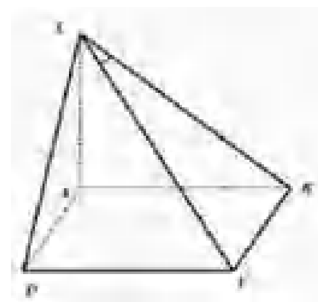
Hướng dẫn giải:

Ta có $\widehat{AC_1,(ABCD)} = \widehat{CAC_1} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{CC_1}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. B. $\tan\alpha = \sqrt{3}$. C. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan\alpha = 1$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $S \in (SAB) \Rightarrow S$ là hình chiếu của S trên (SAB) (1)

$\begin{cases} BC \perp AB & (t/c\ HV) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ B là hình chiếu của C trên (SAB) (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow \left[\widehat{SC,(SAB)}\right] = \left(\widehat{SC,SB}\right) = \widehat{BSC} = \alpha$

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$

Xét tam giác SBC vuông tại B ta có: $\tan\alpha = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy chọn đáp án C.

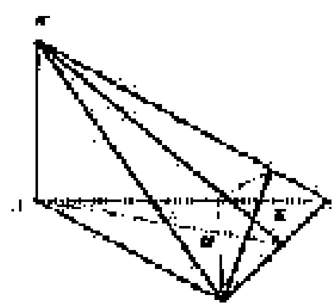
Câu 87. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan\widehat{SOB} = \dfrac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 75^0. B. 45^0. C. 30^0. D. 60^0.

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi SC và (BHK) là:

A. 45^0. B. 120^0. C. 90^0. D. 65^0.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$\begin{cases} BH \perp AC & (gt) \\ BH \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

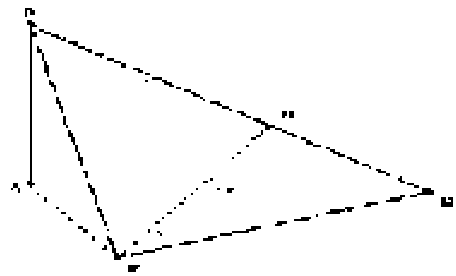
Mà $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là

A. Hình thang vuông. B. Tam giác đều. C. Tam giác cân. D. Tam giác vuông.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn D.

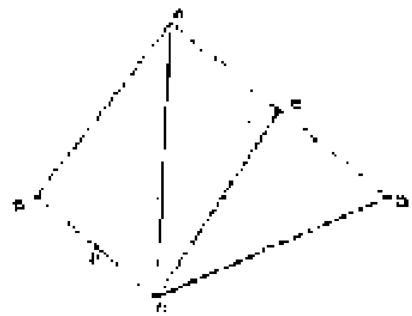


Gọi I là trung điểm của AC, kẻ $IH \perp SC$.
Ta có $BI \perp AC, BI \perp SA \Rightarrow BI \perp SC$.
Do đó $SC \perp (BIH)$ hay thiết diện là tam giác BIH.
Mà $BI \perp (SAC)$ nên $BI \perp IH$ hay thiết diện là tam giác vuông.

Câu 90. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. B. 40. C. $36\sqrt{3}$ D. 36.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>



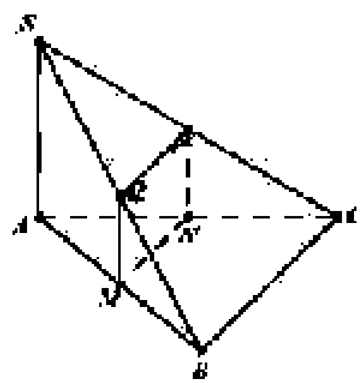
Thiết diện là tam giác BCE, với E là trung điểm của AD. Gọi F là trung điểm của BC.

Ta có $BE = CE = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$;

$EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = 6\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là: $S = \dfrac{1}{2}EF.BC = 36\sqrt{2}$.

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì



A. Hình thang vuông. B. Hình thang cân.
C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$ $\begin{cases} BC \perp SB \\ (P) \perp SB \end{cases} \Rightarrow (P)//BC(1).$

Mà $(P) \cap (ABC) = MN(2)$.

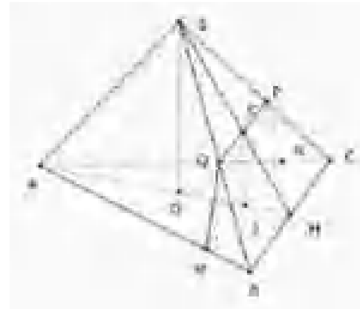
Từ $(1);(2) \Rightarrow MN//BC$

Tương tự ta có $PQ//BC; PN//SA$

Mà $SA \perp BC \Rightarrow PN \perp NM$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại N.

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì

A. Hình thang cân B. Hình thang vuông C. Hình bình hành D. Tam giác vuông



Hướng dẫn giải: Chọn A.

Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên (P) song song với SO

Suy ra (P) cắt (SAH) theo giao tuyến là đường thẳng qua I và song song với SO cắt SH tại K

Từ giả thiết suy ra (P) song song BC, do đó (P) sẽ cắt $(ABC),(SBC)$ lần lượt là các đường thẳng qua I và K song song với BC cắt AB, AC, SB,SC lần lượt tại M,N,Q,P. Do đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra I là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ, lại có các tam giác ABC đều và tam giác SBC cân tại S suy ra IK vuông góc với MN và PQ dó đó $MNPQ$ là hình thang cân.

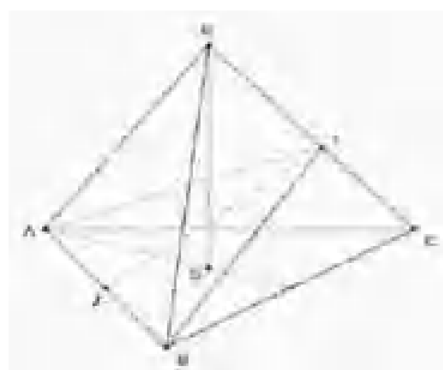
Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$ ($a>b\sqrt{2}$). Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$. B. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$. C. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2+a^2}}{2b}$. D. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2+a^2}}{4b}$.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $AI\perp SC\Rightarrow (AIB)\perp SC$. Thiết diện là tam giác AIB.

Ta có $AI=AC\sin\widehat{ACS}=a\sqrt{1-\cos^2\widehat{ACS}}=a\sqrt{1-\left(\dfrac{a^2+b^2-b^2}{2ab}\right)}=\dfrac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$



Gọi J là trung điểm của AB.

Dễ thấy tam giác AIB cân tại I, suy ra $IJ\perp AB$.

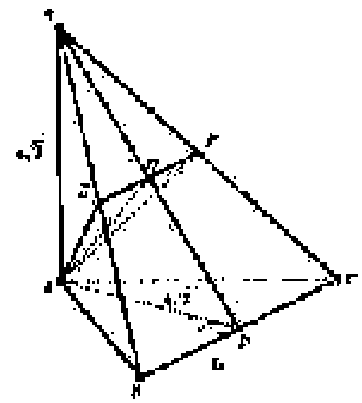
$IJ=\sqrt{AI^2-AJ^2}=\dfrac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}$.

Do đó: $S=\dfrac{1}{2}AB.IJ=\dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

Chọn A.

Câu 94. Tam giác ABC có $BC=2a$, đường cao $AD=a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của SB và SC. Diện tích tam giác AEF bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$ C. $\dfrac{1}{2}a^2$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$



Hướng dẫn giải:

Do $AD \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD)$

$\Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow EF \perp AH$

$\Rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} EF.AH$

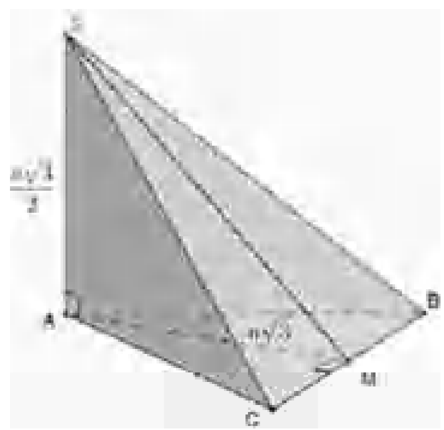
Mà $EF = \frac{1}{2} BC = a$. Do H là trung điểm $SD \Rightarrow AH = a$

$\Rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} a^2$

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC), SA = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) có diện tích bằng

A. $\frac{3a^2}{8}$. B. $\frac{3a^2}{2}$. C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{2a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải: Chọn C.



Gọi M là trung điểm của BC thì $BC \perp AM\ (1)$.

Hiển nhiên $AM = a\sqrt{3}$.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow (P) \equiv (SAM)$

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) chính là ΔSAM.

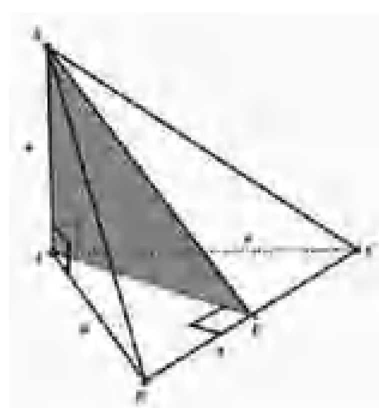
ΔSAM vuông tại A nên

$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2} SA.AM = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC), SA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ có diện tích bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^2}{6}$ C. $\frac{a^2}{2}$ D. a^2

Hướng dẫn giải:



Kẻ $AE \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAE) \equiv (P)$

Thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABC$ là tam giác SAE có diện tích : $S_{\Delta SAE} = \frac{1}{2} SA.AE = \frac{1}{2} a.a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Câu 97. Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh $a, SA = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên AB sao cho $AM = b$ $(0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$. C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$. D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> Chọn C.

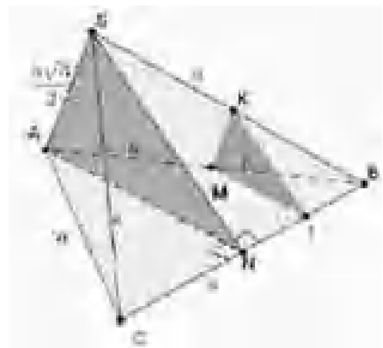
Gọi N là trung điểm của BC.

$\begin{cases} SB = SC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SN \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN).$

Theo bài ra $BC \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ (P)//(SAN) \end{cases}$.

Kẻ $MI//AN, MK//SA$

Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ là ΔKMI.



$\begin{cases} \Delta ABC \\ \Delta SBC \end{cases}$ là hai tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AN = SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = SA \Rightarrow \Delta SAN$ là tam giác đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta KMI$ là tam giác đều cạnh $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a-b}{a} \Rightarrow S_{\Delta KMI} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

Câu 98. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, AP là đường cao của tam giác ACD. Mặt phẳng (P) qua B vuông góc với AP cắt mp(ACD) theo đoạn giao tuyến có độ dài bằng

A. 9 B. 6 C. 8 D. 7

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Ta có : $CD \perp AP, CD \perp BP \Rightarrow CD \perp (APB) \Rightarrow BG \perp CD$

Tương tự : $AD \perp CM, AD \perp BM \Rightarrow AD \perp (BCM) \Rightarrow AD \perp BG$

Suy ra : $BG \perp (ABC) \Rightarrow BG \perp AP$

Kẻ KL đi qua trọng tâm G của ΔACD và song song với CD $\Rightarrow AP \perp KL$ $\Rightarrow (P)$ chính là mặt phẳng (BKL)

$\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \dfrac{2}{3}CD = 8$

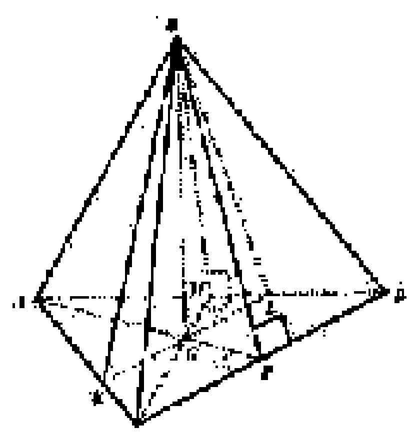
Có thể nói nhanh theo tính chất tứ diện đều:

Gọi G là trọng tâm ΔACD thì G là tâm ΔACD và $BG \perp (ACD)$

Trong $mp(ACD)$ kẻ qua G đường thẳng song song với CD cắt AC, AD lần lượt tại K, L

Ta có $(BKL) \perp (ACD), AP \perp KL \Rightarrow AP \perp (BKL)$. Vậy $(P) \equiv (BKL)$

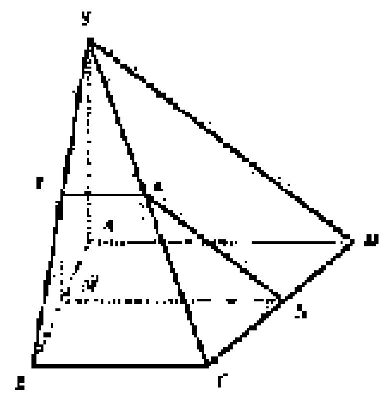
$\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \dfrac{2}{3}CD = 8$.



Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$, với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của $\left(P\right)$ và hình chóp có diện tích bằng

A. 10. B. 20. C. 15. D. 16.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u> Chọn C.



Do $\left(P\right)\perp AB \Rightarrow \left(P\right) \parallel SA$

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \parallel SA \Rightarrow MI \subset \left(P\right)$

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset \left(P\right)$

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \parallel BC$, mà

$MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel IK \;\; \Rightarrow IK \subset \left(P\right)$

Vậy thiết diện của $\left(P\right)$ và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M

Ta có: MI là đường trung bình của tam giác SAB

$\Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}SA = 3$

IK là đường trung bình của tam giác SBC $\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}BC = 3$

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}\left(AD + BC\right) = 7$

Khi đó $S_{MNKI} = \dfrac{IK + MN}{2}.MI = \dfrac{3+7}{2}.3 = 15$

Câu 100. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp \left(ABC\right)$.

a) Khẳng định nào đúng nhất? H là trực tâm của ΔABC

A. H là trực tâm của ΔABC. B. H là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.

C. H là trọng tâm của ΔABC. D. H là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC.

b) ΔABC là tam giác gì?

A. ΔABC là tam giác nhọn. B. ΔABC là tam giác tù

C. ΔABC là tam giác vuông D. ΔABC là tam giác cân

c) Khẳng định nào sau đây là đúng nhất? $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$

A. $S_{\Delta ABC}^2 = \dfrac{1}{2}S_{\Delta OAB}^2 + \dfrac{1}{2}S_{\Delta OBC}^2 + \dfrac{1}{2}S_{\Delta OCA}^2$ B. $\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$

C. $\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$ D. $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$

d) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$.

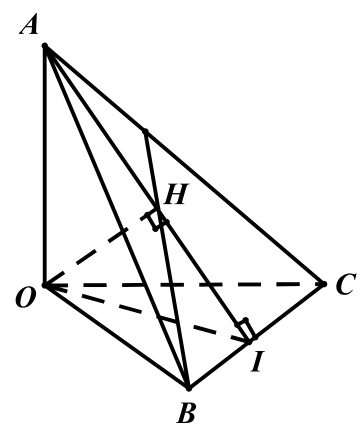
A. M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG, trong đó I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC

B. M thuộc mặt phẳng đi qua I và song song với OG,trong đó I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và. là trọng tâm của tam giác ABC

C. M thuộc mặt phẳng đi qua O và vuông góc với OG, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC

D. M thuộc mặt phẳng đi qua O và song song với OG, trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>.



a) Ta có $\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$

Lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$

Vậy $\left.\begin{matrix} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (OAH)$

$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$.

Tương tự $\left.\begin{matrix} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow BH \perp AC \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$

Ta có $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Tương tự $AC = \sqrt{a^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)}} > 0$$

suy ra $\widehat{A}$ nhọn. Tương tự các góc B, C nhọn.

c) Ta có $S_{ABC}^2 = \frac{1}{4} AI^2 BC^2 = \frac{1}{4}(OI^2 + OA^2)(OB^2 + OC^2)$

$= \frac{1}{4} OI^2 BC^2 + \frac{1}{4} OA^2 OB^2 + \frac{1}{4} OA^2 OC^2 \ = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$

d) Gọi I là điểm cách đều 4 điểm O, A, B, C và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$

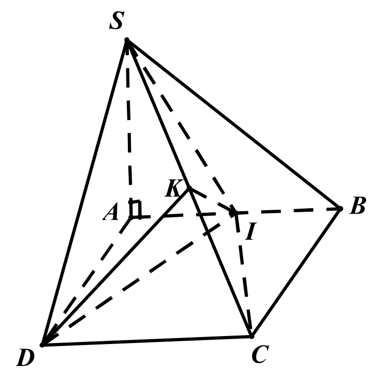
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO})^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MI \perp OG$ (do $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$)

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua I và vuông góc với OG.

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Tính IK.

A. $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $IK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $IK = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ D. $IK = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$



Hướng dẫn giải:.

Ta có $IS=\sqrt{AI^2+AS^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ Tương tự $ID=IC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ suy ra $IS=ID=IC$ nên I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD.

Mặt khác $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$

$\Rightarrow CD\perp SD\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D, lại có K là trung điểm của SC nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD, do đó $KI\perp(SCD)$.

Ta có $IK^2=ID^2-DK^2=ID^2-\frac{1}{4}SC^2=ID^2-\frac{1}{4}\left(SA^2+AC^2\right)$

$$\frac{5a^2}{4}-\frac{1}{4}\left(a^2+2a^2\right)=\frac{a^2}{2}\Rightarrow IK=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 102. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng $45°$. Tính độ dài SO

A. $SO=a\sqrt{3}$. B. $SO=a\sqrt{2}$. C. $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải: Chọn B.

Do $SO\perp(ABCD)\Rightarrow\left(SA,(ABCD)\right)=\widehat{SAO}=45°$.

Do đó ΔSAO vuông cân tại O nên $SO=AO=a\sqrt{2}$.

Câu 103. Cho tứ diện $ABCD$ có DA, DB, DC đôi một vuông góc. Gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng DA, DB, DC với mặt phẳng (ABC).

Tìm Giá trị nhỏ nhất của $M=\left(2+\cot^2\alpha\right)\left(2+\cot^2\beta\right)\left(2+\cot^2\gamma\right)$.

A. 64 B. 8 C. 1 D. $64\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:.

Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC)

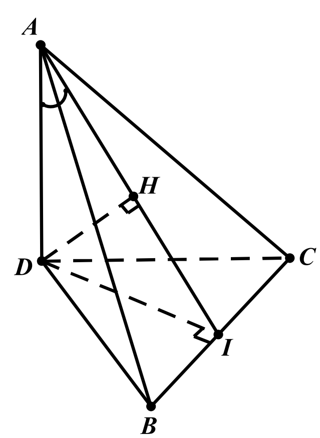
Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Và $\widehat{\left(DA,(ABC)\right)}=\widehat{\left(DA,AH\right)}=\widehat{DAH}=\alpha$

Đặt $DA=a, DB=b, DC=c$

Gọi $I=AH\cap BC$ thì DI là đường cao của tam giác DBC nên

$DI=\frac{DB.DC}{BC}=\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$



$\cot^2\alpha = \dfrac{DA}{DI} = \dfrac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{b^2c^2} \Rightarrow 2+\cot^2\alpha = 2+\dfrac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{b^2c^2} \ge 2+\dfrac{2a^2}{bc} \ge \dfrac{4a}{\sqrt{bc}}$ Vậy

$2+\cot^2\alpha \ge \dfrac{4a}{\sqrt{bc}}$ (1)

Tương tự $2+\cot^2\beta \ge \dfrac{4b}{\sqrt{ac}}$ (2) và $2+\cot^2\gamma \ge \dfrac{4c}{\sqrt{ab}}$ (3)

Nhân theo vế các BĐT $(1),(2),(3)$ ta được $\left(2+\cot^2\alpha\right)\left(2+\cot^2\beta\right)\left(2+\cot^2\gamma\right) \ge 64$ (đpcm)

Câu 104. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn đường kính cố định BC và M là điểm di động trên đường tròn này. Trên đường thẳng d vuông góc với (α) tại B lấy một điểm A.

a) Khẳng định nào sau đây là đúng

A. các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông B. tam giác ACM vuông cân tại M

C. các mặt của tứ diện $ABMC$ là tam giác vuông cân D. tam giác ACM vuông tại A

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B trên AM và AC. Khẳng định nào sau đây là **sai**

A. $AC \perp (BHK)$. B. $BH \perp AC$ C. A, B đều đúng D. A, B đều sai

c) Tìm tập hợp điểm H khi M di động

A. H thuộc đường tròn đường kính BK. B. H thuộc đường tròn đường kính AC.

C. H thuộc đường tròn đường kính BM. D. H thuộc đường tròn đường kính AB.

d) Tìm vị trí của M để đoạn AM lớn nhất

A. $M \equiv C$ B. $M \equiv B$ C. $M \equiv H$ D. $M \equiv K$

e) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác BHK lớn nhất

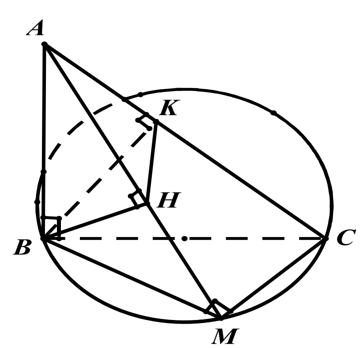
A. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $2\dfrac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

B. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\dfrac{1}{2}\dfrac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

C. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $3\dfrac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

D. M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\dfrac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2+BC^2}}$

Hướng dẫn giải:.



a) Ta có $AB \perp (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp BM \\ AB \perp BC \end{cases}$ suy ra các tam giác ABM và ABC vuông tại B.

Tiếp theo ta có $\begin{cases} MC \perp MB \\ MC \perp AB \end{cases} \Rightarrow MC \perp (ABM)$

$\Rightarrow MC \perp AM$ hay tam giác ACM vuông tại M.

b) Ta có $\begin{cases} BH \perp AM \\ BH \perp MC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (ACM)$

$\Rightarrow BH \perp AC$.

Vậy $\left.\begin{matrix} AC \perp BH \\ AC \perp BK \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BHK)$.

c) Dễ thấy BK cố định và $\widehat{BHK} = 90^0$ nên điểm H thuộc đường tròn đường kính BK.
Từ đó ta có tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BK.

d) $MA^2 = AB^2 + BM^2$ mà AB không đổi nên AM lớn nhất khi MB lớn nhất
$\Leftrightarrow BM = BC \Leftrightarrow M \equiv C$.

e) Ta có $S_{BHK} = \frac{1}{2}BH.HK \le \frac{BH^2 + HK^2}{4} = \frac{BK^2}{4}$ không đổi nên

$\max S_{BHK} = \frac{BK^2}{4} \Leftrightarrow BH = HK$, lúc này ΔHBK vuông cân tại H nên $BH = \frac{BK}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2}; \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2}$

nên $2\left(\frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}\right) = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{2}{BC^2} \Leftrightarrow MB = \frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2 + BC^2}}$

Vậy $\max S_{BHK} = \frac{BK^2}{4} \Leftrightarrow \Leftrightarrow MB = \frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2 + BC^2}} \Leftrightarrow$ M là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với đường tròn tâm B bán kính $\frac{BA.BC}{\sqrt{2BA^2 + BC^2}}$

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D và $SD = a\sqrt{5}$.

a) Tính SA

A. $SA = a$ B. $SA = 2a$ C. $SA = 3a$ D. $SA = 4a$

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC.Gọi K, L là các giao điểm K, L của SB, SD với (HIJ). Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**

A. $AK \perp (SBC)$, B. $AL \perp (SCD)$ C. $AK \perp SC$ D. Cả A, B, C đều đúng

<u>Hướng dẫn giải:</u>.

a) ΔSBC vuông tại $B \Rightarrow BC \perp SB$ mà $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAB)$
$\Rightarrow BC \perp SA$.

Tương tự ta có $SA \perp CD$ nên $SA \perp (ABCD)$.

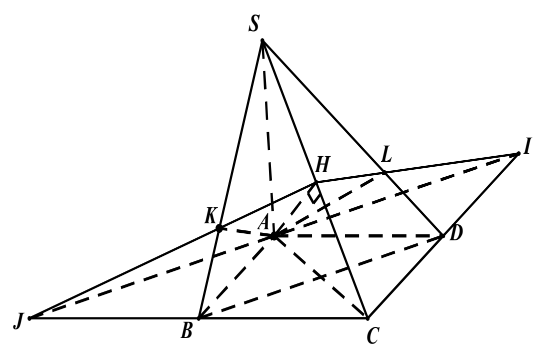
Ta có

$SC = \sqrt{DS^2 + DC^2} = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Vậy $SA = a$.



b) Do $\begin{cases} IJ \perp AC \\ IJ \perp SA \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SAC) \Rightarrow IJ \perp SC$

Lại có $AH \perp SC \Rightarrow (HIJ) \perp SC \Rightarrow AK \perp SC$ (1)

Dế thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $AK \perp (SBC)$. Lập luận tương tự ta có $AL \perp (SCD)$.

Câu 106. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM = x$ $(0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB. Giả sử thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α) là tứ giác $MNPQ$.

a) Hỏi tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình chữ nhật B. hình vuông C. hình thang D. hình bình hành

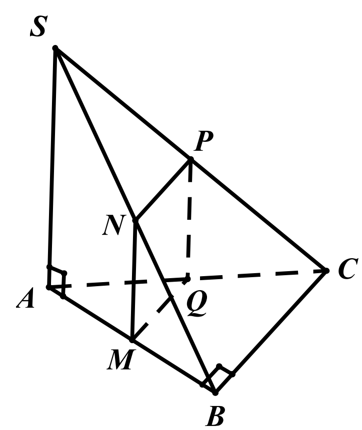
b) Tìm x để diện tích thiết diện $MNPQ$ lớn nhất

A. $x = \frac{a}{2}$ B. $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ C. $x = \frac{3a}{2}$ D. $x = a$

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow SA \,||\, (\alpha)$

Do đó $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ SA \,||\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN \,||\, SA$ Tương tự



$\begin{cases} (\alpha) \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \,||\, (\alpha)$

$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \,||\, (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \,||\, BC, Q \in AC$

$\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \,||\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP \,||\, BC, P \in SC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $MN \,||\, SA, PQ \,||\, SA \Rightarrow MN \,||\, PQ$ và $MQ \,||\, BC, NP \,||\, BC \Rightarrow MQ \,||\, NP$ nên $MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases} MN \,||\, SA \\ NP \,||\, BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$. Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b) Ta có $MQ = AM = x$, $\frac{MN}{SA} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MN = \frac{MB.SA}{AB} = \frac{(a-x)a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}(a-x)$

$S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}(a-x)x = \sqrt{3}[\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2] \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\max S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi $x = \frac{a}{2}$.

Câu 107. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng $45°$. Tính độ dài SO

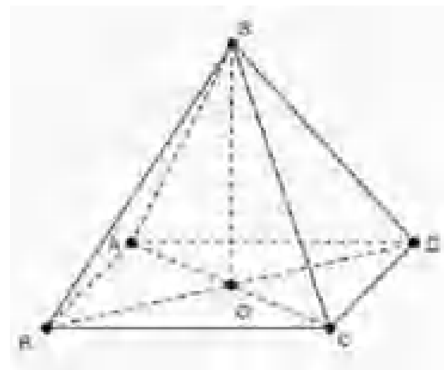
A. $SO = a\sqrt{3}$. B. $SO = a\sqrt{2}$. C. $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>

Chọn B.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = \widehat{SAO} = 45°$.

Do đó ΔSAO vuông cân tại O nên $SO = AO = a\sqrt{2}$.



Câu 108. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc và $AB = a, BC = b, CD = c$. Độ dài AD:

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. B. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. C. $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$. D. $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

<u>*Hướng dẫn giải::*</u>

Ta có: $BC \perp CD \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2+CD^2} = \sqrt{b^2+c^2}$

Mặt khác: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD \quad AD = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Giả sử tồn tại tiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$ B. $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ C. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ D. $S = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$

<u>*Hướng dẫn giải:*</u>.

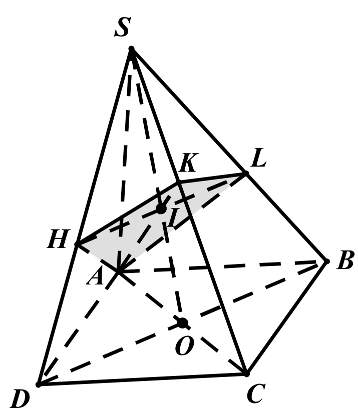
Gọi K là hình chiếu của A trên SC thì $K \in (\alpha)$.Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AK$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$, mặt khác

$(\alpha) \perp SC$ nên $BD \parallel (\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD) \\ BD \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = HL \parallel BD, H \in SD, L \in SB$



Thiết diện là tứ giác $AHKL$.

b) Do $\begin{cases} HL \parallel BD \\ BD \perp AK \end{cases} \Rightarrow HL \perp AK \Rightarrow S_{AHKL} = \dfrac{1}{2} AH.KL$

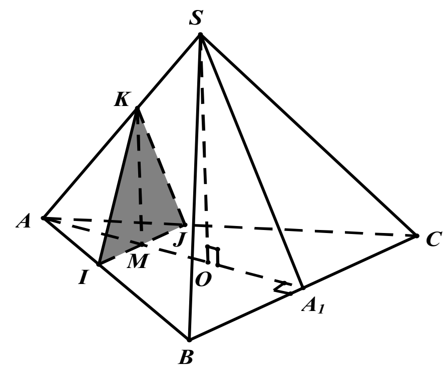
Ta có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại., mà $AK \perp SC$ nên K là trung điểm của $SC \Rightarrow AK = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

$HL \parallel BD \Rightarrow \frac{HL}{BD} = \frac{SH}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HL = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Vậy $S_{AHKL} = \frac{1}{2}a.\frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 110. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AA' của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$. Giả sử tồn tại thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α). Giả sử tính được diện tích thiết diện theo a và x. Xác định vị trí của M để diện tích thiết diện lớn nhất.

A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ B. $x = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

C. $x = \frac{3a}{8}$ D. $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$



Hướng dẫn giải:.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$

(O là tâm tam giác ABC). Do đó $SO \perp AA_1$ mà $(\alpha) \parallel AA_1 \Rightarrow SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$

Trường hợp 1. $x = 0$ thì thiết diện là điểm A.

Trường hợp 2. $0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì M thuộc đoạn $AO(M \ne A)$.

Ta có: $\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ \parallel BC, I \in AB, J \in AC$

Tương tự $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MK \parallel SO, K \in SA$.

Thiết diện là tam giác KIJ.

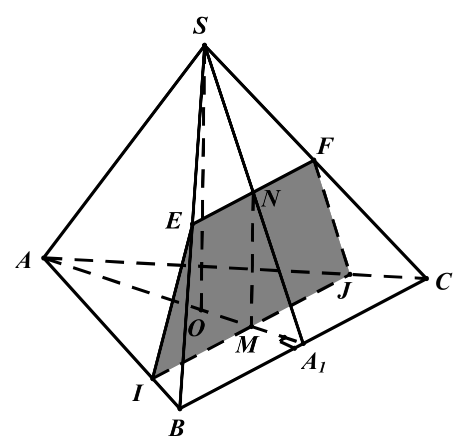
Trường hợp 3. $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ khi đó M thuộc đoạn $OA(M \ne 0; M \ne A)$

Tương tự như trường hợp trên ta có:

$\begin{cases} M \in (ABC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = IJ \parallel BC$,

$I \in AB, J \in AC$.



$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAA_1) \\ SO \subset (SAA_1) \\ SO \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAA_1) = MN \parallel SO, N \in SA_1$.

$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = EF \parallel IJ, N \in EF$

Thiết diện là tứ giác $IJEF$.

Trường hợp 4. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện là đoạn BC.

b) Xét các trường hợp:

$x = 0 \Rightarrow S_{td} = 0$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{td} = 0$

$0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{3}$, thì $S_{IJK} = \frac{1}{2} IJ.MK$.

Ta có $IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA_1} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$

Tương tự $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow MK = 2x\sqrt{3}$. Vậy $S_{IJK} = \frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$.

$\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{2}}{3}$, dễ thấy $IJEF$ là hình thang nên $S_{IJEF} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$

$IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$, $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA_1} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow EF = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$

$\frac{MN}{SO} = \frac{MA_1}{OA_1} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow MN = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$. Vậy $S_{IJEF} = \frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3} - 3a\right)\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$.

Xét các trường hợp ta thấy S_{td} lớn nhất trong trường hợp $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\max S_{IJEF} = \frac{3a^2}{4}$ khi $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Câu 111. Cho tam giác ABC tại C có cạnh huyền nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với (P) các góc α, β. Giả sử ∂ là độ lớn góc giữa đường cao CK với (P). Khẳng định nào sau đây là đúng nhất

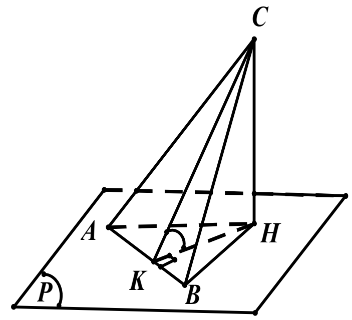
A. $\sin\partial = \sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta}$ B. $\sin\partial = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$

C. $\sin\partial = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$ D. $\sin\partial = 2\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$

Hướng dẫn giải:.

Kẻ $CH \perp (P)$ thì $\widehat{CKH}$ là góc giữa CK và (P) và dễ thấy

$\widehat{(CA,(P))} = \widehat{CAH} = \alpha, \widehat{(CB,(P))} = \widehat{CBH} = \beta$



Đặt $CH = h$, ta có $CA = \dfrac{h}{\sin\alpha}, CB = \dfrac{h}{\sin\beta}$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 = \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha} + \dfrac{h^2}{\sin^2\beta} = h^2\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\beta}\right).$

Xét tam giác ABC có $CK.AB = CA.CB$

$$\Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{AB} = \frac{\frac{h}{\sin\alpha}.\frac{h}{\sin\beta}}{\sqrt{\frac{1}{h^2}\left(\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right)}} = \frac{h}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}.$$

Ta có $\sin\widehat{CKH} = \dfrac{CH}{CK} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

Câu 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $SO \perp (ABCD)$, đường thẳng SA tạo với hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBC) các góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC).

a) Tính SA khi $HB = \dfrac{a}{2}$

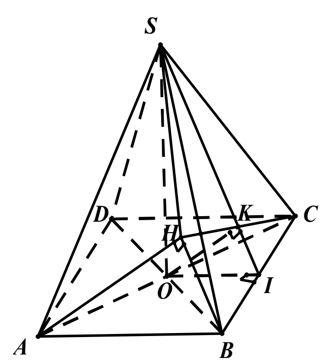
A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$ D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Tính góc giữa đường thẳng SA với $(ABCD)$.

A. $\varphi = \arctan\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ B. $\varphi = \arctan\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ C. $\varphi = \arctan\sqrt{\dfrac{3}{8}}$ D. $\varphi = \arctan\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Hướng dẫn giải:.

a) Dễ thấy $\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAO} = \varphi$ nên $SO = SA\cos\varphi$ (1).



Gọi I là trung điểm của BC thì ta có $\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIO)$

Kẻ $OK \perp SI$ thì $OK \perp BC$ nên $OK \perp (SBC)$.

Kẻ $At \parallel OK$ cắt CK tại H, khi đó ta có

$\begin{cases} AH \parallel CK \\ CK \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$ nên $\widehat{(SA,(SBC))} = \widehat{SAH} = \varphi$ do đó $AH = SA\cos\varphi$ (2).

Từ $(1),(2)$ ta có $AH = SO$.

Khi $BH = \dfrac{a}{2}$ thì trong tam giác vuông HAB có

$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow SO = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

b) $\tan\varphi = \dfrac{SO}{OA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow \varphi = \arctan\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Câu 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$. Góc giữa đường thẳng SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) lần lượt là α và β.

a) Tính SA

A. $SA = a\sin\alpha$ B. $SA == a\cos\alpha$ C. $SA = a\tan\alpha$ D. $SA = 2a\sin\alpha$

b) Tính AB

A. $\dfrac{1}{2}a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$ B. $2a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

C. $3a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$ D. $a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

Hướng dẫn giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAC} = \alpha.$

Tương tự $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{SBC} = \beta$.

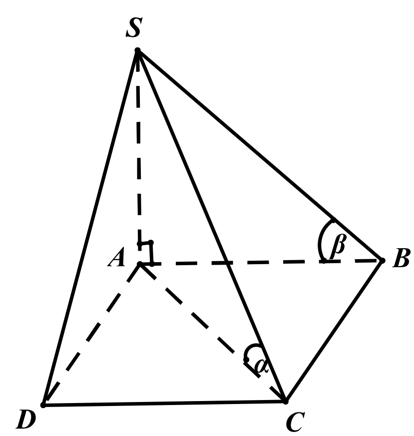
$SA = SC\sin\alpha = a\sin\alpha$

b) $SB = SC\sin\beta = a\sin\beta$

$AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = \sqrt{a^2\sin^2\beta - a^2\sin^2\alpha}$

$= a\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\beta}{2} - \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$.

$= a\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$



Câu 114. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của tứ diện. Gọi A, B, C là ba góc tương ứng của tam giác ABC. Đặt $\alpha = \widehat{AOH}, \beta = \widehat{BOH}, \gamma = \widehat{COH}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**

A. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin C}$ B. $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2 2\gamma}{\sin 2C}$

C. $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin^2 2\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin^2 2\gamma}{\sin C}$ D. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

Câu 115. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{BDC} = 90^0$. Hình chiếu H của D trên mặt phẳng ABC là trực tâm tam giác ABC.

a) Tính $\widehat{CDA}$

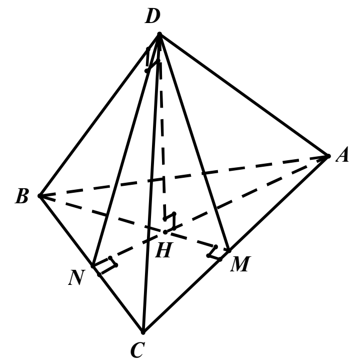
A. $\widehat{CDA} = 60^0$ B. $\widehat{CDA} = 90^0$ C. $\widehat{CDA} = 45^0$ D. $\widehat{CDA} = 30^0$

b) Khẳng định nào sau đây là **đúng nhất**

A. $6\left(DA^2 + DB^2 + DC^2\right) \geq (AB + BC + CA)^2$ B. $6\left(DA^2 + DB^2 + DC^2\right) \geq 5(AB + BC + CA)^2$

C. $3\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)\geq\left(AB+BC+CA\right)^2$ D.
$2\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)\geq 3\left(AB+BC+CA\right)^2$

Hướng dẫn giải:



a) Vì $\begin{cases} BC\perp DH \\ BC\perp AH \end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(ADH\right)\Rightarrow BC\perp DA$ (1)

Tương tự ta có $\left(BDH\right)\perp AC\Rightarrow DB\perp AC$, vì vậy

$\begin{cases} DB\perp DC \\ DB\perp AC \end{cases}\Rightarrow DB\perp\left(ACD\right)\Rightarrow DB\perp DA$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $DA\perp\left(BCD\right)\Rightarrow DA\perp DC$ hay $\widehat{CDA}=90^0$.

b) Từ câu a) ta thấy tứ diện $ABCD$ có các cạnh DA, DB, DC đôi một vuông góc.

Theo BĐT Cauchy-Schwraz ta có $\left(AB+BC+CA\right)^2\leq 3\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

Mà $\begin{cases} AB^2=DA^2+DB^2 \\ BC^2=DB^2+DC^2 \\ CA^2=DA^2+DC^2 \end{cases}$ nên $\left(AB+BC+CA\right)^2\leq 6\left(DA^2+DB^2+DC^2\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $AB=BC=CA\Rightarrow\Delta ABC$ đều

Mà chân đường cao của D trùng với tâm đáy ta được $D.ABC$ là hình chóp đều đỉnh D.

Câu 116. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{MA^2}{OA^2}+\frac{MB^2}{OB^2}+\frac{MC^2}{OC^2}$.

A. $\min T=3$ B. $\min T=2$ C. $\min T=4$ D. $\min T=6$

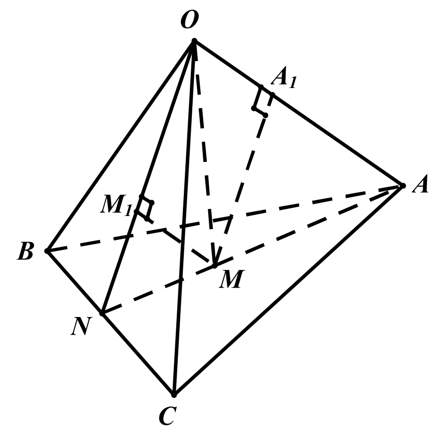
b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC và α,β,γ lần lượt là góc gữa đường thẳng OH với các đường thẳng OA, OB, OC. Tìm giá trị lớn nhất của $\text{A}=\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$

A. $\max A=\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\max A=\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\max A=\frac{1}{2}$ D. $\max A=2$

c) Tìm GTNN của $S=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos^2\gamma}+\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\cos^2\beta}$

A. $\min S=6\sqrt{3}$ B. $\min S=\sqrt{3}$ C. $\min S=6$ D. $\min S=4$

<ins>*Hướng dẫn giải:*</ins>



a) Gọi $N = AM \cap BC$, kẻ $MM_1 \parallel OA$ thì ta có

$$\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 \parallel OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$$

kẻ $MA_1 \perp OA, A_1 \in OA$. Khi đó

$$AM^2 = AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2$$
$$= OM^2 + (AA_1 - OA_1)(AA_1 + OA_1)$$
$$= OM^2 + OA(OA - 2OA_1)$$
$$= OM^2 + OA^2 - 2OA.OA_1$$

Suy ra $\dfrac{AM^2}{OA^2} = \dfrac{OM^2}{OA^2} + 1 - \dfrac{2OA_1}{OA}$ (1).

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 thì ta có

$$\frac{MB^2}{OB^2} = \frac{OM^2}{OB^2} + 1 - \frac{2OB_1}{OB} \ (2) \qquad \frac{MC^2}{OC^2} = \frac{OM^2}{OC^2} + 1 - \frac{2OC_1}{OC} \ (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $T = OM^2\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}\right) - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta đã biết kết quả quen thuộc

$\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{OH^2}$ nên $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Mặt khác $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{NM}{NA} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$ Tương tự $\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \dfrac{OC_1}{OC} = \dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ nên $\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC} = 1$

Do đó $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2$ do $OM \geq OH$. Vậy $\min T = 2$ khi $M \equiv H$.

Cách 2. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Do A, B, C, M đồng phẳng nên tồn tại x, y, z sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ $(x + y + z = 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-1)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, bình phương vô hướng ta được

$$AM^2 = (x-1)^2 a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 \Rightarrow \frac{MA^2}{OA^2} = (x-1)^2 + \frac{y^2b^2}{a^2} + \frac{z^2c^2}{a^2}.$$

Tương tự $\dfrac{MB^2}{OB^2} = \dfrac{x^2a^2}{b^2} + (y-1)^2 + \dfrac{z^2c^2}{b^2}, \dfrac{MC^2}{OC^2} = \dfrac{x^2a^2}{c^2} + \dfrac{y^2b^2}{c^2} + (z-1)^2$

Vì vậy $T = \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)\left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right) + 1 \geq \left(\dfrac{1}{a}.ax + \dfrac{1}{b}.by + \dfrac{1}{c}.cz\right)^2 + 1 = 2$

Vậy $\min T = 2$.

b) Dễ thấy $\alpha = \widehat{AOH}, \beta = \widehat{BOH}, \gamma = \widehat{COH}$.

Ta có $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{OH^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{OH}{OA}\right)^2 + \left(\dfrac{OH}{OB}\right)^2 + \left(\dfrac{OH}{OC}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (1).

Lại có $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$ $(*)$

Áp dụng CT (*) cho x nhận các giá trị α,β,γ và kết hợp với (1) thu được

$\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}+\frac{\cot^2\beta}{1+\cot^2\beta}+\frac{\cot^2\gamma}{1+\cot^2\gamma}=1$.

Đặt $x=\cot^2\alpha, y=\cot^2\beta, z=\cot^2\gamma$ $(x,y,z>0)$ thì bài toán trở thành

Cho $x,y,z>0$ thỏa $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$. Chứng minh $xyz\le\frac{1}{8}$.

Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1\Leftrightarrow 1-\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$ (2).

Tương tự ta có :

$\frac{1}{1+y}\ge 2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}}$ (3) và $\frac{1}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$ (4)

Nhân theo từng vế các BĐT $(2),(3)(4)$ ta được $xyz\le\frac{1}{8}$ $(dpcm)$.

c) Tương tự như câu b) ta có $\min S=6\sqrt{3}$.

Câu 117. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm *O*. Qua *O* có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước

A. Vô số B. 2 C. 3 D. 1

Chọn đáp án A

Câu 118. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

C. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng *a* không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng *b* thì (α) song song với *a*.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau

Chọn đáp án B

Dựa vào đáp án, ta có các nhận xét sau:

• Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song hoặc chéo nhau.

• Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng *a* không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng *b* thì (α) song song với *a* hoặc cắt nhau.

• Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 119. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Gọi *I, J, K* lần lượt là trung điểm của *AB, BC* và *SB*. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $(IJK)//(SAC)$ B. Góc giữa *SC* và *BD* có số đo $60°$

C. $BD\perp(IJK)$ D. $BD\perp(SAC)$

Chọn đáp án B

+) Gọi *I, J, K* lần lượt là trung điểm của *AB, BC* và *SB* nên $\begin{cases} IJ//AC \\ IK//SA \end{cases}\Rightarrow(IJK)//(SAC)$.

+) Gọi *M* là trung điểm của *SA* và *O* là tâm của hình vuông *ABCD* nên $OM//SC$.

Khi đó $\widehat{(SC,BD)}=\widehat{(OM,BD)}=90^\circ$ vì tam giác *MBD* cân tại *M*.

+) Ta có $BD\perp AC$ và $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD$

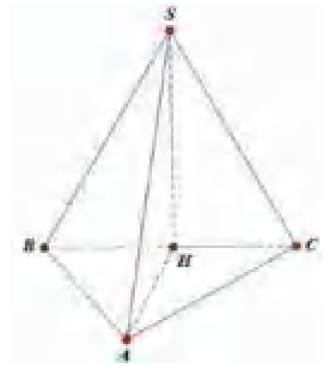
suy ra $BD\perp(SAC)$ mà $(IJK)//(SAC)\Rightarrow BD\perp(IJK)$.

Câu 120. Cho hình chóp *S.ABC* thỏa mãn $SA=SB=SC$. Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (ABC). Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $(SBH)\cap(SCH)=SH$ B. $(SAH)\cap(SBH)=SH$

C. $AB\perp SH$ D. $(SAH)\cap(SCH)=SH$

Chọn đáp án A



Ta có

$HA=\sqrt{SA^2-SH^2}, HB=\sqrt{SB^2-SH^2}, HC=\sqrt{SC^2-SH^2}$.

Bài ra $SA=SB=SC\Rightarrow HA=HB=HC\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà ΔABC vuông tại $A\Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh *BC*.

Khi đó $(SBH)\cap(SCH)=\varnothing\Rightarrow A$ sai.

$(SAH)\cap(SBH)=SH\Rightarrow B$ đúng.

$(SAH)\cap(SCH)=SH\Rightarrow D$ đúng.

Từ $SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp AB\Rightarrow C$ đúng.

Câu 121. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA=SB=SC$ và tam giác *ABC* vuông tại *B*. Vẽ $SH\perp(ABC)$, $H\in(ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. *H* trùng với trung điểm của *AC* B. *H* trùng với trực tâm tam giác *ABC*

C. *H* trùng với trọng tâm tam giác *ABC* D. *H* trùng với trung điểm của *BC*

Chọn đáp án A

Ta có $HA=\sqrt{SA^2-SH^2}, HB=\sqrt{SB^2-SH^2}, HC=\sqrt{SC^2-SH^2}$.

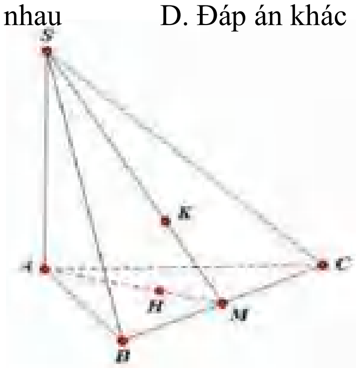
Bài ra $SA=SB=SC\Rightarrow HA=HB=HC\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà ΔABC vuông tại $B\Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh $AC\Rightarrow A$ đúng và B, C, D sai.

Câu 122. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA\perp(ABC)$ và tam giác *ABC* không vuông, gọi *H, K* lần lượt là trực tâm các ΔABC và ΔSBC. Các đường thẳng *AH, SK, BC* thỏa mãn:

A. Đồng quy B. Đôi một song song C. Đôi một chéo nhau D. Đáp án khác

Chọn đáp án A



Gọi $M=AH\cap BC\Rightarrow BC\perp AM$.

$$SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC\Rightarrow\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AM\end{cases}.$$

$\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp SM\Rightarrow SM\perp BC$

Mà *K* là trực tâm của $\Delta SBC\Rightarrow K\in SM$

$\Rightarrow AH,SK,BC$ đồng quy tại *M*.

Câu 123. Mệnh đề nào sau đây **sai**

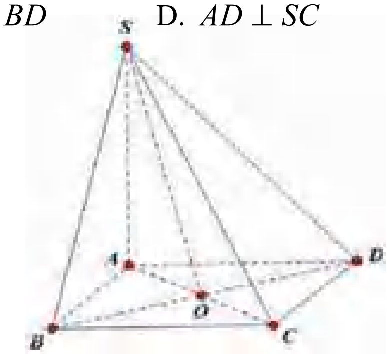
A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
Chọn đáp án B
Rõ ràng A đúng. Đáp án B sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau. Hiển nhiên C, D đúng.
Câu 124. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*. $SA\perp(ABCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $SA\perp BD$ B. $SC\perp BD$ C. $SO\perp BD$ D. $AD\perp SC$

Chọn đáp án D



Từ $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD\Rightarrow A$ đúng.
Từ $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD\Rightarrow BD\perp SA$ mà
$BD\perp AC\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow\begin{cases}BD\perp SC\\BD\perp SO\end{cases}\Rightarrow B$ và *C* đúng.
Rõ ràng *BC* không vuông góc với $\perp SC$ mà $AD//BC$
$\Rightarrow AD$ không vuông góc với $SC\Rightarrow D$ sai.

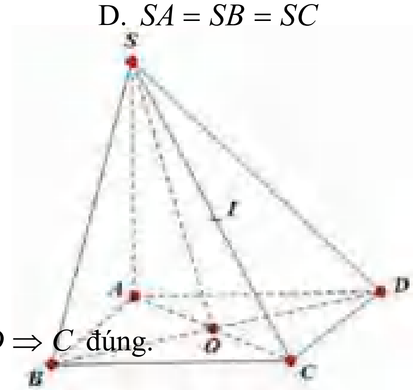
Câu 125. Qua điểm *O* cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Chọn đáp án A
Câu 126. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông có tâm *O*, $SA\perp(ABCD)$. Gọi *I* là trung điểm của *SC*. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $BD\perp SC$ B. $IO\perp(ABCD)$.
C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn *BD* D. $SA=SB=SC$

Chọn đáp án D

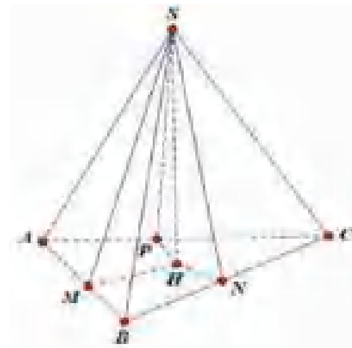


Từ $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD\Rightarrow BD\perp SA$ mà
$BD\perp AC\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC\Rightarrow A$ đúng.
Xét trên (SAC), ta có *OI* là đường trung bình của ΔSAC
$\Rightarrow OI//SA$. Mà $SA\perp(ABCD)\Rightarrow OI\perp(ABCD)$
$\Rightarrow B$ đúng.
Theo trên thì $BD\perp(SAC)\Rightarrow(SAC)\perp BD$ mà $OB=OD\Rightarrow C$ đúng.
Từ $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB\Rightarrow SB>SA\Rightarrow D$ sai.
Câu 127. Cho hình chóp *SABC* có các mặt bên nghiêng đều trên đáy. Hình chiếu *H* của *S* trên (ABC) là:

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*
C. Trọng tâm tam giác *ABC* D. Giao điểm hai đường thẳng *AC* và *BD*

Chọn đáp án A

Kẻ



$HM \perp AB, HN \perp BC, HP \perp CA\left(M \in AB, N \in BC, P \in CA\right)$ Bài ra ta có ngay

$\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} \Rightarrow \tan\widehat{SMH} = \tan\widehat{SNH} = \tan\widehat{SPH}$

$\Rightarrow \dfrac{SH}{HM} = \dfrac{SH}{HN} = \dfrac{SH}{HP} \Rightarrow HM = HN = HP$.

Kết hợp với $HM \perp AB, HN \perp BC, HP \perp CA \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Câu 128. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Nếu đường thẳng *d* vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong $\left(\alpha\right)$ thì *d* vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong $\left(\alpha\right)$.

B. Nếu đường thẳng $d \perp \left(\alpha\right)$ thì *d* vuông góc với hai đường thẳng trong $\left(\alpha\right)$

C. Nếu đường thẳng *d* vuông góc với hai đường thẳng nằm trong $\left(\alpha\right)$ thì $d \perp \left(\alpha\right)$

D. Nếu $d \perp \left(\alpha\right)$ và đường thẳng $a // \left(\alpha\right)$

Chọn đáp án C

Xét đáp án $A \rightarrow \begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ d_1 \cap d_2 = M \\ d_1 \subset \left(\alpha\right) \\ d_2 \subset \left(\alpha\right) \end{cases} \Rightarrow d \perp \left(\alpha\right) \Rightarrow A$ đúng.

Rõ ràng B là đáp án đúng.

Xét đáp án $C \rightarrow \begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ d_1 // d_2 \\ d_1 \subset \left(\alpha\right) \\ d_2 \subset \left(\alpha\right) \end{cases} \Rightarrow d$ có thể cắt $\left(\alpha\right) \Rightarrow C$ sai.

Rõ ràng D là đáp án đúng.

Câu 129. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Mặt phẳng $\left(P\right)$ và đường thẳng *a* không thuộc $\left(P\right)$ cùng vuông góc với đường thẳng *b* thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

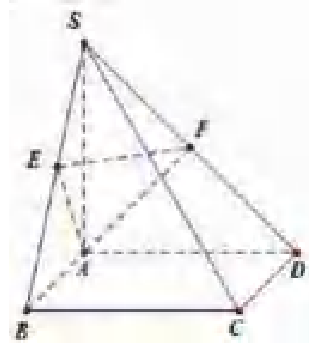
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án A

Câu 130. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. *AE* và *AF* là các đường cao của tam giác *SAB* và *SAD*. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $SC \perp (AFB)$ B. $SC \perp (AEC)$ C. $SC \perp (AED)$ D. $SC \perp (AEF)$

Chọn đáp án D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ mà $AE \perp SB$

$\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AF$ mà $AF \perp SD$

$\Rightarrow AF \perp (SCD) \Rightarrow AF \perp SC$.

Ta có $\begin{cases} SC \perp AE \\ SC \perp AF \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEF)$.

Câu 131. Cho hai đường thẳng phân biệt *a, b* và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a // b$

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$

D. Nếu $a \perp b$ thì $b // (P)$

Chọn đáp án D

Câu 132. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Nếu đường thẳng *a* song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng *b* vuông góc với *a* thì *b* vuông góc với mặt phẳng (P).

B. Nếu đường thẳng *a* song song với đường thẳng *b* và *b* song song với mặt phẳng (P) thì *a* song song hoặc thuộc mặt phẳng (P).

C. Nếu đường thẳng *a* song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng *b* vuông góc với mặt phẳng (P) thì *a* vuông góc với *b*.

D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Chọn đáp án A

Câu 133. Cho tứ diện *ABCD* có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $AB \perp (ABC)$ B. $BC \perp AD$ C. $CD \perp (ABD)$ D. $AC \perp BD$

Chọn đáp án B

Do $\begin{cases} AB = AC \\ DB = DC \end{cases} \Rightarrow AD \perp BC$.

Câu 134. Cho tứ diện *SABC* thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên mp (ABC). Đối với ΔABC ta có điểm *H* là

A. Trực tâm

B. Tâm đường tròn nội tiếp

C. Trọng tâm

D. Tâm đường tròn ngoại tiếp

Chọn đáp án D

Do H là hình chiếu của S lên $\left(ABC\right) \Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Câu 135. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên $\left(ABC\right)$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. H là trực tâm tam giác ABC.

B. $OA \perp BC$.

C. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$

D. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Chọn đáp án C

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp \left(OBC\right) \Rightarrow OA \perp BC$

mà $OH \perp BC \Rightarrow BC \perp \left(OAH\right) \Rightarrow AH \perp BC$

Tương tự $BH \perp AC \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC

Gọi M là trung điểm của BC ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Câu 136. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mp$\left(P\right)$. Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp$\left(P\right)$ nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp$\left(P\right)$.

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp$\left(P\right)$.

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp$\left(P\right)$.

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp$\left(P\right)$.

Chọn đáp án D

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right)$ nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng $\left(P\right)$.

Câu 137. Cho *a, b, c* là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và $b // \left(\alpha\right)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a // b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b, c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng $\left(a,c\right)$.

Chọn đáp án A

Trong không gian nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì chưa chắc $a // c$: Tính chất này chỉ luôn đúng trong hình học phẳng.

Câu 138. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp \left(ABC\right)$ và $AB \perp BC$. Số các mặt của tứ diện $SABC$ là tam giác vuông là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Chọn đáp án D. Các mặt của tứ diện là tam giác vuông là *SAB, SAC, SAD, SBC*.

Câu 139. Cho hai đường thẳng *a, b* và mp$\left(P\right)$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a // mp\left(P\right)$ và $b \perp a$ thì $b // mp\left(P\right)$

B. Nếu $a // mp\left(P\right)$ và $b \perp mp\left(P\right)$ thì $a \perp b$

C. Nếu $a//mp(P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp mp(P)$

D. Nếu $a//mp(P)$ và $b//a$ thì $b//mp(P)$

Chọn đáp án B. Nếu $a//mp(P)$ và $b \perp mp(P)$ thì $a \perp b$.

Câu 140. Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở *B*. *AH* là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SA \perp BC$ B. $AH \perp BC$ C. $AH \perp AC$ D. $AH \perp SC$

Chọn đáp án C

+) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ vì $BC \subset (ABC)$.

+) $SA \perp BC$ và $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ vì $AH \subset (SAB)$.

+) $AH \perp BC$ và $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ vì $SC \subset (SBC)$.

Câu 141. Cho hình chóp *S.ABCD* có $SA \perp (ABC)$ và đáy *ABCD* là hình chữ nhật. Gọi *O* là tâm của *ABC* và *I* là trung điểm của *SC*. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $IO \perp (ABCD)$ B. $BC \perp SB$

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn *BD* D. Tam giác *SCD* vuông ở *D*

Chọn đáp án C

+) *O* là tâm của hình chữ nhật *ABCD* $\Rightarrow O$ là trung điểm của *AC*.

Và *I* là trung điểm của $SC \Rightarrow OI$ là đường trung bình của tam giác SAC

$\Rightarrow OI//SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$

+) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ mà $CD \perp AD$

suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại *D*.

+) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

+) *BD* không vuông góc với mặt phẳng (SAC) vì *BD* không vuông góc với *AC*.

Câu 142. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau

D. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng *AB* vuông góc với *d*

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến *d* của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Chọn đáp án C

Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Câu 143. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Cho hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

D. Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Chọn đáp án A

Dựa vào các đáp án, ta có nhận xét sau:

• Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

• Cho hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

• Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 144. Cho tứ diện *ABCD* có AB, BC, CD đôi một vuông góc. Điểm cách đều *A, B, C, D* là

A. Trung điểm *BC* B. Trung điểm *AD* C. Trung điểm *AC* D. Trung điểm *AB*

Chọn đáp án B

Gọi *I* là trung điểm của *AD*, vì tam giác *ACD* vuông tại *C* nên $IA = ID = IC$.

Ta có $DC \perp AB$ mà $AB \perp BC \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại *B*.

Mà *I* là trung điểm của AD nên $IA = ID = IB$. Do đó $IA = IB = IC = ID$.

Nên điểm cách đều bốn điểm *A, B, C, D* là trung điểm của *AD*.

Câu 145. Cho hình chóp *S.ABCD* có các cạnh bên bằng nhau. Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $HA = HB = HC = HD$

B. Tứ giác *ABCD* nội tiếp được trong đường tròn

C. Các cạnh *SA, SB, SC, SD* hợp với đáy *ABCD* những góc bằng nhau

D. Tứ giác *ABCD* là hình bình hành

Chọn đáp án D

Ta có $\begin{cases} HA = \sqrt{SA^2 - SH^2}, HB = \sqrt{SB^2 - SH^2} \\ HC = \sqrt{SC^2 - SH^2}, HD = \sqrt{SD^2 - SH^2} \end{cases}$

Bài ra $SA = SB = SC = SD \Rightarrow HA = HB = HC = HD$

$\Rightarrow$ Tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn tâm *H*, bán kính $R = HA = HB = HC = HD \Rightarrow A$ và *B* đúng.

Từ đó tứ giác *ABCD* không nhất thiết là hình bình hành $\Rightarrow$ D sai.

Lại có $\begin{cases} \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAH}, \widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{SBH} \\ \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCH}, \widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{SDH} \end{cases}$

Hơn nữa do $SA = SB = SC = SD \Rightarrow \sin\widehat{SAH} = \sin\widehat{SBH} = \sin\widehat{SCH} = \sin\widehat{SDH}$

$\Rightarrow \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \widehat{SDH} \Rightarrow C$ đúng.

Câu 146. Cho hình chóp *S.ABC* thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *S* lên mp(ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. *H* là trực tâm tam giác *ABC*

B. *H* là trọng tâm tam giác *ABC*

C. *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*

D. *H* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*

Chọn đáp án C

Gọi *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *BC*. Khi đó $HM \perp AB, HN \perp BC$.

Tam giác *SAB* cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$, tam giác *SBC* cân tại $S \Rightarrow SN \perp BC$.

Do đó

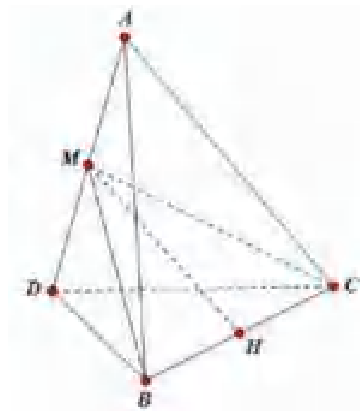
$$\begin{cases} HM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMH) \Rightarrow AB \perp SH, \begin{cases} HN \perp BC \\ SN \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SNH) \Rightarrow BC \perp SH$$

Suy ra $SH \perp (ABC) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của *S* lên (ABC).

Câu 146. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua *B* và vuông góc với *AD*. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$ B. 40 C. $36\sqrt{3}$ D. 36

Chọn đáp án D



Gọi *M* là trung điểm của cạnh *AD*.

Ta có ΔABD và ΔACD đều

$$\Rightarrow \begin{cases} AD \perp BM \\ AD \perp CM \end{cases} \Rightarrow AD \perp (BCM) \Rightarrow (P) \text{ chính là } (BCM).$$

Do đó thiết diện của (P) và hình chóp *ABCD* là ΔBCM.

Ta có ngay $BM = \dfrac{BA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}$

và $CM = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \Delta BCM$ cân tại *M*.

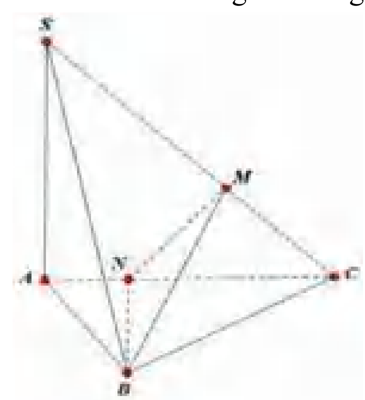
Khi đó gọi *H* là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow MH \perp BC$

$$\Rightarrow S_{BCM} = \frac{1}{2}BC.MH = \frac{1}{2}.12\sqrt{BM^2 - BH^2} = 6\sqrt{72 - 6^2} = 36.$$

Câu 147. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua *B* và vuông góc với *SC*. Thiết diện của (P) và hình chóp *S.ABC* là

A. Hình thang vuông B. Tam giác đều C. Tam giác cân D. Tam giác vuông

Chọn đáp án D



Gọi $\begin{cases} M = (P) \cap SC \\ N = (P) \cap AC \end{cases} \Rightarrow$ thiết diện cần tìm chính là ΔBMN.

Ta có $SC \perp (BMN) \Rightarrow SC \perp BN \Rightarrow BN \perp AC$.

Từ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BN \Rightarrow BN \perp SA$.

Như vậy

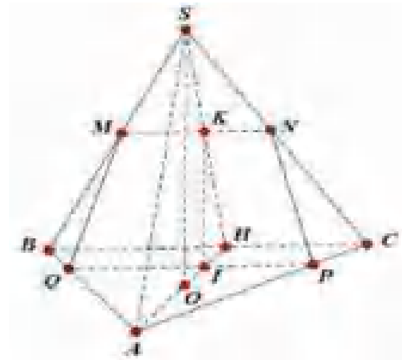
$$\begin{cases} BN \perp SA \\ BN \perp AC \end{cases} \Rightarrow BN \perp (SAC) \Rightarrow BN \perp MN \Rightarrow \Delta BMN$$

vuông tại *N*.

Câu 148. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều, *O* là trung điểm của đường cao *AH* của tam giác *ABC, SO* vuông góc với đáy. Gọi *I* là điểm tùy ý trên *OH* (không trùng với *O* và *H*). Mặt phẳng (P) qua *I* và vuông góc với *OH*. Thiết diện của (P) và hình chóp *S.ABC* là hình gì

A. Hình thang cân B. Hình thang vuông C. Hình bình hành D. Tam giác vuông

Chọn đáp án A



Ta có (P) qua $I \in (ABC)$ và

$(P) \perp OH \subset (ABC) \Rightarrow (P) \perp (ABC)$.

Mà $SO \perp (ABC) \Rightarrow (P)$ qua *K* với $KI//SO(K \in SH)$.

Gọi $P = (P) \cap AC, Q = (P) \cap AB \Rightarrow PQ \perp OH$ mà

$OH \perp BC \Rightarrow PQ//BC$.

Mặt phẳng (P) sẽ qua $M \in SB$ và $N \in SC$.

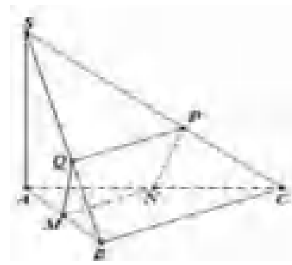
Thiết diện chính cần tìm chính là tứ giác *MNPQ*.

Hơn nữa, ta có ngay tứ giác *MNPQ* là hình thang cân nên thiết diện cần tìm là hình thang cân.

Câu 149. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, cạnh bên *SA* vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm *M* của *AB* và vuông góc với *SB*, cắt *AC, SC, SB* lần lượt tại *N, P, Q*. Tứ giác *MNPQ* là hình gì

A. Hình thang vuông B. Hình thang cân C. Hình bình hành D. Hình chữ nhật

Chọn đáp án A



Qua *M* kẻ đường thẳng vuông góc với *SB* cắt *SB* tại *Q*.

Qua *M, Q* lần lượt kẻ các đường thẳng song song với *BC* cắt các cạnh *AC, SC* lần lượt tại *N, P*.

Khi đó *MNPQ* là thiết diện của mặt phẳng (P) với khối chóp

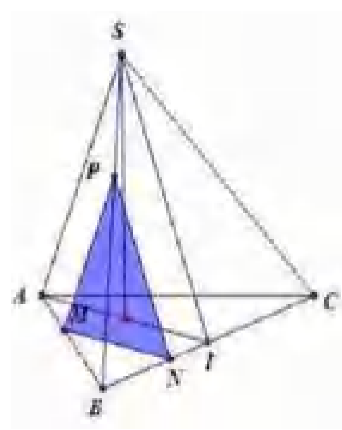
Ta có $QP//MN$ và $MQ \perp PQ$

$\Rightarrow$ *MNPQ* là hình thang vuông.

Câu 150. Cho tứ diện *SABC* có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh *a*, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. *M* là điểm trên *AB* sao cho $AM = b(0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng qua *M* và vuông góc với *BC*. Thiết diện của (P) và tứ diện *SABC* có diện tích bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{4}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}(a-b)^2}{4}$ C. $\dfrac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{16}$ D. $\dfrac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{8}$

Chọn đáp án C



Gọi *I* là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

M kẻ *MN* vuông góc với *BC*, kẻ *MP* song song với *SA*,

$P \in SB \Rightarrow (P) \equiv (MNP)//(SAI) \perp BC$ nên thiết diện là mặt phẳng *MNP*. Ta có

$$\frac{MN}{AI} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{BM}{BA}.AI = \frac{a-b}{a}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$$

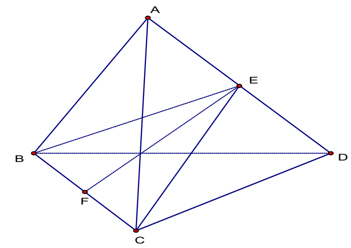
Và $\dfrac{MP}{SA} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow MP = \dfrac{BM}{BA}.SA = \dfrac{a-b}{a}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$.

Do đó tam giác *MNP* là tam giác đều cạnh $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$.

Câu 151. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua *B* và vuông góc với *AD*. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. B. 40. C. $36\sqrt{3}$ D. 36.

Chọn A.



Thiết diện là tam giác BCE, với E là trung điểm của AD.

Gọi F là trung điểm của BC.

Ta có $BE = CE = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$; $EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = 6\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là: $S = \dfrac{1}{2}EF.BC = 36\sqrt{2}$.

Câu 152. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ cho trước

A. Vô số. B. 2. C. 3. D. 1.

Chọn A.

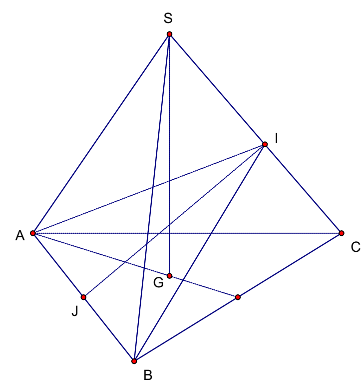
Câu 153. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$ ($a > b\sqrt{2}$). Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) là

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$. B. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$. C. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 + a^2}}{2b}$. D. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 + a^2}}{4b}$.

Chọn A.

Kẻ $AI \perp SC \Rightarrow (AIB) \perp SC$. Thiết diện là tam giác AIB.

Ta có



$AI = AC\sin\widehat{ACS} = a\sqrt{1 - \cos^2\widehat{ACS}} = a\sqrt{1 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 - b^2}{2ab}\right)} = \dfrac{a}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$ Gọi J là trung điểm của AB. Dễ thất tam giác AIB cân tại I, suy ra $IJ \perp AB$.

$IJ = \sqrt{AI^2 - AJ^2} = \dfrac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Do đó: $S = \dfrac{1}{2}AB.IJ = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$.

Câu 154. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$. B. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$. D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Chọn B.

Do AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một nên $AB \perp (BCD)$, suy ra BC là hình chiếu của AC lên (BCD).

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $(SBH)\cap(SCH) = SH$. B. $(SAH)\cap(SBH) = SH$.

C. $AB \perp SH$. D. $(SAH)\cap(SCH) = SH$.

Chọn A. $(SBH)\cap(SCH)=(SBC)$

Câu 156. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là

A. Hình thang vuông. B. Tam giác đều. C. Tam giác cân. D. Tam giác vuông.

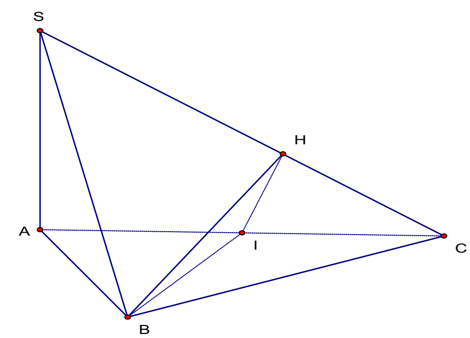
Chọn D.

Gọi I là trung điểm của AC, kẻ $IH \perp SC$.

Ta có $BI \perp AC, BI \perp SA \Rightarrow BI \perp SC$.

Do đó $SC \perp (BIH)$ hay thiết diện là tam giác BIH.

Mà $BI \perp (SAC)$ nên $BI \perp IH$ hay thiết diện là tam giác vuông.



Câu 157. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. H trùng với trung điểm của AC. B. H trùng với trực tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trọng tâm tam giác ABC. D. H trùng với trung điểm của BC.

Chọn A.

+ Ta có tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là trục của tam giác ABC $\Rightarrow d \perp (ABC)$ tại H.

+ Mặt khác: $SA = SB = SC$ nên điểm $S \in d \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Câu 158. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $60°$ B. $75°$ C. $45°$ D. $30°$

Chọn C.

Do H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$

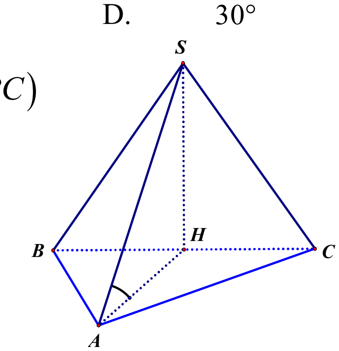
Vậy AH là hình chiếu của SH lên mp (ABC)

$\Rightarrow (SA;(ABC)) = (SA;AH) = \widehat{SAH}$

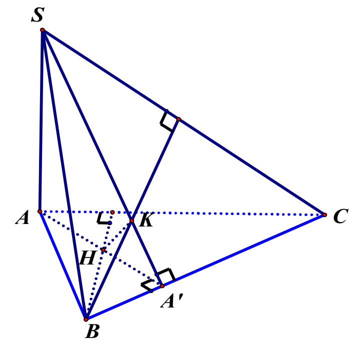
Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH$

Mà: $\triangle ABC = \triangle SBC \Rightarrow SH = AH$.

Vậy tam giác SAH vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{SAH} = 45^0$



Câu 159. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Các đường thẳng AH, SK, BC thỏa mãn:



A. Đồng quy. B. Đôi một song song.

C. Đôi một chéo nhau. D. Đáp án khác.

Chọn A.

Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow AA' \perp BC$ mà $BC \perp SA$ nên $BC \perp SA'$

Vì H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC nên H và K lần lượt thuộc AA' và SA'

Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'

Câu 160. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

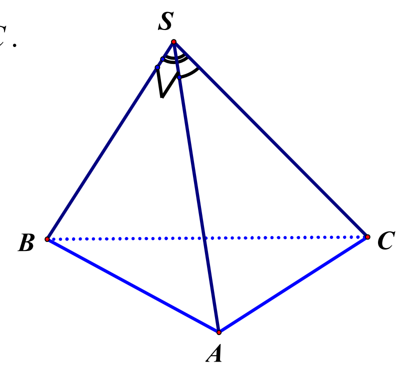
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Chọn B.

Câu B sai vì : Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 161. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^0, \widehat{CSA} = 60^0, \widehat{ASB} = 90^0, SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên $mp\left(ABC\right)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. I là trung điểm AB. B. I là trọng tâm tam giác ABC.

C. I là trung điểm AC. D. I là trung điểm BC.

Chọn D.

Gọi $SA = SB = SC = a$

Ta có : $\triangle SAC$ đều $\Rightarrow AC = SA = a$

$\triangle SAB$ vuông cân tại S $\Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos\widehat{BSC}} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

Gọi I là trung điểm của AC thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là trục của tam giác ABC thì d đi qua I và $d \perp \left(ABC\right)$

Mặt khác : $SA = SB = SC$ nên $S \in d$. Vậy $SI \perp \left(ABC\right)$ nên I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$

Câu 162. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $SA \perp BD$ B. $SC \perp BD$ C. $SO \perp BD$ D. $AD \perp SC$

Chọn D.

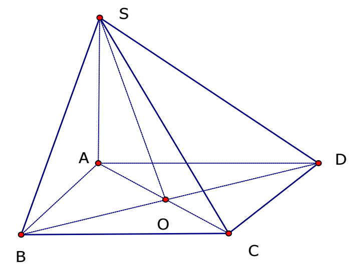
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$, mà $SA \perp BD$ nên

$BD \perp (SAC)$ *hay* $BD \perp SC, BD \perp SO$

AD không vuông góc SC

Chọn đáp án D.



Câu 163. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước

A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Chọn A.

Theo tiên đề qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ

Câu 164. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau

A. $BC \perp (SAH)$. B. $HK \perp (SBC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. SH, AK *và* BC đồng quy.

Chọn C.

Ta có $BC \perp SA, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAH)$

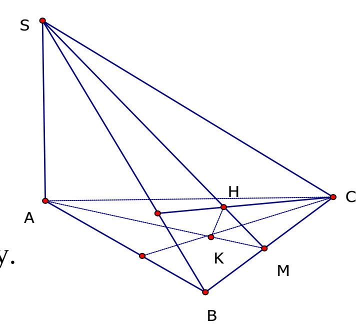
Ta có $CK \perp AB, CK \perp SA \Rightarrow CK \perp (SAB)$ *hay* $CK \perp SB$

Mặt khác có $CH \perp SB$ *nên suy ra* $SB \perp (CHK)$ hay $SB \perp HK$, tương tự $SC \perp HK$ nên $HK \perp (SBC)$

Gọi M là giao điểm của SH và BC.

Do $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$ hay đường thẳng AM trùng với đường thẳng AK. Hay SH, AK *và* BC đồng quy.

Do đó $BC \perp (SAB)$ sai



Câu 165. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì

A. Hình thang cân B. Hình thang vuông C. Hình bình hành D. Tam giác vuông

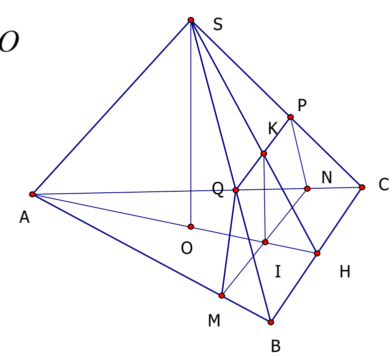
Chọn A.

Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên (P) song song với SO

Suy ra (P) cắt (SAH) theo giao tuyến là đường thẳng qua I và song song với SO cắt SH tại K

Từ giả thiết suy ra (P) song song BC, do đó (P) sẽ cắt $(ABC),(SBC)$ lần lượt là các đường thẳng qua I và K song song với BC cắt AB, AC, SB, SC lần lượt tại M, N, Q, P. Do đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra I là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ, lại có các tam giác ABC đều và tam giác SBC cân tại S suy ra IK vuông góc với MN và PQ dó đó $MNPQ$ là hình thang cân.



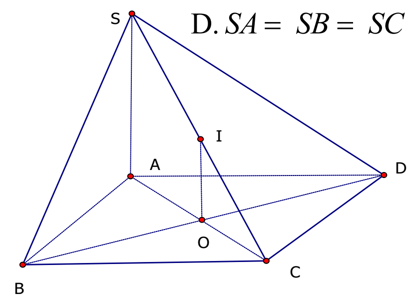
Câu 166. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm $O, SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $BD \perp SC$

B. $IO \perp (ABCD)$.

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD

D. $SA = SB = SC$.



Chọn D.

Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA$ suy ra $BD \perp (SAC)$ hay $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$, và O là trung điểm của BD suy ra (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD Ta có OI song song SA suy ra $IO \perp (ABCD)$.

$SA = SB = SC$ sai

Câu 167. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mp $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha = 30^0$.

B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\alpha = 45^0$.

D. $\alpha = 60^0$.

Chọn D.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa giữa SC và mp $(ABCD)$ bằng góc SC & AC. $\Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có: $\tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$.

Câu 168. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu H của S trên (ABC) là

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. Trọng tâm tam giác ABC.

D. Giao điểm hai đường thẳng AC và BD.

Chọn A.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S lên các cạnh AB, AC, BC.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh $AB, AC, BC \Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} \Rightarrow \Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SPH \Rightarrow HM = HN = NP \Rightarrow H$ là tâm dường tròn nội tiếp của ΔABC.

Câu 169. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Chọn C.

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$. (*ĐL về điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng*).

Câu 170. Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mp (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P)

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Chọn D.

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P). (*ĐN đường thẳng vuông góc với mặt phẳng*).

Câu 171. Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b // (\alpha)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a // b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b, b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c).

Chọn A. Nếu $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases}$ thì a và c có thể trùng nhau

Câu 172. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Số các mặt của tứ diện $S.ABC$ là tam giác vuông là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Chọn D.

Có $AB \perp BC \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \Delta SAB, \Delta SAC$ là các tam giác vuông tại A.

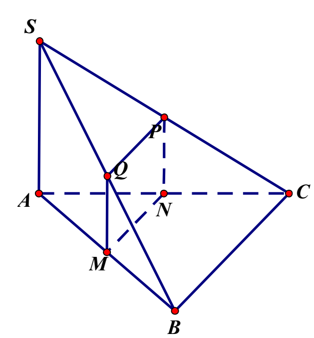
Mặt khác $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ là tam giác vuông tại B.

Vậy bốn mặt của tứ diện đều là tam giác vuông.

Câu 173. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì

A. Hình thang vuông. B. Hình thang cân. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Chọn A.



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$

Vậy $\begin{cases} BC \perp SB \\ (P) \perp SB \end{cases} \Rightarrow (P) // BC (1).$ Mà $(P) \cap (ABC) = MN (2).$

Từ $(1);(2) \Rightarrow MN // BC$. Tương tự ta có $PQ // BC; PN // SA$

Mà $SA \perp BC \Rightarrow PN \perp NM$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại N.

Câu 174. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Mặt phẳng (P) và đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
Chọn A.
Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng có thể chéo nhau hoặc song song với nhau. Vì vậy đáp án A sai.

Câu 175. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi $AE; AF$ lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $SC \perp (AFB)$. B. $SC \perp (AEC)$. C. $SC \perp (AED)$. D. $SC \perp (AEF)$.

Chọn D.
Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$. Vậy: $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \perp SC(1)$

Tương tự : $AF \perp SC(2)$. Từ $(1);(2) \Rightarrow SC \perp (AEF)$.

Câu 176. Cho hình chóp đều, chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:
A. Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đa giác đáy đó.
B. Tất cả những cạnh của hình chóp đều bằng nhau.
C. Đáy của hình chóp đều là miền đa giác đều.
D. Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân.
Chọn B.
Hình chóp đều có thể có cạnh bên và cạnh đáy KHÔNG bằng nhau nên đáp án B sai.

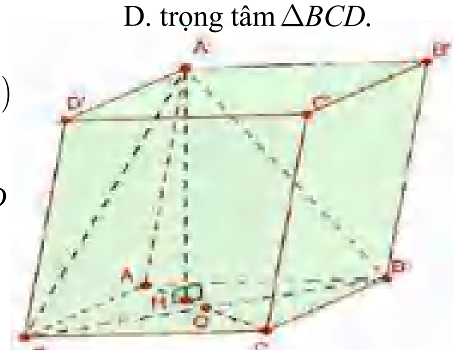
Câu 177. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có đáy là hình thoi $\widehat{BAD} = 60^0$ và $A'A = A'B = A'D$. Gọi $O = AC \cap BD$. Hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ là

A. trung điểm của AO. B. trọng tâm ΔABD.
C. giao của hai đoạn AC và BD. D. trọng tâm ΔBCD.

Chọn B.
Vì $A'A = A'B = A'D \Rightarrow$ hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD (1).

Mà tứ giác $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^0$ nên ΔBAD là tam giác đều (2).

Từ (1) & $(2) \Rightarrow H$ là trọng tâm ΔABD.



Câu 178. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a // b$. B. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.
C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$. D. Nếu $a \perp b$ thì $b // (P)$.

Chọn D. Nếu $b \subset (P)$ thì $a \perp b$

Câu 179. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) có diện tích bằng

A. $\dfrac{3a^2}{8}$. B. $\dfrac{3a^2}{2}$. C. $\dfrac{3}{4}a^2$. D. $\dfrac{2a^2}{3}$.

Chọn C.

Gọi M là trung điểm của BC thì $BC \perp AM\,(1)$.

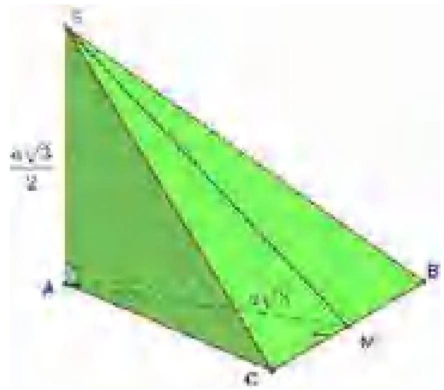
Hiển nhiên $AM = a\sqrt{3}$.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow (P) \equiv (SAM)$

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) chính là ΔSAM. ΔSAM vuông tại A nên

$S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{2}SA.AM = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{4}$.



Câu 180. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với a thì b vuông góc với mặt phẳng (P).

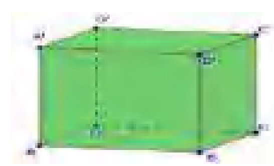
B. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và b song song với mặt phẳng (P) thì a song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P).

C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì a vuông góc với b.

D. Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

Chọn A.

Giả sử xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ có $\begin{cases} A'B'//(ABCD) \\ B'C' \perp A'B' \end{cases}$ nhưng $B'C'//(ABCD)$.



Câu 181. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30^0. B. 60^0. C. 75^0. D. 45^0.

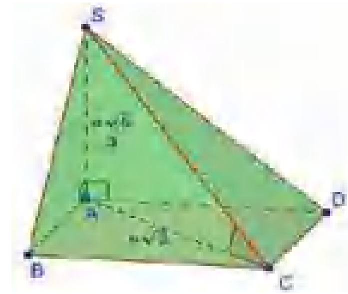
Chọn A.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}.$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa SC và $(ABCD)$.

Tam giác SAC vuông tại A nên

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{1}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0.$



Câu 182. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng

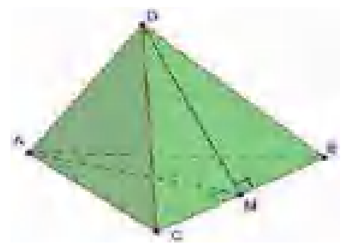
A. $AB \perp (ABC)$. B. $BC \perp AD.$ C. $CD \perp (ABD)$. D. $AC \perp BD.$

Chọn B.

Gọi M là trung điểm của BC.

$\begin{cases} AB = AC \\ DB = DC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp DM \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow BC \perp AD.$



Câu 183. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mp $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

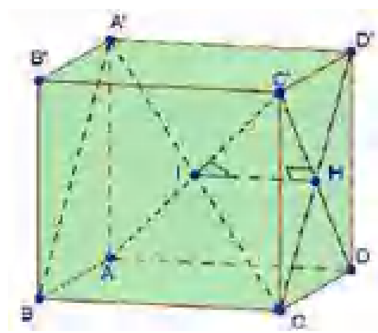
A. $\alpha = 30^0.$ B. $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ C. $\alpha = 45^0.$ D. $\tan\alpha = \sqrt{2}.$

Chọn D.

Gọi $\begin{cases} A'C \cap AC' = I \\ C'D \cap CD' = H \end{cases}$

mà $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' lên $(A'BCD') \Rightarrow \widehat{C'IH}$ là góc giữa AC' và $(A'BCD')$. Mà

$\tan\widehat{C'IH} = \dfrac{C'H}{IH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.2 = \sqrt{2}.$



Câu 184. Cho tứ diện $SABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mp (ABC). Đối với ΔABC ta có điểm H là

A. Trực tâm B. Tâm đường tròn nội tiếp C. Trọng tâm D. Tâm đường tròn ngoại tiếp

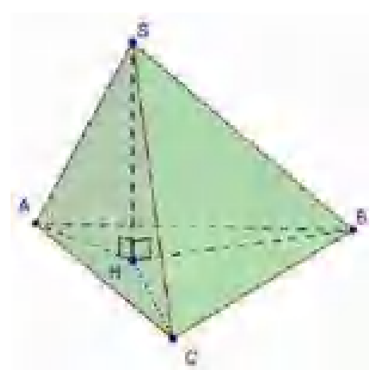
Chọn D.

$SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AH \\ SH \perp BH \\ SH \perp CH \end{cases}$

Xét ba tam giác vuông $\Delta SHA, \Delta SHB, \Delta SHC$ có

$\begin{cases} SA = SB = SC \\ SH \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$ *mà* $H \in (ABC) \Rightarrow H$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC.$



Câu 185. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góC. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**

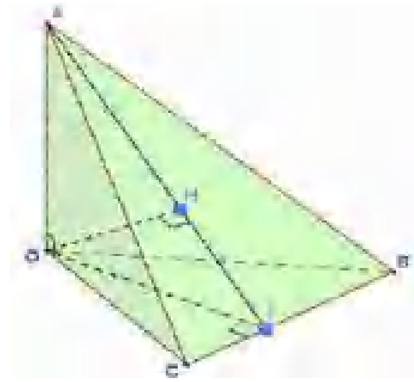
A. $OA \perp BC$.

B. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm ΔABC.

D. $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Chọn D.



$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow$ đáp án A đúng.

Tương tự chứng minh được $OC \perp AB$.

Hạ $\begin{cases} OI \perp BC \\ OH \perp AI \end{cases}$.

Ta có:

$\begin{cases} OI \perp BC \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} \Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp HC\,(1)$. Tương tự $BC \perp OH$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

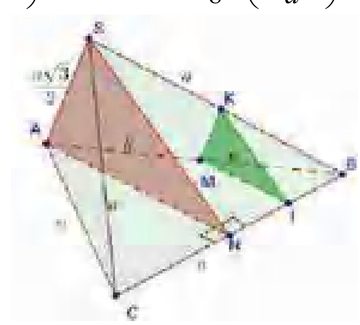
Câu 186. Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, M là điểm trên AB sao cho $AM = b$ $(0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.



Chọn C.

Gọi N là trung điểm của BC.

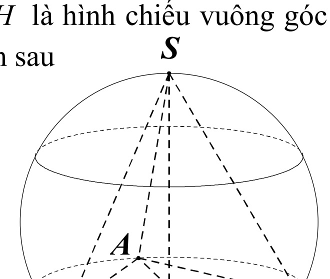
$\begin{cases} SB = SC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SN \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN)$.

Theo bài ra $BC \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ (P)//(SAN) \end{cases}$.

Kẻ $MI//AN, MK//SA \Rightarrow$ Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ là ΔKMI.

$\begin{cases} \Delta ABC \\ \Delta SBC \end{cases}$ là hai tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AN = SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = SA \Rightarrow \Delta SAN$ là tam giác đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta KMI$ là tam giác đều cạnh $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a-b}{a} \Rightarrow S_{\Delta KMI} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

Câu 187. Cho hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. H là trực tâm tam giác ABC.
B. H là trọng tâm tam giác ABC.
C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chọn C.

Do hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $SH \perp (ABC)$
nên SH là trục của hình chóp $S.ABC$ $\Rightarrow HA = HB = HC$.
Nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 188. Cho hai đường thẳng a, b và $mp(P)$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$.
B. Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.
C. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.
D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$.

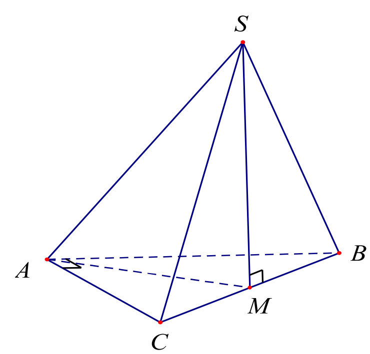
Chọn B.

Câu A sai vì b có thể vuông góc với a.
Câu B đúng bởi $a // (P) \Rightarrow \exists a' \subset (P)$ sao cho $a // a'$, $b \perp (P) \Rightarrow b \perp a'$. Khi đó $\Rightarrow a \perp b$.
Câu C sai vì b có thể nằm trong (P).
Câu D sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu 189. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

Chọn C.



$AM = BM = \frac{a}{2}, SB = a$

Có $SM \perp (ABC)$ nên AM là hình chiếu của SA lên $mp(ABC)$. $\Rightarrow (SA,(ABC)) = (SA, AM) = \widehat{SAM}$.

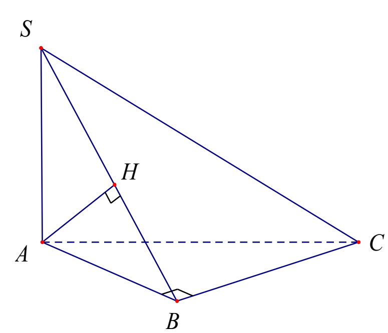
Áp dụng định lý Pytago $SM = \sqrt{SB^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SAM có $\tan\widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAM} = 60^0$.

Câu 190. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở B. AH là đường cao của ΔSAB. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SA \perp BC$. B. $AH \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.

Chọn C.



Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Nên Phương án A đúng.

Có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Phương án D đúng.

Suy ra $AH \perp BC$, $AH \perp SC$. Phương án B, D đúng.
Phương án C sai. Thật vậy với $AH \perp AC$, ta có
$\begin{cases} AH \perp AC \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 191. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc a trùng với b).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Chọn B.

Câu 192. Cho góc tam diện $Sxyz$ với $\widehat{xSy}=120^0$, $\widehat{ySz}=60^0$, $\widehat{zSx}=90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $SA=SB=SC=a$. Tam giác ABC có đặc điểm nào trong các số các đặc điểm sau

A. Vuông cân B. Đều C. Cân nhưng không vuông D. Vuông nhưng không cân

Chọn D.

Xét ΔSAB có $AB^2=SA^2+SB^2-2SA.SB.\cos\widehat{ASB}=3a^2 \Rightarrow AB=a\sqrt{3}$.

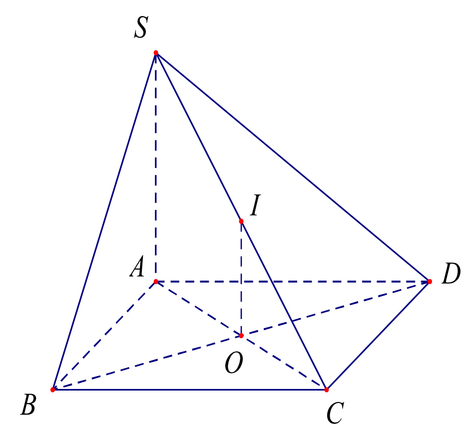
ΔSBC đều $\Rightarrow BC=a.$ ΔSAC có $AB=\sqrt{SA^2+SC^2}=a\sqrt{2}$. Từ đó ΔABC vuông tại C.

Câu 193. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của $ABCD$ và I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $IO\perp(ABCD)$. B. $BC\perp SB$.

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD. D. Tam giác SCD vuông ở D.

Chọn C.



Có IO là đường trung bình tam giác SAC nên $IO//SA$ nên $IO\perp(ABCD)$. Phương án A đúng.

Có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$. Phương án B đúng

Và $\begin{cases}CD\perp AD\\ CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp SD$ nên phương án D đúng.

Phương án C sai. Thật vậy nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD $\Rightarrow BD\perp AC$ (vô lý).

Câu 194. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Với mỗi điểm $A\in(\alpha)$ và mỗi điểm $B\in(\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Chọn D.

Phương án A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
Phương án B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.
Phương án C sai.

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp\left(ABCD\right)$, $SA=a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và $mp\left(SAB\right)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}}$. B. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}$. C. $\alpha=30^0$. D. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Chọn B.

Do $BC\perp\left(SAB\right)$ nên SB là hình chiếu của SC lên $\left(SAB\right)\Rightarrow\left(SC,\left(SAB\right)\right)=\left(SC,SB\right)=\widehat{BSC}$

Xét tam giác SBC có $\tan\widehat{BSC}=\frac{BC}{SB}=\frac{a}{a\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Câu 196. Tính chất nào sau đây không phải là tính chất của hình lăng trụ đứng
A. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình bình hành.
B. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật.
C. Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng bằng nhau và song song với nhau.
D. Hai đáy của hình lăng trụ đứng có các cạnh đôi một song song và bằng nhau.

Chọn A.

Câu 197. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau
A. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mp thì song song với nhau.
C. Cho hai mp song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt mp này thì cũng vuông góc với mp kia.
D. Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Chọn A. Vì qua một đường thẳng dựng được vô số mặt phẳng

Câu 198. Cho hình chóp $S.ABDC$, với đáy $ABDC$ là hình bình hành tâm O; AD,SA,AB đôi một vuông góc $AD=8,SA=6$. (P) là mặt phẳng qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. 20. B. 16. C. 17. D. 36.

Chọn D.

Thiết diện là hình thang vuông đi qua trung điểm các cạnh $AB;CD;CS;SB$, nên diện tích thiết diện là

$$dt=\frac{(BC+\frac{1}{2}BC).\frac{1}{2}SA}{2}=\frac{(8+4)6}{2}=36$$

Câu 199. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=SB=SC=b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Độ dài SG là

A. $\frac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Chọn C.

Theo bài ra hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $SG\perp(ABC),G\in AH$.

Mà $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SH = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}} \Rightarrow SG = SA.\sin\widehat{SAG} = b.\sqrt{1-(\dfrac{AG}{SA})^2} = b\sqrt{1-\dfrac{\frac{a^2}{3}}{b^2}} = \sqrt{\dfrac{3b^2-a^2}{3}}$

Câu 200. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C

A. $b > a\sqrt{2}$. B. $b < a\sqrt{2}$. C. $a < b\sqrt{2}$. D. $a > b\sqrt{2}$.

Chọn C.

Để C_1 nằm giữa S và C thì $\widehat{ASC} < 90^0 \to \cos\widehat{ASC} > 0 \leftrightarrow \dfrac{2b^2 - a^2}{2b^2} > 0 \leftrightarrow b\sqrt{2} > a$

Câu 201. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc. Điểm cách đều các đỉnh A, B, C, D là

A. Trung điểm BC. B. Trung điểm AD. C. Trung điểm AC. D. Trung điểm AB.

Chọn B. Sử dụng tính chất trung điểm của tam giác vuông

Câu 202. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $AB \perp (SAC)$. B. $CD \perp AC$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp (SBD)$.

Chọn C. Do hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA = SC, SB = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$

Câu 203. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao AH vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và $mp(SAD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha = 60°$. B. $\alpha = 30°$. C. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. D. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Chọn D. Gọi I là trung điểm AS, suy ra $BI \perp (SAD) \to \alpha = \widehat{IDB}$.

Ta có: $BI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}, BD = AB\sqrt{2}$. Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{BI}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Câu 204. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

Câu 205. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, SB. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $(IJK) \in (SAC)$. B. Góc giữa SC và BD có số đo $60°$.

C. $BD \perp (IJK)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Chọn B. Gọi M là trung điểm SA, suy ra $\widehat{SC, BD} = \widehat{OM, BD} = 90°$

Câu 206. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $HA = HB = HC = HD$.

B. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.

C. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy $ABCD$ những góc bằng nhau.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Chọn D.

Ta có: $HA=\sqrt{SA^2-SH^2}, HB=\sqrt{SB^2-SH^2}; HC=\sqrt{SC^2-SH^2}; HD=\sqrt{SD^2-SH^2}$, nên các đáp án A, B, C đều đúng

Câu 207. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD=CD=a$, $AB=2a$, $SA\perp(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $CE\perp(SAB)$. B. $CB\perp(SAB)$. C. ΔSDC vuông tại C. D. $CE\perp(SDC)$.

Chọn A. $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE\perp AE \\ CE\perp SA \end{cases} \Rightarrow CE\perp(SAB)$

Câu 208. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, tam giác SAB vuông tại A, tam giác SCD vuông tại D. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. $AC=BD$. B. $SO\perp(ABCD)$. C. $AB\perp(SAD)$. D. $ABCD$ là hình chữ nhật.

Chọn B. $\widehat{(CD,SA)}=\widehat{(AB,SA)}=90^0 \Rightarrow \begin{cases} CD\perp SA \\ CD\perp SD \end{cases} \Rightarrow CD\perp AD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Suy ra đáp án A, C, D đúng

Câu 209. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và $mp(BCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\cos\alpha=0$. D. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn A.

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(BCD)$, a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD$.

Ta có $\alpha=\widehat{ABH}$, $BH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. $\cos\alpha=\frac{BH}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 210. Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH\perp(BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $CD\perp BD$. B. $AC=BD$. C. $AB=CD$. D. $AB\perp CD$.

Chọn D. $\begin{cases} CD\perp AH \\ CD\perp BH \end{cases} \Rightarrow CD\perp(ABH)\Rightarrow CD\perp AB$

Câu 211. Tìm mệnh đề đúng trong các mặt phẳng sau

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

Chọn D.

Đáp án A sai vì hai đường thẳng đó có thể chéo nhau.

Đáp án B sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.

Đáp án C sai vì hai đường thẳng đó có thể trùng nhau.

Câu 212. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây đúng

A. O là trọng tâm tam giác ABC. B. O là trực tâm tam giác ABC.

C. O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. D. O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Chọn D.

Ta có $\Delta SOA=\Delta SOB=\Delta SOC\Rightarrow OA=OB=OC\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Câu 213. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông, gọi H, K lần lượt là trực tâm các ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi HK và $mp(SBC)$ là

A. $65°$. B. $90°$. C. $45°$. D. $120°$.

Chọn B.

Gọi $I = AH \cap BC$. Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$ và $K \in SI$.

Ta lại có $\begin{cases} SB \perp CK \\ SB \perp CH \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CHK) \Rightarrow (SBC) \perp (CHK)$.

Mà $HK = (SAI) \cap (SHK)$, suy ra $HK \perp (SBC)$

Câu 214. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào sau đây **có thể sai**

A. $CH \perp AK$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp SA$. D. $AK \perp SB$.

Chọn D.

Ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$.

Từ đó suy ra $CH \perp AK, CH \perp SB, CH \perp SA$ nên A, B, C đúng.

Đáp án D sai trong trường hợp SA và AB không bằng nhau

Câu 215. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên $mp(ABC)$. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau

A. H là trực tâm ΔABC. B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

C. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$. D. CH là đường cao của ΔABC.

Chọn B.

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ và $OH \perp BC \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$.

Tương tự, ta có $AB \perp CH$, suy ra đáp án A, D đúng.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$, với $I = AH \cap BC$, suy ra đáp án C đúng.

Câu 216. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $mp(BCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**

A. H là trực tâm tam giác BCD. B. $CD \perp (ABH)$.

C. $AD \perp BC$. D. Các khẳng định trên đều sai.

Chọn D.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$. Tương tự $BD \perp CH$

Suy ra H là trực tâm ΔBCD. Suy ra đáp án A, B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$, suy ra C đúng.

Câu 217. Trong không gian tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là:

A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB B. Đường trung trực của đoạn thẳng AB.

C. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AB

Chọn A.

Câu 218. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

A. O là trung điểm cạnh BD B. O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

C. O là trung điểm cạnh AD D. O là trọng tâm tam giác ACD

Chọn C.

Ta có : $CD \perp AB, CD \perp BC \Rightarrow CD \perp (SAB) \Rightarrow CD \perp AC \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

Tương tự : $AB \perp BC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B

Gọi O là trung điểm AD $\Rightarrow OA = OB = OC = OD$

Câu 219. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và (ABC).

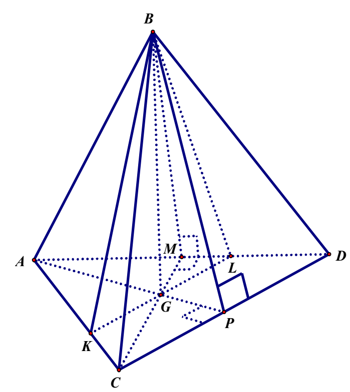
A. $75°$ B. $30°$ C. $45°$ D. $60°$

Chọn D. $\widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SBA} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

Câu 220. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, AP là đường cao của tam giác ACD. Mặt phẳng (P) qua B vuông góc với AP cắt mp(ACD) theo đoạn giao tuyến có độ dài bằng

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

Chọn C.



Ta có : $CD \perp AP, CD \perp BP \Rightarrow CD \perp (APB) \Rightarrow BG \perp CD$

Tương tự : $AD \perp CM, AD \perp BM \Rightarrow AD \perp (BCM) \Rightarrow AD \perp BG$

Suy ra : $BG \perp (ABC) \Rightarrow BG \perp AP$

Kẻ KL đi qua trọng tâm G của ΔACD và song song với CD

$\Rightarrow AP \perp KL \Rightarrow (P)$ chính là mặt phẳng (BKL)

$\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \frac{2}{3}CD = 8$

Có thể nói nhanh theo tính chất tứ diện đều:

Gọi G là trọng tâm ΔACD thì G là tâm ΔACD và $BG \perp (ACD)$

Trong $mp(ACD)$ kẻ qua G đường thẳng song song với CD cắt AC, AD lần lượt tại K, L

Ta có $(BKL) \perp (ACD), AP \perp KL \Rightarrow AP \perp (BKL)$. Vậy $(P) \equiv (BKL)$

$\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \frac{2}{3}CD = 8$.

Câu 221. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp$(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha = 45°$ B. $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\alpha = 30°$

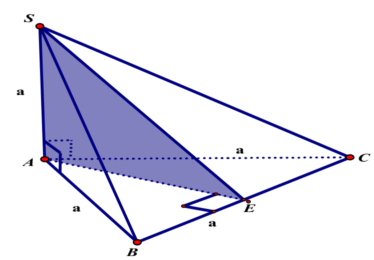
Chọn B. Ta có $\widehat{AC_1,(ABCD)} = \widehat{CAC_1} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 222. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

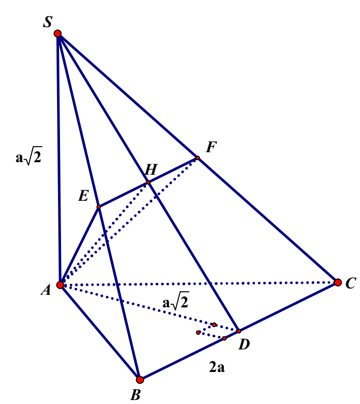
A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mp chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

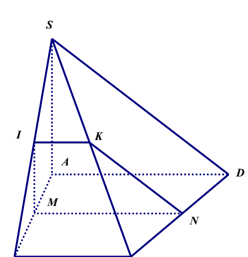
C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
Chọn C.
Câu 223. Tập hợp các điểm cách đều các đỉnh của một tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó và đi qua:
A. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. B. Trọng tâm tam giác đó.
C. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. D. Trực tâm tam giác đó.
Chọn A.
Câu 224. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$, $SA=a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ có diện tích bằng
A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B. $\dfrac{a^2}{6}$ C. $\dfrac{a^2}{2}$ D. a^2
Chọn A.
Kẻ $AE\perp BC, SA\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAE)\equiv(P)$
Thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABC$ là tam giác SAE có diện tích :
$S_{\Delta SAE}=\dfrac{1}{2}SA.AE=\dfrac{1}{2}a.a\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Câu 225. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau
A. Nếu $a\perp(P)$ và $b\perp a$ thì $b\in(P)$. B. Nếu $a\in(P)$ và $a\in b$ thì $b\in(P)$.
C. Nếu $a\in(P)$ và $b\perp a$ thì $b\perp(P)$. D. Nếu $a\in(P)$ và $b\perp(P)$ thì $b\perp a$.
Câu 226. Tam giác ABC có $BC=2a$, đường cao $AD=a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của SB và SC. Diện tích tam giác AEF bằng
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$ C. $\dfrac{1}{2}a^2$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$
Chọn C.
Do $AD\perp BC, SA\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAD)$
$\Rightarrow BC\perp AH\Rightarrow EF\perp AH\Rightarrow S_{\Delta AEF}=\dfrac{1}{2}EF.AH$
Mà $EF=\dfrac{1}{2}BC=a$. Do H là trung điểm $SD\Rightarrow AH=a$
$\Rightarrow S_{\Delta AEF}=\dfrac{1}{2}a^2$



Câu 227. Cho hình chóp $S.ABCD$, với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD=8$, $BC=6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=6$. Gọi M là trung điểm AB. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?
A. 10. B. 20. C. 15. D. 16.
Chọn C.



Do $(P)\perp AB \Rightarrow (P)\in SA$

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI \in SA \Rightarrow MI \subset (P)$

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK \in BC$, mà $MN \in BC \Rightarrow MN \in IK$

$\Rightarrow IK \subset (P)$

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M

Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác SAB $\Rightarrow MI = \dfrac{1}{2}SA = 3$

IK là đường trung bình của tam giác SBC $\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}BC = 3$

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}(AD+BC) = 7$

Khi đó $S_{MNKI} = \dfrac{IK+MN}{2}.MI = \dfrac{3+7}{2}.3 = 15$

Câu 228. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây

A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Chọn A.

Ta có:

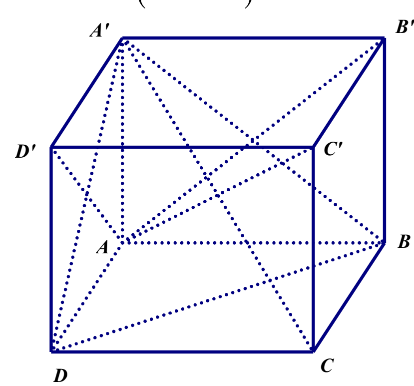
$$\begin{cases} A'D \perp AD' & (t/c\ HV) \\ A'D \perp C'D' & (C'D' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$$

$\Rightarrow A'D \perp (AC'D') \Rightarrow A'D \perp AC' \quad (1)$

$$\begin{cases} A'B \perp AB' & (t/c\ HV) \\ A'B \perp B'C' & (B'C' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$$

$\Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC' \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AC' \perp (A'BD)$



Câu 229. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. B. $\tan\alpha = \sqrt{3}$. C. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan\alpha = 1$.

Chọn C.

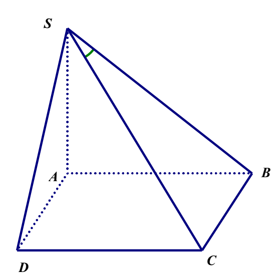
Ta có: $S \in (SAB) \Rightarrow S$ là hình chiếu của S trên (SAB) (1)

$$\left.\begin{cases} BC \perp AB & (t/c\ HV) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$\Rightarrow$ B là hình chiếu của C trên (SAB) (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow \left[\widehat{SC,(SAB)}\right] = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{BSC} = \alpha$

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$



Xét tam giác SBC vuông tại B ta có: $\tan\alpha = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 230. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc và $AB = a, BC = b, CD = c$. Độ dài AD

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. B. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. C. $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$. D. $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

Chọn A.

Ta có: $BC \perp CD \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2+CD^2} = \sqrt{b^2+c^2}$

Mặt khác: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD$, $AD = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 231. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Chọn D.

Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 232. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của 2 đường chéo và $SA = SC$. Các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

A. $SA \perp (ABCD)$. B. $BD \perp (SAC)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $AB \perp (SAC)$.

Chọn C.

Ta có: $SA = SC \Rightarrow SAC$ là tam giác cân

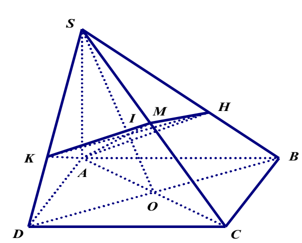
Mặt khác: O là trung điểm của AC (tính chất hình thoi)

Khi đó ta có: $AC \perp SO \quad \Rightarrow \begin{cases} AC \perp BD & (t/c\ hinh\ thoi) \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Câu 233. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại H, M, K. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $AK \perp HK$. B. $HK \perp AM$. C. BD€ HK. D. $AH \perp SB$.

Chọn A.



Ta có:

$\begin{cases} BD \perp AC & (t/\ c\ \text{HV}) \\ BD \perp SA & (gt) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM$

Gọi $O = AC \cap BD, I = SO \cap HK$, (P) là mặt phẳng A và vuông g

Qua I kẻ $\Delta \in BD \Rightarrow \Delta \perp AM \Rightarrow \Delta \subset (P)$. Khi đó: $K = \Delta \cap SD, H$

Ta có: $AK \perp (SDC)$, mà $HK \cap (SDC) = K \Rightarrow AK$ không vuông góc với HK.

Câu 234. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC). Khẳng định nào sau đây đúng

A. H là trung điểm cạnh AB. B. H là trung điểm cạnh AC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. D. H là trọng tâm tam giác ABC.

Chọn B. Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB & (gt) \\ BC \perp SA & (gt) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B

O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC nên ta có O là trung điểm của SC

H là hình chiếu vuông góc của O lên $(ABC) \Rightarrow OH \perp (ABC)$

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \in OH \Rightarrow OH \subset (SAC)$

Vậy ta có OH là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow H$ là trung điểm của AC.

Câu 235. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, $BD = 4a$, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$.

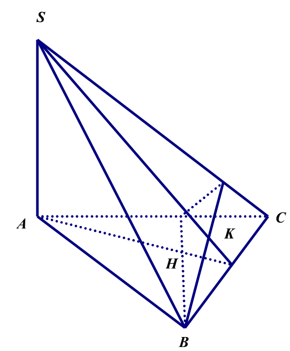
A. $30°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $75°$.

Chọn B.

Câu 236. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi SC và (BHK) là

A. $45°$. B. $120°$. C. $90°$. D. $65°$.

Chọn C.



Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC & (gt) \\ BH \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Mà $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$

Câu 237. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng 45^0. Tính độ dài SO.

A. $SO = a\sqrt{3}$. B. $SO = a\sqrt{2}$. C. $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn B. $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AO = a\sqrt{2}$

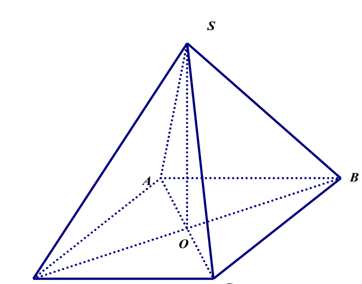
Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của SA. Góc giữa SA và $(ABCD)$ là $\widehat{SAO} = 45^0$

Xét tam giác SAO ta có: $\tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$

Câu 238. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Trong các tam giác sau tam giác nào không phải là tam giác vuông.

A. ΔSBC. B. ΔSCD. C. ΔSAB. D. ΔSBD.

Chọn D.



Ta có :

$\begin{cases} AB \perp AD & (tc\ \text{HV}) \\ AB \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$

Giả sử $SB \perp SD \Rightarrow SD \perp (SAB)$ (vô lý)

Hay ΔSBD không thể là tam giác vuông.

Câu 239. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD),(CDA),(DAB),(ABC)$ lần lượt tại A', B', C', D'. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1.Khẳng định nào sau đây là đúng nhất. Chứng minh M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

A. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

B. M là trực tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

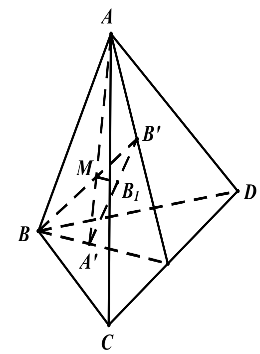
C. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

D. M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

Chọn C.

Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên tồn tại $x, y, z, t > 0$ sao cho

$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} + t\overrightarrow{MD} = \vec{0}$ (1)



Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD).

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (BCD) \\ (BB'A') \cap (\alpha) = MB_1 \\ (BB'A') \cap (BCD) = BA' \end{cases} \Rightarrow MB_1 \parallel BA'$.

Do đó $\dfrac{MB_1}{BA'} = \dfrac{MB'}{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = \dfrac{MB'}{BB'}\overrightarrow{BA'}$ (2)

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$x\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MB'} + t\overrightarrow{MB'} = \vec{0} \Rightarrow (x+y+z)\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Rightarrow (x+y+z+t)\overrightarrow{MB'} = y\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \dfrac{MB'}{BB'} = \dfrac{y}{x+y+z+t}$

Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MB_1} = \dfrac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{BA'}$ (3).

Tương tự ta có $\overrightarrow{MC_1} = \dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{CA'}$ (4) $\quad \overrightarrow{MD_1} = \dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{DA'}$ (5)

Mặt khác chiếu các vectơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD)theo phương AA' thì thu được $y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C} + t\overrightarrow{A'D} = \vec{0}$.

Vậy từ $(3),(4),(5)$ ta có $\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \dfrac{1}{x+y+z+t}\left(y\overrightarrow{BA'} + z\overrightarrow{CA'} + t\overrightarrow{DA'}\right) = \vec{0}$, hay M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai mặt phẳng

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$
- Giả sử (P) ∩ (Q) = c. Từ I ∈ c, vẽ $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{(P),(Q)}\right) \le 90^0$

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S′ là diện tích của hình chiếu (H′) của (H) trên (Q), φ = $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)$. Khi đó: S′ = S.cosφ

3. Hai mặt phẳng vuông góc

- (P) ⊥ (Q) ⇔ $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$
- Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau: $\begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

4. Tính chất

- $\begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$
- $\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$

5. Phương pháp tìm góc giữa hai mặt phẳng

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau

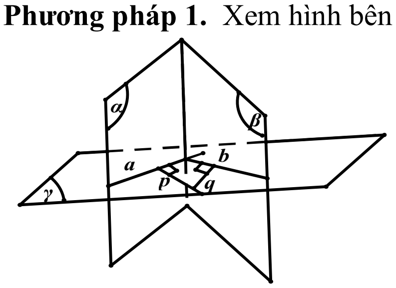
Cách 1. Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng chính là góc giữa hai mặt phẳng.

Cách 2. Tìm hai vectơ có giá lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng khi đó góc giữa hai mặt phẳng bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ đó.

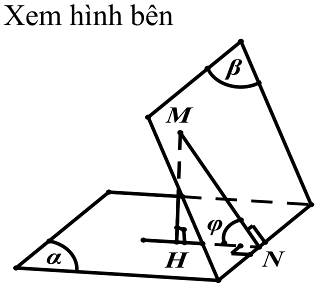
Cách 3. Sử dụng công thức hình chiếu.

Cách 4. Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính. Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai phương pháp sau

Phương pháp 1. Xem hình bên



Phương pháp 2. Xem hình bên



6. Phương pháp chứng minh các yếu tố vuông góc

a. Để chứng minh (P) ⊥ (Q), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

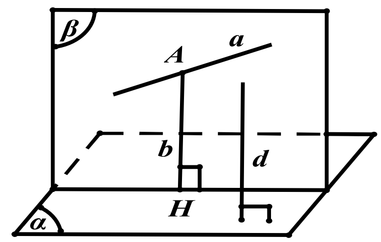
- Chứng minh trong (P) có một đường thẳng a mà a ⊥ (Q).
- Chứng minh $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$

b. Để chứng minh d ⊥ (P), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh d ⊂ (Q) với (Q) ⊥ (P) và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).
- Chứng minh d = (Q) ∩ (R) với (Q) ⊥ (P) và (R) ⊥ (P).
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

7. Phương pháp tìm thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng a không vuông góc với (α). Xác định mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với (α).



Để giải bài toán này ta làm theo các bước sau:

- Chọn một điểm $A \in a$
- Vẽ đường thẳng b đi qua A và vuông góc với (α).

Khi đó $mp(a,b)$ chính là mặt phẳng (β).

CÂU HỎI TNKQ

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

D. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hướng dẫn giải: **Chọn C**

Câu 2. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

B. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B**

Câu 3. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có một cạnh bên vuông góc với đáy. Xét bốn mặt phẳng chứa bốn mặt bên và mặt phẳng chứa mặt đáy. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Có ba cặp mặt phẳng vuông góc với nhau **B.** Có hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau

C. Có năm cặp mặt phẳng vuông góc với nhau **D.** Có bốn cặp mặt phẳng vuông góc với nhau

Hướng dẫn giải: **Chọn C**

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Một mặt phẳng (P) và một đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì $(P)//a$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu hình hộp có bốn mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

B. Nếu hình hộp có ba mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Nếu hình hộp có hai mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

D. Nếu hình hộp có năm mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Câu 6. Trong các mệnh đề sau đây, hãy tìm mệnh đề đúng

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Câu 7. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và gọi $d=(\alpha)\cap(\beta)$.

I. Nếu $a\subset(\alpha)$ và $a\perp d$ thì $a\perp(\beta)$.

II. Nếu $d'\perp(\alpha)$ thì $d'\perp d$.

III. Nếu b $\perp$ d thì b $\subset$ (α) hoặc b $\subset$ (β).

IV. Nếu (γ) $\perp$ d thì (γ) $\perp$ (α) và (γ) $\perp$ (β).

Các mệnh đề đúng là

A. I, II và III. **B.** III và IV. **C.** II và III. **D.** I, II và IV.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Câu 8. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Câu 9. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), a là một đường thẳng nằm trên (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**

A. Nếu $a//b$ với $b=(P)\cap(Q)$ thì a$//(Q)$.

B. Nếu $(P)\perp(Q)$ thì $a\perp(Q)$.

C. Nếu a cắt (Q) thì (P) cắt (Q).

D. Nếu $(P)//(Q)$ thì $a//(Q)$.

Hướng dẫn giải: Gọi $b=(P)\cap(Q)$ nếu $a//b$ thì $a//(Q)$. **Chọn B.**

Câu 10. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a\perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha)\perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Câu 11. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Qua M dựng đường thẳng d vuông cóc với (P) và (Q). Khi đó có vô số mặt phẳng xoay quanh d thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Câu 13. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng

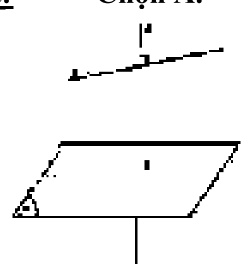
A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

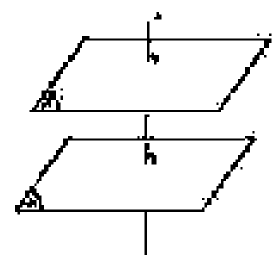
C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

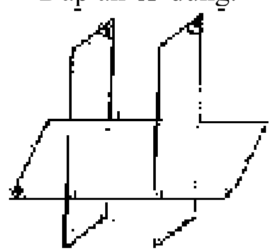
Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



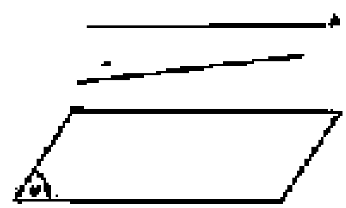
Đáp án A đúng.



Đáp án B sai.



Đáp án C sai.



Đáp án D sai.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

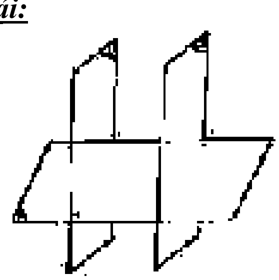
A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

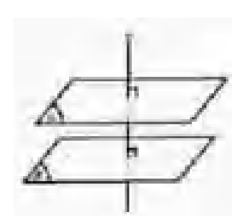
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

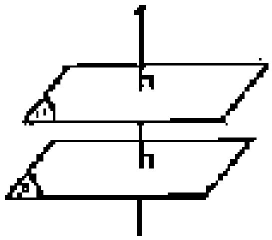
Hướng dẫn giải:



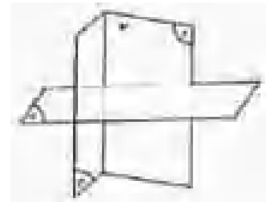
Đáp án A đúng



Qua một đường thẳng có **vô số** mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng B đúng



Đáp án C đúng.



Qua một điểm có **vô số** mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Đáp án D sai.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

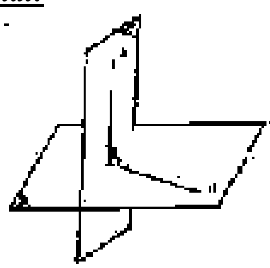
A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

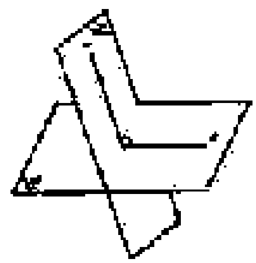
C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

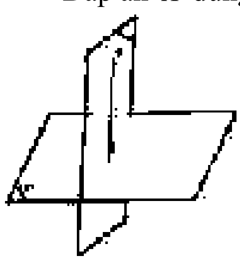
<u>Hướng dẫn giải:</u>



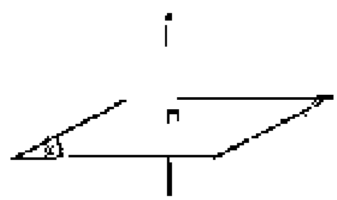
Đáp án A đúng.



Đáp án B sai.



Đáp án C đúng.



Đáp án D đúng.

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước, đường thẳng đó là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau đã cho. Chọn **C.**

Câu 17. Cho a, b, c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$ nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

D. Cho $a // b$, mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Câu 18. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. mặt phẳng (Q) chứa b và đường vuông góc chung của a và b thì $mp(Q) \perp a$.

B. mặt phẳng (R) chứa b và chứa đường thẳng $b' \perp a$ thì $mp(R) \perp a$.

C. mặt phẳng (α) chứa a, $mp(\beta)$ chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. mặt phẳng (P) chứa b thì mặt phẳng $(P) \perp a$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A**

Giả sử AB là đoạn vuông góc chung của a và b thì $mp(Q) \equiv (AB,b)$ mà $a \perp AB,\ a \perp b,\ a \perp (AB,b) \Rightarrow a \perp mp(Q)$

Câu 19. Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$.

B. Nếu $b \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$.

D. Nếu $c // m$ thì $c // (\alpha)$ hoặc $c // (\beta)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn C** Do $a \subset (\alpha)$, $a \perp m$, $(\alpha) \perp (\beta)$ nên $a \perp (\beta)$

Câu 20. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Câu A sai vì a,b có thể trùng nhau.

Câu C sai vì khi a,b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) không vuông góc với a.

Câu D sai vì khi a,b chéo nhau và vuông góc với nhau, ta gọi (α) là mặt phẳng chứa a, song song với b và (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a thì $(\alpha) // (\beta)$

Câu 21. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Mệnh đề A sai vì có thể xảy ra trường hợp hai mặt phẳng vuông góc với nhau nhưng đường thẳng thuộc mặt phẳng này song song với mặt phẳng kia.
Mệnh đề B sai vì xảy ra trường hợp hai mặt phẳng song song.
Mệnh đề C sai vì xảy ra trường hợp hai mặt phẳng vuông góc.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai đường thẳng không cắt nhau, không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn B.**

Mệnh đề sai vì còn trường hợp chéo nhau hoặc trùng nhau.
Mênh đề C sai vì còn trường hợp hai đường thẳng chéo nhau.
Mênh đề D sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn D**

* Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước, chúng nằm trong mặt phẳng đi qua điểm đó và vuông góc với một đường thẳng cho trước $\Rightarrow$ "Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước": SAI
* Có vô số mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước, trong trường hợp: đường thẳng cho trước vuông góc với mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$:Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước": SAI
* Có vố số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$"Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước": SAI

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH. Xét các mệnh đề sau:

(I) $SA = SB = SC$.

(II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(III) Tam giác ABC là tam giác đều.

(IV) H là trực tâm tam giác ABC.

Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều

A. (III) và (IV). **B.** (II) và (III). **C.** (I) và (II). **D.** (IV) và (I).

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn C**

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân đỉnh S.

B. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau.

C. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân.

D. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn A**

Câu 26. Trong lăng trụ đều, khẳng định nào sau đây **sai**

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình bình hành.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

A. Vì lăng trụ đều nên các cạnh bằng nhau. Do đó đáy là đa giác đều.

B. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các mặt bên vuông góc với đáy.

C. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên vuông góc với đáy.

D. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình vuông.

Câu 27. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Hướng dẫn giải: **Chọn B**

Câu 28. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

B. Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

D. Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn giải: **Chọn B**

A sai vì đáy có thể là hình bình hành. B đúng

C sai vì đáy có thể là hình bình hành. D sai vì đáy có thể là hình bình hành.

Câu 29. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu tứ diện $AB'C'D'$ đều

A. Hình lập phương **B.** Hình hộp chữ nhật **C.** Hình hộp thoi **D.** Đáp số khác

Hướng dẫn giải: **Chọn A**

Câu 30. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây

A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

B. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.

C. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông.

D. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hướng dẫn giải: **Chọn C**

Câu 31. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu tứ diện $AA'B'D'$ có các cạnh đối vuông góc.

A. Hình lập phương **B.** Hình hộp tam giác **C.** Hình hộp thoi **D.** Hình hộp tứ giác

Hướng dẫn giải:

Ta có $AA' \perp B'D', A'D' \perp AB', A'B' \perp AD'$ suy ra Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Câu 32. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) (hoặc $(Q) \equiv (R)$).

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Câu 33. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với đường cao SH. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi các cạnh bên bằng nhau

B. H là trung điểm của một cạnh đáy khi hình hộp đó có một mặt bên vuông góc với mặt đáy.

C. H trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi các góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau.

D. H thuộc cạnh đáy thì hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với đáy

Hướng dẫn giải: **Chọn A**

Câu 34. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Hình lăng trụ tam giác có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

B. Hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

C. Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Giả sử lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên $(AA'B'B),(AA'C'C)$ là hình chữ nhật, khi đó ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AA' \perp AC \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (ABC)$. Vậy là $ABC.A'B'C'$ lăng trụ đứng.

Theo định nghĩa hình chóp đều và hình lăng trụ đều ta có đáp án B, C đúng.

Câu 35. Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng m. Gọi a,b,c,d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$.

B. Nếu $c \perp m$ thì $c \perp (Q)$.

C. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$.

D. Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Áp dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là $\widehat{CBD}$.

B. $(BCD) \perp (AIB)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB}$.

D. $(ACD) \perp (AIB)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A**

Tam giác BCD cân tại B có I trung điểm đáy CD

$\Rightarrow CD \perp BI$ (1)

Tam giác ACD cân tại A có I trung điểm đáy CD

$\Rightarrow CD \perp AI$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABI)$. Vậy A: sai

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng A và góc $\hat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong tam giác SAC kẻ $IK \perp SA$ tại K. Tính số đo góc $\widehat{\text{BKD}}$

A. 60^0.

B. 45^0.

C. 90^0.

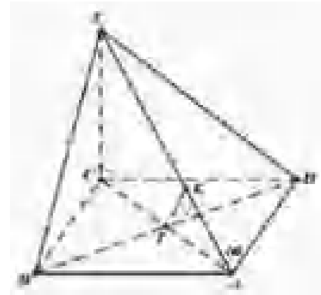
D. 30^0.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Ta có $CH = \dfrac{CS.CA}{\sqrt{CS^2 + CA^2}} = a; (CA = 2AI = a\sqrt{3})$;

$IK = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{1}{2}a = IB = ID$.

với H là hình chiếu của C lên SA, K là hình chiếu của I lên SA.



Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa (ABC) và (ABD) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Đặt $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AB.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $CI \perp AB$ và $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$ và $DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó, $((ABC),(ABD)) = (CI, DI) = \widehat{CID} = \alpha$.

Tam giác CID có $\cos\alpha = \dfrac{IC^2 + ID^2 - CD^2}{2.IC.ID} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{3a^2}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 39. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

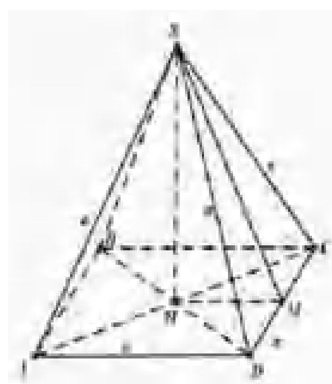
Giả sử gọi hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là $S.ABCD$ có đường cao SH.

Ta có: $(SCD) \cap (ABCD) = CD$. Gọi M là trung điểm CD.

Dễ chứng minh được $SM \perp CD$ và $HM \perp CD$

$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SM, HM) = \widehat{SMH} = \alpha$.

Từ giả thiết suy ra ΔSCD là tam giác đều cạnh a có SM là đường trung tuyến $\Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

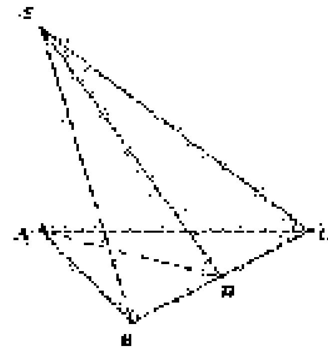


Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SC \perp (ABC)$ **B.** $O \in SH$ **C.** $(SAH) \perp (SBC)$ **D.** $((SBC),(ABC)) = \widehat{SBA}$

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Ta có $\left.\begin{matrix}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$.



$\left.\begin{matrix}BC\perp AH\\BC\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAH)\Rightarrow BC\perp SH$.

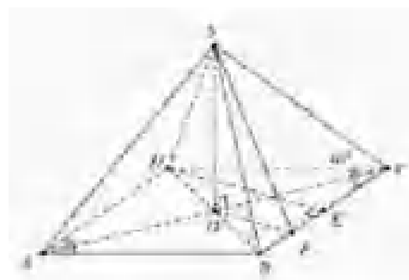
Mặt khác, $AH\perp BC$

nên $((SBC),(ABC))=(SH,AH)=\widehat{SHA}$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD}=60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm BC và F là trung điểm BE. Góc giữa hai mặt phẳng (SOF) và (SBC) là

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Hướng dẫn giải:



• ΔBCD đều nên $DE\perp BC$. Mặt khác $OF//DE\Rightarrow BC\perp OF$ (1).

• Do $SO\perp(ABCD)\Rightarrow BC\perp SO$ (2).

• Từ (1) và (2), suy ra $BC\perp(SOF)\Rightarrow(SBC)\perp(SOF)$.

Vậy, góc giữa (SOF) và (SBC) bằng 90°.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $SA=SB=SC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.

Hướng dẫn giải: **Chọn B**

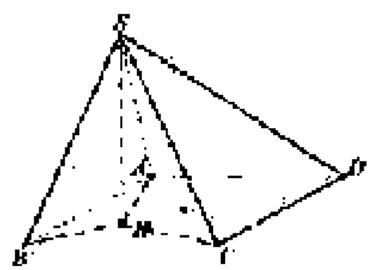
Gọi H là chân đường vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ ($SH\perp(ABCD)$)

$SA=SB=SC=a\Rightarrow$ các hình chiếu: $HA=HB=HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn (ABC)

Mà tam giác ABC cân tại B (vì $BA=BC=a$)

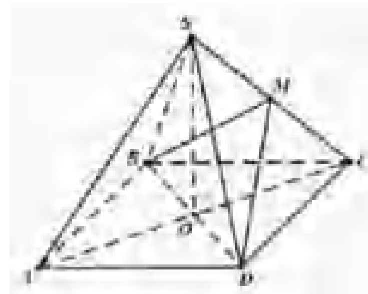
$\Rightarrow$ tâm H phải nằm trên $BD\Rightarrow SH\subset(SBD)$



Vậy có $\left.\begin{matrix}SH\perp(ABCD)\\SH\subset(SBD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(SBD)\perp(ABCD)$ nên góc $[(SBD),(ABCD)]=90^o$.

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC.

Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng:



A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 30^0

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Gọi M' là trung điểm OC.

Có $S_{\Delta MBD} = \dfrac{1}{2}MO.BD = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$;

$S_{\Delta BM'D} = \dfrac{1}{2}M'O.BD = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2}{4}$.

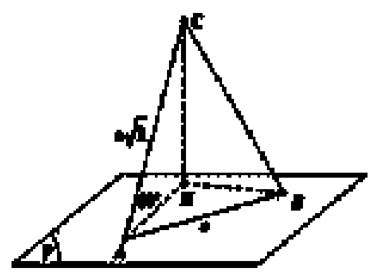
Do đó $\cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta BM'D}}{S_{\Delta BMD}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A. Cạnh $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (P), cạnh $AC = a\sqrt{2}$, AC tạo với (P) một góc 60^0. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. (ABC) tạo với (P) góc 45^0. **B.** BC tạo với (P) góc 30^0.

C. BC tạo với (P) góc 45^0. **D.** BC tạo với (P) góc 60^0.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (P).

Khi đó, $(AC,(P)) = (AC, AH) = \widehat{CAH} = 60^0$ và

$(BC,(P)) = (BC, AH) = \widehat{CBH} = \alpha$.

Tam giác AHC vuông tại H nên

$\sin\widehat{CAH} = \dfrac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC.\sin\widehat{CAH} = a\sqrt{2}.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Tam giác CHB vuông tại H nên $\sin\alpha = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông ở A. Khẳng định nào sau đây **sai**

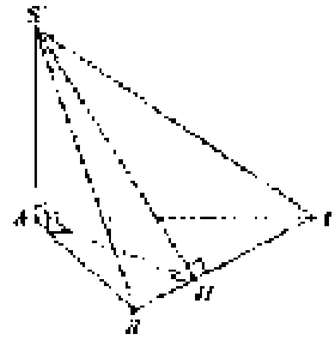
A. $(SAB) \perp (ABC)$.

B. $(SAB) \perp (SAC)$.

C. Vẽ $AH \perp BC$, $H \in BC \Rightarrow$ góc AHS là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\widehat{SCB}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ nên đáp án A đúng.

$AB \perp AC, AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$.

Nên đáp án B đúng

$AH \perp BC; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SHA}$.

Nên đáp án C đúng.

Ta có: $(SBC) \cap (SAC) = SC$ nên đáp án D sai.

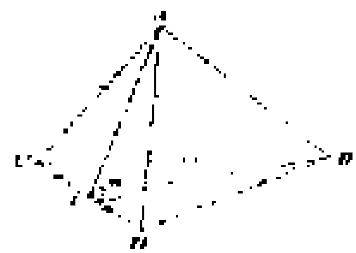
Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AIB}$ **B.** $(BCD) \perp (AIB)$

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$

D. $(ACD) \perp (AIB)$

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**



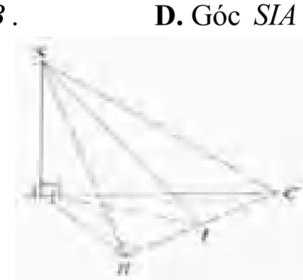
Ta có: $\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ BC \not\perp AB \\ BD \not\perp AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(ABD),(ABC)}\right) \neq \widehat{CBD}$.

Nên đáp án **C** sai

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây

A. Góc SBA. **B.** Góc SCA. **C.** Góc SCB. **D.** Góc SIA.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Ta có: $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$

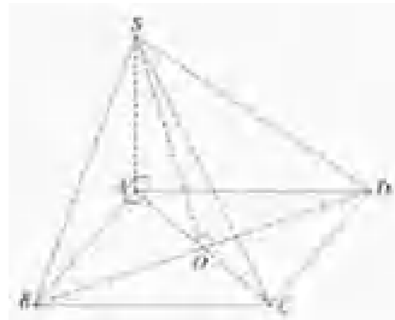
$\Rightarrow \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC, AB \subset (ABC) \\ SB \perp BC, SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SBA}$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.



D. $(SAC)\perp(SBD)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Ta có: $\begin{cases}(SAD)\cap(ABCD)=AD\\ AB\perp AD, AB\subset(ABCD)\\ SA\perp \text{AD}, SA\subset(SAD)\end{cases}$

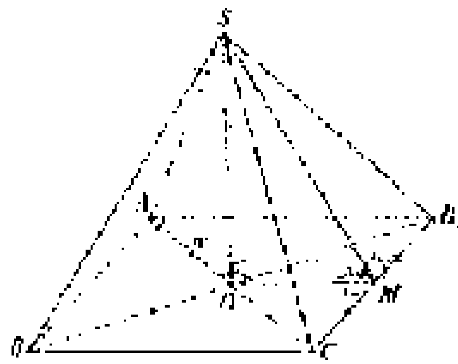
$\Rightarrow\widehat{((SAD),(ABCD))}=\widehat{SAB}$.

Nên đáp án C sai.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Biết $SO\perp(ABCD)$, $SO=a\sqrt{3}$ và đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có bán kính bằng a. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên (SCD) với đáy. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



Gọi M là trung điểm của CD.

Khi đó $\begin{cases}CD\perp OM\\ CD\perp SO\end{cases}$

$\Rightarrow CD\perp SM\Rightarrow\widehat{((SCD),(ABCD))}=\widehat{SMO}=\alpha$.

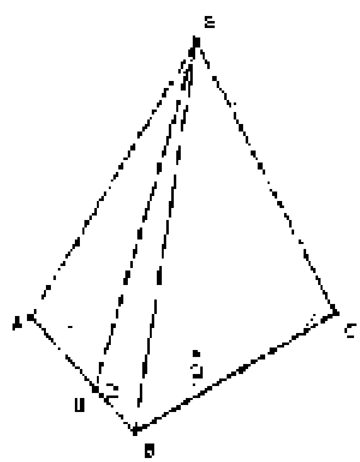
Ta có: $R=OA=a\Rightarrow AC=2a\Rightarrow AB=AD=a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow OM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{SO}{OM}=\sqrt{6}$.

Câu 50. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA=2AB$. Góc giữa (SAB) và (ABC) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha=60^0$ **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$ **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$ **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải: **Chọn B**



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC

Gọi $CO\cap AB=H$ suy ra H là trung điểm AB (vì ΔABC đều)

$\Rightarrow OH\perp AB$ và $OH=\dfrac{1}{3}CH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}$

Tìm góc giữa (SAB) *và* (ABC)

$\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\ OH\perp AB\\ SO\perp AB\quad(SO\perp(ABC))\end{cases}\Rightarrow SH\perp AB\ (1)$

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\ OH\perp AB,\ OH\subset(ABC)\\ SH\perp AB, SH\subset(SAB)\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAB);(ABC)}\right)=\left(\widehat{SH;OH}\right)=\widehat{SHO}=\alpha$

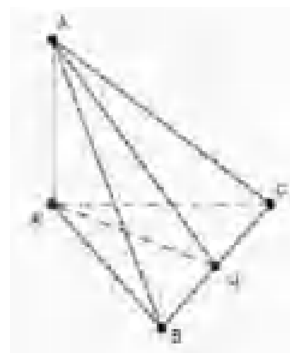
Từ (1) suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{(2AB)^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}AB$

Từ đó ta có : $\cos\alpha=\frac{OH}{SH}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}AB}{\frac{\sqrt{15}}{2}AB}=\frac{1}{3\sqrt{5}}$

Câu 51. Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH=a\sqrt{3}$, $BC=3a$, BC chứa trong mặt phẳng (P). Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P). Biết tam giác $A'BC$ vuông tại A'. Gọi φ là góc giữa (P) và (ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\varphi=60^0$. **B.** $\varphi=45^0$. **C.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\varphi=30^0$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



Ta có $\begin{cases}BC\perp AA'\\BC\perp AH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp A'H$.

Do đó:

$\begin{cases}(ABC)\cap(A'BC)=BC\\BC\perp AH, BC\perp A'H\end{cases}\Rightarrow((ABC),(A'BC))=(AH,A'H)=\widehat{AHA'}$

Mặt khác, tam giác $A'BC$ vuông tại A' nên $A'H=\frac{1}{2}BC=\frac{3a}{2}$.

Ta có $\cos\varphi=\frac{A'H}{AH}=\frac{\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

Câu 52. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng :

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Ta có: $S\in(SAB)\cap(SCD)$. Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$ với $d\in S; d\parallel AB\parallel CD$

Do đó: $d=(SAB)\cap(SCD)$

Mặt khác: $(SAB)\perp(ABCD)$; mà $HK\perp AB(hv)\Rightarrow HK\perp(SAB)$

Vì H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$ (vì $d \parallel AB$)

$\Rightarrow d \perp SK$ (theo định lí ba đường vuông góc)

Do đó: $\widehat{KSH} = \alpha$ là góc giữa (SAB) và (SCD)

Mà SH là đường cao trong ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔSHK vuông tại H có: $\tan\alpha = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD). Khẳng định nào sau đây **sai**

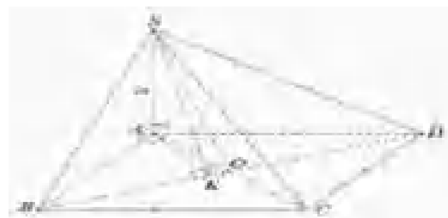
A. $(SAB) \perp (SAD)$ **B.** $(SAC) \perp (ABCD)$ **C.** $\tan\alpha = \sqrt{5}$ **D.** $\alpha = \widehat{SOA}$

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn D.**

Gọi AK là khoảng cách từ A đến BD

Khi đó $AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ và $BD \perp AK$, $BD \perp SA$

$\widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{SKA} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SA}{AK} = \sqrt{5}.$



Câu 54. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Các cạnh bên vuông góc với đáy và $AA' = a$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

B. Góc giữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ có số đo bằng $60°$.

C. Hai mặt bên $(AA'C)$ và $(BB'D)$ vuông góc với hai đáy.

D. Hai hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$ bằng nhau.

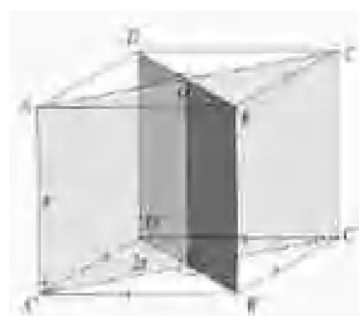
<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn B.**

Ta có các cạnh bên vuông góc với đáy, đáy là hình thoi

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

Hai mặt bên $(AA'C)$ và $(BB'D)$ vuông góc với hai đáy.

Hai hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$ bằng nhau. Suy ra đáp án **A,C,D** đúng.

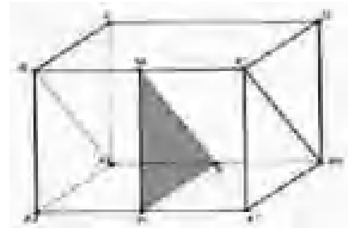


Mặt khác hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình thoi nên $(AA'C'C) \perp (BB'D'D)$. Suy ra đáp án **B** sai.

Câu 55. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (A_1D_1CB) và $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\alpha = 45^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 90^0$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



α là góc giữa hai mặt phẳng (A_1D_1CB) và $(ABCD)$ là

$\alpha = \widehat{MNP}$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{MP}{NP} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**

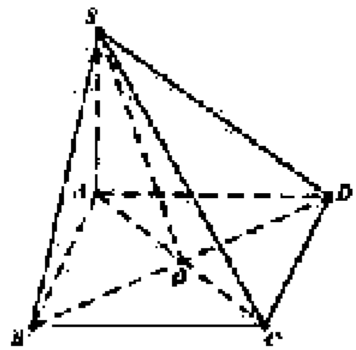
A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. $(SAC) \perp (SBD)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = CD$

$\begin{cases} AB \perp BC, AB \subset (ABCD) \\ SB \perp BC, SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \widehat{ABS}$. Vậy A đúng

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$. Vậy B đúng

Ta có: $(SBD) \cap (ABCD) = BD$

$\begin{cases} AO \perp BD, AB \subset (ABCD) \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \widehat{SOA}$. Vậy C đúng

Ta có: $(SAD) \cap (ABCD) = BD$

$\begin{cases} AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases}$

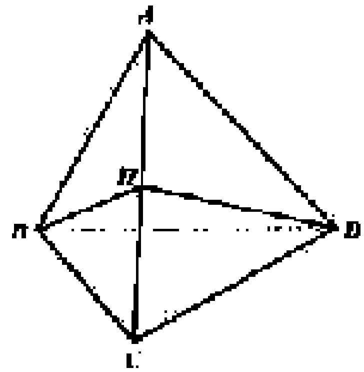
$\Rightarrow \left(\widehat{(SAD);(ABCD)}\right) = \widehat{SAB} = 90^0$.

Vậy D sai.

Câu 57. Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $BH \perp AC; DH \perp AC$

Góc giữa hai mặt của tứ diện bằng $\widehat{BHD}$

Ta có $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác BHD có :

$BD^2 = BH^2 + HD^2 - 2BH.HD.\cos\widehat{BHD}$

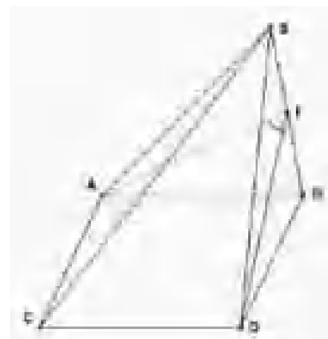
$\Rightarrow a^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - 2\dfrac{3a^2}{4}.\cos\widehat{BHD}$

$\Rightarrow \cos\widehat{BHD} = \dfrac{1}{3}$

Câu 58. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = SB$. Góc giữa (SAB) và (SAD) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi độ dài cạnh của hình chóp đều $S.ABCD$ là a. Gọi I là trung điểm của SB ta có $DI \perp SB$ (vì tam giác SBD đều) và $AI \perp SB$ (vì tam giác SAB đều). Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc $\widehat{AID}$.

Ta có : $AD = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông), $AI = DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều)

Áp dụng định lý cosin cho góc I trong tam giác AID ta có :

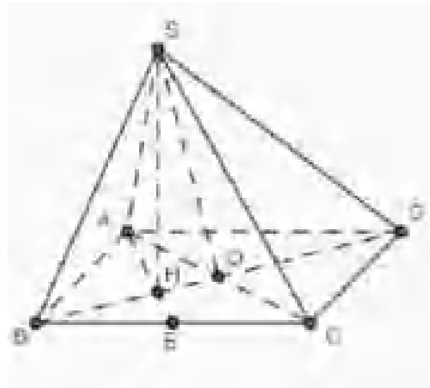
$$\cos(\widehat{AID}) = \frac{AI^2 + DI^2 - AD^2}{2AD.DI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{ABC} = 60^0$. Các cạnh SA, SB, SC đều bằng $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc của hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$. Giá trị $\tan\varphi$ bằng bao nhiêu

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:



Do $AB = BC$ và $\widehat{ABC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều.
Gọi H là hình chiếu của A lên $(ABCD)$.
Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có : $\begin{cases} (SAC)\cap(ABCD) = AC \\ SO \perp AC, HO \perp AC \end{cases}$.

$\Rightarrow ((SAC),(ABCD)) = (SO,HO) = \widehat{SOH}$

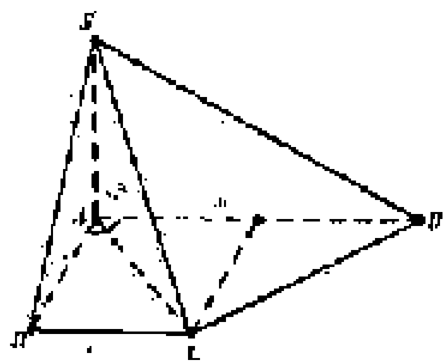
Mặt khác, $HO = \dfrac{1}{3}BO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$,

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. $AB = 2a$, $AD = DC = a$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $(SBC) \perp (SAC)$.
B. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với AB.
C. (SDC) tạo với (BCD) một góc 60^0.
D. (SBC) tạo với đáy một góc 45^0.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn C.**



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$ **(A đúng)**

$\begin{cases} (SAD)\cap(SAB) = S \\ AB//CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(SAB) = Sx//AB$

B đúng

$(SCD)\cap(BCD) = CD$

Ta có: $\begin{cases} AD \perp CD, AD \subset (BCD) \\ SD \perp CD, SD \subset (SCD) \end{cases}$

Suy ra góc giữa (SDC) và (BCD) là $\widehat{SDA}$. $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = 54^0 44'$ **(C sai)**

Câu 61. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = 2a$. Gọi α là góc giữa đường chéo $A'C$ và đáy $ABCD$. Tính α

A. $\alpha \approx 20°45'$.
B. $\alpha \approx 24°5'$.
C. $\alpha \approx 30°18'$.
D. $\alpha \approx 25°48'$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn B.**

Từ giả thiết ta suy ra: $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$

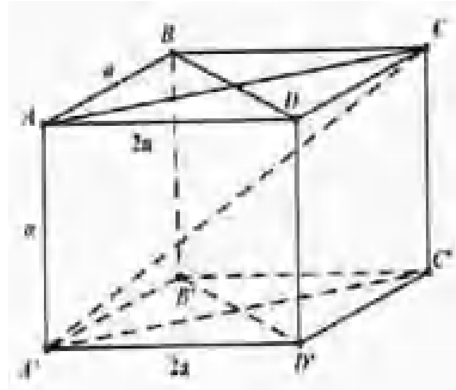
$\Rightarrow (A'C,(ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA} = \alpha$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ABC vuông tại B ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $AA'C$ vuông tại A ta có:

$\tan\alpha = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 24°5'$.



Câu 62. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng α mà $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

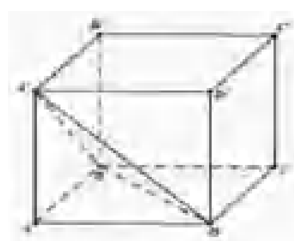
C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

D. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng nhau.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn D.**

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên hình chiếu của tam giác $A'BD$ lên các mặt chứa các cạnh của hình lập phương là các tam giác bằng nhau. Gọi S_1 là diện tích các tam giác này

Lại có $S_1 = S_{AB'D}.cos\alpha$.



Câu 63. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Tính số đo góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn C.**

+ Vì $SH \perp (ABC)$ và $AN \subset (ABC) \Rightarrow SH \perp AN$ hay $\Rightarrow SH \perp AH \Rightarrow$ AH là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) $\Rightarrow$ $(SA,(ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.

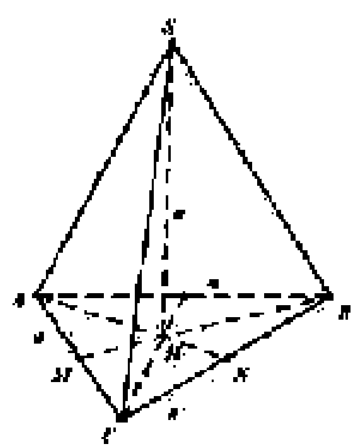
+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC.

Vì ΔABC là tam giác đều cạnh a nên dễ tính được :

$AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ giả thiết suy ra H là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



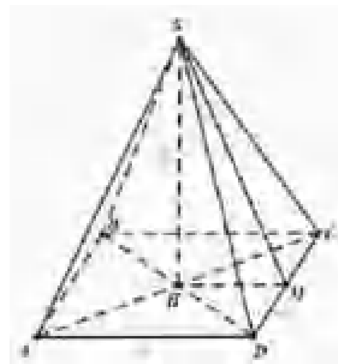
+ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHA vuông tại H ta có:

$$\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60°.$$

Câu 64. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



Giả sử hình chóp đã cho là $S.ABCD$ có đường cao SH.

Ta có: $(ABCD)\cap(SCD) = CD$.

Gọi M là trung điểm của CD $\Rightarrow$ dễ chứng minh được $SM \perp CD$ và $HM \perp CD$.

$\Rightarrow ((ABCD),(SCD)) = (HM, SM) = \widehat{SMH}$.

Mặt khác: $HM = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHM vuông tại H, ta có

$$\tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SMH} = 45°.$$

Câu 65. Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

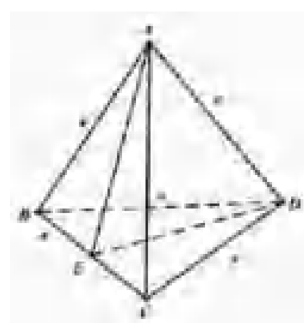
Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Giả sử tứ diện đều đã cho là $ABCD$ có cạnh a.

Ta có: $(ABC)\cap(BCD) = BC$.

Gọi E là trung điểm BC. Khi đó dễ dàng chứng minh được $AE \perp BC$ và $DE \perp BC$.

$\Rightarrow ((ABC),(BCD)) = (AE, DE) = \widehat{AED}$.



Ta dễ tính được: $AE = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng hệ quả của định lý cô sin trong tam giác AED ta có:

$$\cos \widehat{AED} = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2.AE.DE} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

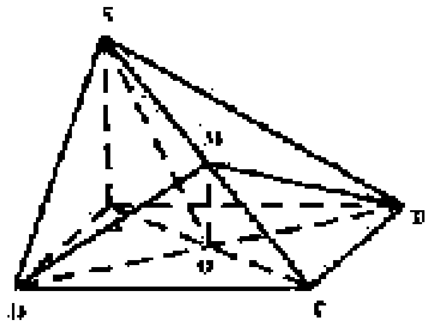
A. $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$. **C.** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Ta có $SB = SD = 2a$

Vì $\Delta SCD = \Delta SCB$ (c.c.c) nên chân đường cao hạ từ B và D đến SC của hai tam giác đó trùng nhau và độ dài đường cao bằng nhau $\Rightarrow BH = DH$

Do đó $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \widehat{DHB} = \varphi$



Ta có $OB = OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$

$\Rightarrow BH = DH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

Lại có $BH = DH$ và O là trung điểm BD

$HO \perp BD$ hay ΔHOB vuông tại O.

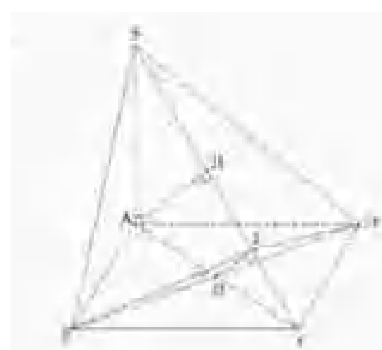
$OH = \sqrt{BH^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}a$

Ta có $\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{OH}{BH} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{30}}{10}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}; \sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{OB}{BH} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng bao nhiêu?

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 90^0 **D.** 60^0

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Ta có: $SC \perp BD$ (vì $BD \perp AC, BD \perp SA$)

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OI \perp SC$ thì ta có $SC \perp (BID)$

Khi đó $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \widehat{BID}$

Trong tam giác SAC, kẻ đường cao AH thì $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Mà O là trung điểm AC và $OI \parallel AH$ nên $OI = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

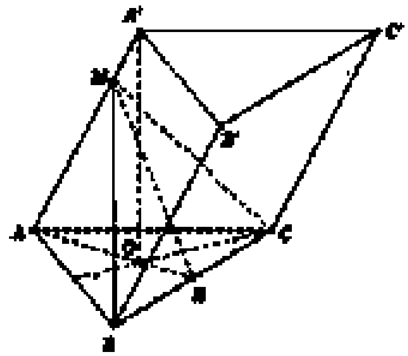
Tam giác IOD vuông tại O có $\tan\widehat{OID} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OID} = 60^0$

Vậy hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau một góc 60^0.

Câu 68. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \dfrac{3a}{4}$. Tang của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó $A'O \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH \perp BC$. Vì tam giác ABC đều nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp A'O \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp MH$.

Do đó, $((MBC),(ABC)) = (MH, AH) = \widehat{MHA} = \alpha$.

Tam giác MAH vuông tại A nên $\tan\alpha = \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau góc 60^o

A. $x = \dfrac{3a}{2}$ **B.** $x = \dfrac{a}{2}$ **C.** $x = a$ **D.** $x = 2a$

Hướng dẫn giải: **Chọn C**

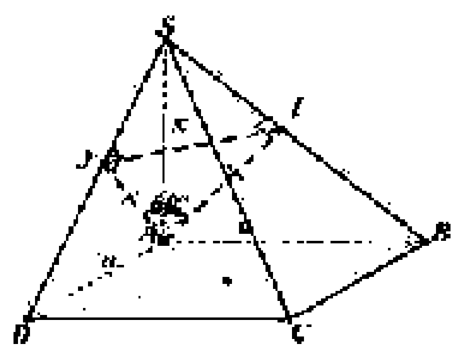
* Trong (SAB) dựng $AI \perp SB$ ta chứng minh được $AI \perp (SBC)$ (1)

Trong (SAD) dựng $AJ \perp SD$ ta chứng minh được $AJ \perp (SCD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$góc $((SBC),(SCD)) = (AI, AJ) = \widehat{IAJ}$

* Ta chứng minh được $AI = AJ$. Do đó, nếu góc $\widehat{IAJ} = 60^o$ thì ΔAIJ đều $\Rightarrow AI = AJ = IJ$

ΔSAB vuông tại A có AI là đường cao



$\Rightarrow AI.SB = SA.AB \Rightarrow AI = \dfrac{SA.AB}{SB}$ (3)

Và có $SA^2 = SI.SB \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SB}$ (4)

Ta chứng minh được $IJ // BD$

$\Rightarrow \dfrac{IJ}{BD} = \dfrac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \dfrac{SI.BD}{SB} \overset{(4)}{=} \dfrac{SA^2.BD}{SB^2}$ (5)

Thế (3)&(5) vào $AI = IJ \Rightarrow AB = \dfrac{SA.BD}{SB}$

$\Leftrightarrow AB.SB = SA.BD \Leftrightarrow a.\sqrt{x^2+a^2} = x.a\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + a^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = a$

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SO \perp (ABCD), SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn nội tiếp $ABCD$ có bán kính bằng a. Tính góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Hướng dẫn giải: **Chọn C**

Ta có $SO \perp (ABCD)$ và OM, ON, OP, OQ lần lượt vuông góc với AB, BC, CD, DA

Theo định lí ba đường vuông góc ta có

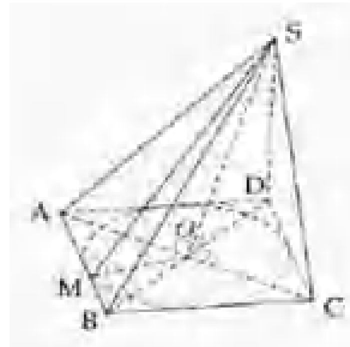
$SM \perp AB, SN \perp BC, SP \perp CD, SQ \perp DA$

Từ đó suy ra $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}$

Xét tam giác SMO vuông tại O ta có

$\tan \widehat{SMO} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^0$

Vậy mỗi mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau và bằng 60^0



Câu 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

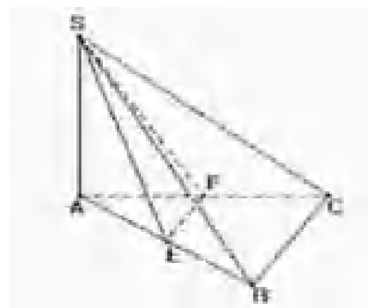
Ta có: $(SEF) \cap (SBC) = Sx // EF // BC$

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SE, BC \perp SB$

$\Rightarrow SB \perp Sx, SE \perp Sx$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là : $\widehat{BSE}$



Câu 72. Cho góc tam diện Sxyz với $\widehat{xSy} = 120^0$, $\widehat{ySz} = 60^0$, $\widehat{zSx} = 90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $SA = SB = SC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng

A. 15^0 **B.** 90^0 **C.** 45^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải: **Chọn B**

Áp dụng định lí Côsin trong tam giác SAB, ta có $AB = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông cân tại S nên $AC = a\sqrt{2}$; tam giác SBC đều nên $BC = a$.

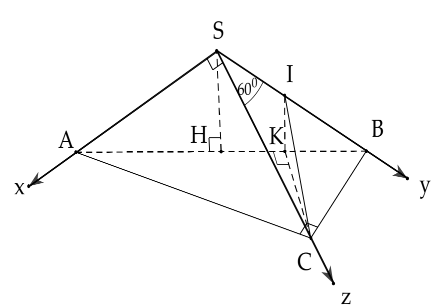
Vì $AC^2 + BC^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C

Gọi H là trung điểm AB thì ta có

$\begin{cases} HA = HB = HC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Mà $SH \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$

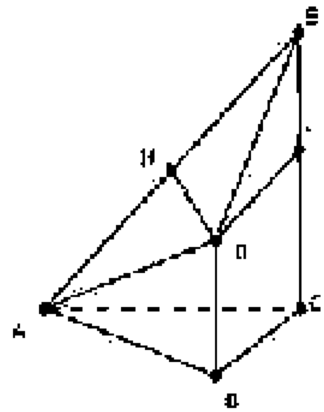
Vậy $\left(\widehat{(SAB),(ABC)} \right) = 90^0$



Câu 73. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) tại B, C lần lượt lấy D, E nằm trên cùng một phía đối với (P) sao cho $BD = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}, CE = a\sqrt{3}$. Góc giữa (P) và (ADE) bằng bao nhiêu

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



Gọi $\varphi = \left((ABC),(ADE)\right)$.

Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác, ta có: $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$,

$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Gọi F là trung điểm EC, ta có $DF = BC = a$.

Do đó $DE = \sqrt{DF^2 + FE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra tam giác ADE cân tại D.

Gọi H là trung điểm AE, ta có $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{4} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}DH.AE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o$.

Câu 74. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi d_B, d_C lần lượt là đường thẳng đi qua B, C và vuông góc với (ABC). (P) là mặt phẳng qua A và hợp với (ABC) góc 60^0. (P) cắt d_B, d_C lần lượt tại D và E. biết $AD = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}, AE = a\sqrt{3}$. đặt $\widehat{DAE} = \varphi$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

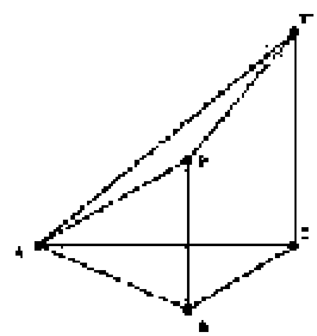
A. $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **D.** $\varphi = 30^0$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Ta có: $S_{ABC} = S_{ADE}.\cos\alpha$ với $\alpha = \left((ABC),(ADE)\right) = 60^0$.

Do đó $S_{ADE} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\cos 60^0} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác,

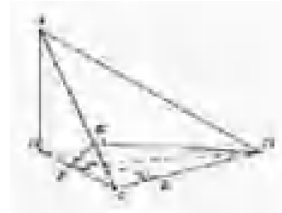


$S_{ADE} = \dfrac{1}{2}AD.AE.\sin\varphi \Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}.\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

Câu 75. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$. Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau ở O. Trong (ADC) vẽ $DK \perp AC$ tại K. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $(ADC) \perp (ABE)$ **B.** $(ADC) \perp (DFK)$ **C.** $(ADC) \perp (ABC)$ **D.** $(BDC) \perp (ABE)$

<ins>***Hướng dẫn giải:***</ins> **Chọn C**



Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (ABE) \\ CD \subset (ADC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

Vậy "$(ADC) \perp (ABE)$": ĐÚNG.

$\left.\begin{matrix} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DF \perp (ABC) \\ SC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DF \perp AC \\ DK \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} AC \perp (DFK) \\ AC \subset (ADC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ADC) \perp (DFK)$

Vậy "$(ADC) \perp (DFK)$": ĐÚNG.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (ABE) \\ CD \subset (BDC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (BDC) \perp (ABE)$. Vậy "$(BDC) \perp (ABE)$": ĐÚNG.

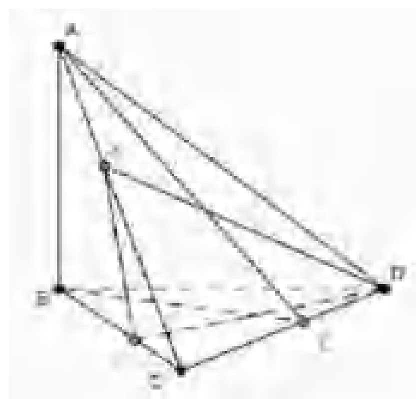
"$(ADC) \perp (ABC)$": SAI

Câu 76. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(ABE) \perp (ADC)$ **B.** $(ABD) \perp (ADC)$

C. $(ABC) \perp (DFK)$ **D.** $(DFK) \perp (ADC)$

<ins>***Hướng dẫn giải:***</ins> **Chọn B.**



Ta có: $\begin{cases} (ABC) \perp (BCD) \\ (ABD) \perp (BCD) \\ (ABC) \cap (ABD) = AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$.

Mặt khác: $\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$ nên câu A đúng.

$\begin{cases} (ABC) \perp (BCD) \\ (ABC) \cap (BCD) = BC \Rightarrow DF \perp (ABC) \\ DF \perp BC \end{cases}$ nên câu C đúng.

Theo trên ta có $DF \perp (ABC)$ nên $DF \perp AC$.

Vậy ta có $\begin{cases} AC \perp DF \\ AC \perp DK \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DKF)$. Do đó câu D đúng.

Câu 77. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **không đúng**

A. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp.

B. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau.

D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng qui tại trung điểm của mỗi đường.

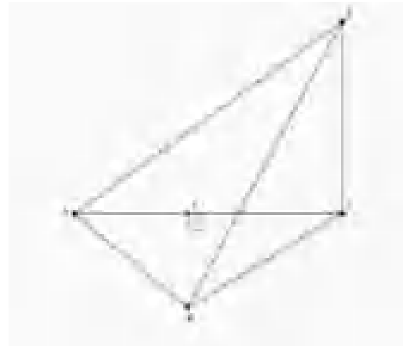
<ins>***Hướng dẫn giải:***</ins> Chọn C

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.



D. Các mặt bên là những hình bình hành.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\SC=(SBC)\cap(SAC)\end{cases} \Rightarrow SC\perp(ABC)$. Do đó câu A và B đúng

C. Sai. vì nếu $A'\in SB$ thì hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) phải vuông góc với nhau theo giao tuyến SB

D. Ta có: $\begin{cases}SC\perp(ABC)\\SC\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow(SAC)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AC

Mà BK là đường cao của ΔABC $\Rightarrow BK\perp AC\Rightarrow BK\perp(SAC)$. Vậy D. đúng

Câu 79. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **không đúng**

A. $BB'C'C$ là hình chữ nhật. **B.** $(AA'H)\perp(A'B'C')$.

C. $(BB'C'C)\perp(AA'H)$. **D.** $(AA'B'B)\perp(BB'C'C)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

$BC\perp(A'AH)$ nên $BC\perp BB'$, nếu $(AA'B'B)\perp(BB'C'C)$ thì $BC\perp AB$ vô lý vì H trùng A.

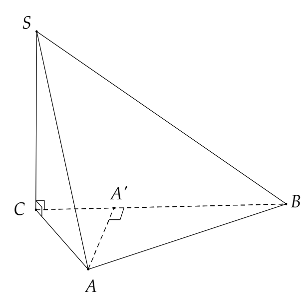
Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SC\perp(ABC)$.

B. Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì $A'\in SB$.

C. $(SAC)\perp(ABC)$.

D. BK là đường cao của tam giác ABC thì $BK\perp(SAC)$.



Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Ta có: $\begin{cases}(SAC)\cap(SBC)=SC\\(SAC)\perp(ABC)\\(SBC)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SC\perp(ABC)$.

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC),

khi đó $AA'\perp(SBC)\Rightarrow AA'\perp BC\Rightarrow A'\in BC$.

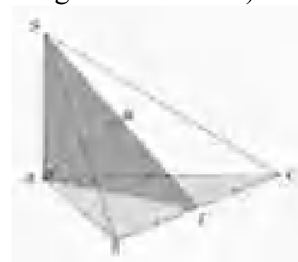
Suy ra đáp án B sai

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng

A. $H\in SB$. **B.** H trùng với trọng tâm tam giác SBC.

C. $H \in SC$. **D.** $H \in SI$ (I là trung điểm của BC).

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $BC \perp SA$ $\Rightarrow BC \perp (SAI)$.

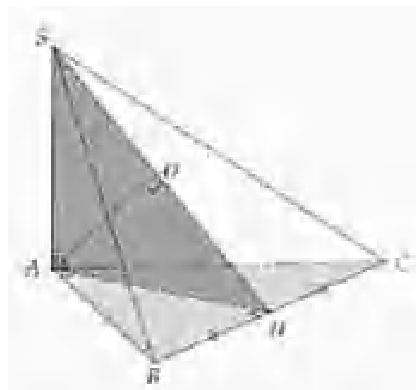
Khi đó H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Suy ra $H \in SI$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH, $(H \in BC)$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng

A. $SC \perp (ABC)$ **B.** $(SAH) \perp (SBC)$

C. $O \in SC$ **D.** Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$

Hướng dẫn giải: **Chọn B**



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC)$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$

mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

Khi đó O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC)

Thì suy ra $O \in SI$ và $\left((SBC),(ABC)\right) = \widehat{SHA}$.

Vậy đáp án **B** đúng.

Câu 83. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A. H là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.

B. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC.

C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$.

D. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Vì ABC là tam giác vuông cân ở A $\Rightarrow AB = AC \neq BC$ nên các mặt bên của lăng trụ không bằng nhau.

Câu 84. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây không đúng

A. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

B. Hai mặt $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc nhau.

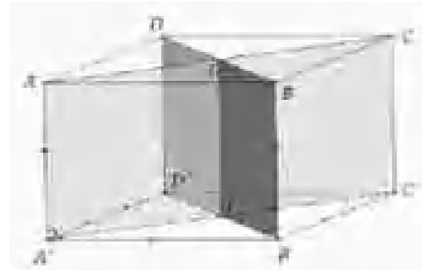
C. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp.

D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng qui tại trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật nên AC không vuông góc với BD

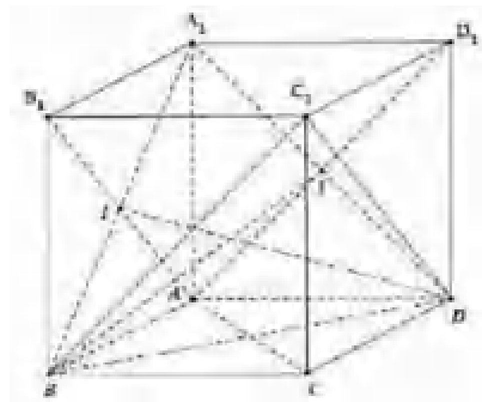
Suy ra hai mặt $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ không vuông góc với nhau.



Câu 85. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Mặt phẳng (A_1BD) không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây

A. (AB_1D). **B.** (ACC_1A_1). **C.** (ABD_1). **D.** (A_1BC_1).

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



* Gọi $I = AB_1 \cap A_1B$.

Tam giác A_1BD đều có DI là đường trung tuyến nên $DI \perp A_1B$.

$DA \perp (AA_1B_1B) \Rightarrow DA \perp A_1B$.

$\left.\begin{array}{l} A_1B \perp DI \\ A_1B \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B \perp (AB_1D)$ nên A đúng.

* Ta có

$\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp AA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACC_1A_1) \Rightarrow (A_1BD) \perp (ACC_1A_1)$ nên B đúng.

* Gọi $J = AD_1 \cap A_1D$.

Tam giác A_1BD đều có BJ là đường trung tuyến nên $BJ \perp A_1D$.

$BA \perp (AA_1D_1D) \Rightarrow BA \perp A_1D$.

$\left.\begin{array}{l} A_1D \perp BJ \\ A_1D \perp BA \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B \perp (ABD_1)$ nên C đúng.

Câu 86. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Tam giác $AB'C$ là tam giác đều.

B. Nếu α là góc giữa AC' và $(ABCD)$ thì $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

C. $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$.

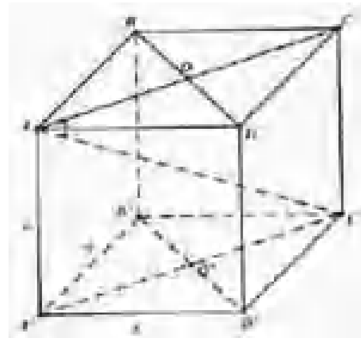
D. Hai mặt $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

\+ ***Cách 1:*** Chứng minh trực tiếp chỉ ra C là đáp án sai.

Từ giả thiết dễ dàng tính được $AC = a\sqrt{2}$.

Mặt khác vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên suy ra $\widehat{AA'C'} = 90°$.



Xét tứ giác $ACC'A'$ có $\begin{cases} AA'//CC' \\ AA' = CC' = a \\ \widehat{AA'C'} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow ACC'A'$ là hình chữ nhật có các cạnh a và $a\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $ACC'A'$ là : $S = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ (đvdt)
$\Rightarrow$ đáp án C sai.

+ ***Cách 2:*** Chứng minh 3 đáp án A, B, D đều đúng và suy ra đáp án C sai.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH. Xét các mệnh đề sau

I) $SA = SB = SC$.

II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

III) Tam giác ABC là tam giác đều.

IV) H là trực tâm tam giác ABC.

Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều

A. (I) và (II) **B.** (II) và (III) **C.** (III) và (IV) **D.** (IV) và (I)

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Câu 88. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây

A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

B. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

C. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.

D. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Câu 89. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai**

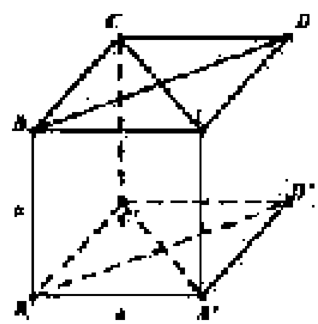
A. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau.

B. Bốn đường chéo AC', $A'C$, BD', $B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$.

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau.

D. $AC \perp BD'$.

Hướng dẫn giải:. **Chọn C.**



Vì theo giả thiết $ABCD.A'B'C'D'$ ta dễ dàng chỉ ra được:

+ $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases}$ và BD cắt BB' cùng nằm trong $(BB'D'D)$

$\Rightarrow AC \perp (BB'D'D)$. Mà $BD' \subset (BB'D'D) \Rightarrow AC \perp BD' \Rightarrow$ đáp án D đúng.

+ $\begin{cases} AC \subset (ACC'A') \\ AC \perp (BB'D'D) \end{cases} \Rightarrow (ACC'A') \perp (BB'D'D) \Rightarrow$ đáp án A đúng.

+ Áp dụng định lý Pytago trong tam giác $B'A'D'$ vuông tại A' ta có:
$B'D'^2 = B'A'^2 + A'D'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác $BB'D'$ vuông tại B' ta có:

$$BD'^2 = BB'^2 + B'D'^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BD' = a\sqrt{3}.$$

Hoàn toàn tương tự ta tính được độ dài các đường chéo còn lại của hình lập phương đều bằng nhau và bằng $a\sqrt{3} \Rightarrow$ đáp án B đúng.

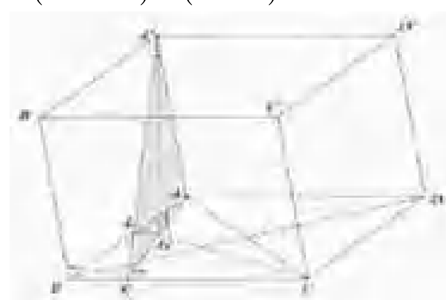
+ Xét tứ giác $ACC'A'$ có $\begin{cases} AC // A'C' \\ AC = A'C' = a\sqrt{3} \\ AA' = CC' = a \\ \widehat{ACC'} = 90° \end{cases} \Rightarrow ACC'A'$ là hình chữ nhật. hoàn toàn tương tự ta cũng chỉ ra $BDD'B'$ cũng là hình chữ nhật có các cạnh là a và $a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau $\Rightarrow$ đáp án C sai.

Câu 90. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **không đúng**

A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.
B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$.
C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
D. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC

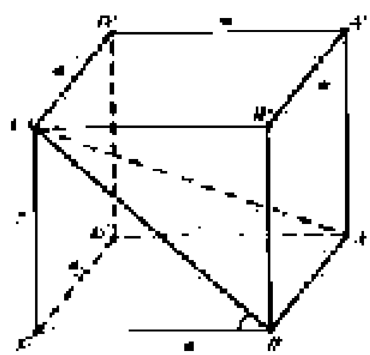
$\Rightarrow H \in AK, BC \perp AK, BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (AA'H)$

$\Rightarrow \begin{cases} (AA'H) \perp (A'B'C') \\ (BB'C'C) \perp (AA'H) \\ BC \perp BB' \end{cases}$ nên đáp án B,C,D đúng.

Câu 91. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:

A. $3a$.
B. $a\sqrt{3}$.
C. $2a$.
D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



Ta có: $(ABCD) \cap (ABC') = AB$.

Từ giả thiết ta dễ dàng chứng minh được: $AB \perp (BB'C'C)$

mà $C'B \subset (BB'C'C) \Rightarrow AB \perp C'B$. Mặt khác: $CB \perp AB$.

$\Rightarrow ((ABCD),(ABC')) = (CB, C'B) = \widehat{CBC'} = 60°$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác BCC' vuông tại C ta có:

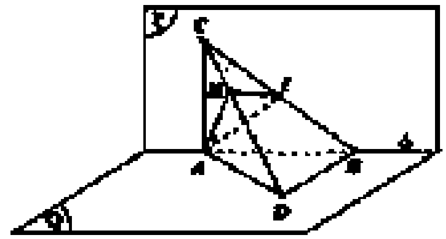
$\tan \widehat{CBC'} = \dfrac{CC'}{CB} \Rightarrow CC' = CB.\tan \widehat{CBC'} = a.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Câu 92. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P), D trên (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD là hình gì

A. Tam giác cân
B. Hình vuông
C. Tam giác đều
D. Tam giác vuông

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Gọi I là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.



Ta có $\left.\begin{matrix} (P)\perp(Q) \\ (P)\cap(Q)=d \\ (Q)\supset BD\perp d \end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(P)\Rightarrow BD\perp AI$.

$\left.\begin{matrix} AI\perp BC \\ AI\perp BD \end{matrix}\right\}\Rightarrow AI\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp CD$.

Trong (ACD), dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với CD cắt CD tại H.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác AHI.

Vì $AI\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp HI$ nên tam giác AHI là tam giác vuông tại I.

Câu 93. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=a; CD=2x$. với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

$YCBT \Leftrightarrow \Delta CJD$ vuông cân tại J

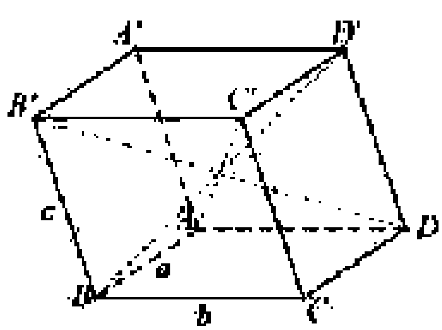
$\Leftrightarrow IJ=IC=ID=\frac{AB}{2}\Leftrightarrow 4x^2=2AI^2=2(\frac{a^2+a^2}{2}-x^2)\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

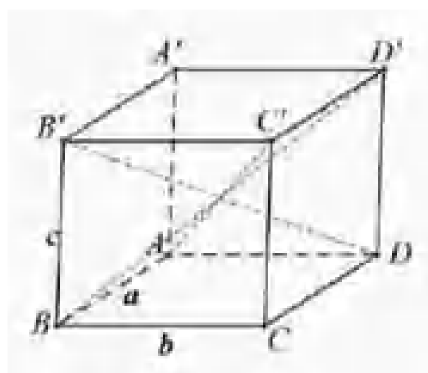
(Với I là trung điểm CD; J là trung điểm AB)

Câu 94. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $BC=b$, $CC'=c$. Nếu $AC'=BD'=B'D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ thì hình hộp là

A. Hình lập phương **B.** Hình hộp chữ nhật **C.** Hình hộp thoi **D.** Hình hộp đứng

Hướng dẫn giải: **Chọn B**





$AC'=BD'$ $\Rightarrow$hình bình hành $ABC'D'$ là hình chữ nhật

$BD'=B'D$ $\Rightarrow$hình bình hành $BDD'B'$ là hình chữ nhật

$AC'=B'D$ $\Rightarrow$hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật

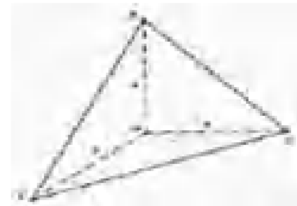
Câu 95. Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC=a$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $O.ABC$ là hình chóp đều.

B. Tam giác ABC có diện tích $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. Tam giác ABC có chu vi $2p=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. Ba mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA) vuông góc với nhau từng đôi một.



Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

+ Áp dụng định lý Pytago trong tam giác OAB vuông tại O ta có:
$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$.
Hoàn toàn tương tự ta tính được $BC = AC = a\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều. Mặt khác theo giả thiết
$OA = OB = OC = a \Rightarrow$ các mặt bên của hình chóp $O.ABC$ là các tam giác cân tại O $\Rightarrow O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow$ đáp án A đúng.
+ Chu vi ΔABC là: $2p = AB + AC + BC = a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ đáp án C sai.

+ Nửa chu vi Diện tích ΔABC là: $p = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích ΔABC là:

$$S = \sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2}.\frac{2a^3\sqrt{2}}{8}} = \sqrt{\frac{3a^4}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

$\Rightarrow$ đáp án B đúng.

+ Dễ chứng minh được $\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ OA \subset (OAB) \\ OA \subset (OAC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (OAB) \perp (OBC) \\ (OAC) \perp (OBC) \end{cases}$,

$\begin{cases} OB \perp (OAC) \\ OB \subset (OAB) \end{cases} \Rightarrow (OAB) \perp (OAC)$ $\Rightarrow$ đáp án D đúng.

Câu 96. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến d của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho $AB = 8$. Gọi C là một điểm trên (P), D là một điểm trên (Q) sao cho AC, BD cùng vuông góc với giao tuyến d và $AC = 6$, $BD = 24$. Độ dài CD là

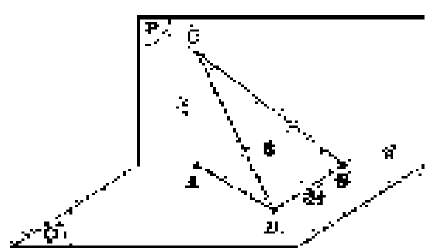
A. 20. **B.** 22. **C.** 30. **D.** 26.

Hướng dẫn giải: **Chọn D**

Tam giác ABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Ta có $\left.\begin{matrix} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ (Q) \supset BD \perp d \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (P) \Rightarrow BD \perp BC$.

Tam giác BCD vuông tại B nên $CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

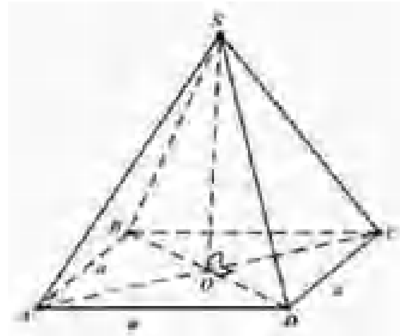


Câu 97. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60°$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O (O là tâm của $ABCD$), lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $S.ABCD$ là hình chóp đều **B.** Hình chóp $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác cân

C. $SO = \dfrac{3a}{2}$ **D.** SA và SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ những góc bằng nhau

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**



Xét ΔABD có $\widehat{A}=60^\circ$, $AB=AD=a \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều cạnh a. Vì O là tâm của $ABCD$ nên suy ra AO là đường trung tuyến trong ΔABD đều cạnh a nên dễ tính được $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC=2AO=a\sqrt{3}$.

Mặt khác theo giả thiết SAC là tam giác đều

$\Rightarrow SA=SC=AC=a\sqrt{3} \Rightarrow SO=a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a}{2}$.

Câu 98. Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ với đáy lớn ABC có cạnh bằng a. Đáy nhỏ $A'B'C'$ có cạnh bằng $\dfrac{a}{2}$, chiều cao $OO'=\dfrac{a}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**

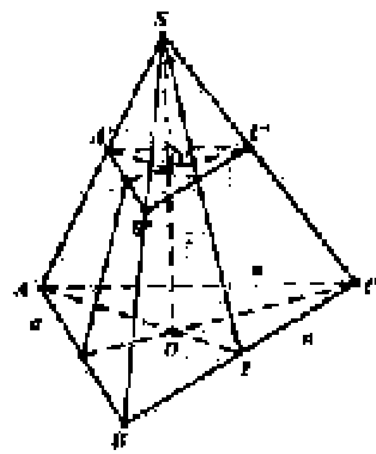
A. Ba đường cao AA', BB', CC' đồng qui tại S.

B. $AA'=BB'=CC'=\dfrac{a}{2}$.

C. Góc giữa mặt bên mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC).

D. Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ $A'B'C'$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



+ Đáp án A đúng.

+ Gọi I là trung điểm của BC.

Từ giả thiết dễ dàng chỉ ra được $\dfrac{AA'}{SA}=\dfrac{OO'}{SO}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow SO=2OO'=a$. Mặt khác ΔABC là tam giác đều cạnh a, có AI là đường trung tuyến $\Rightarrow AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng định lý Pytago trong ΔSOA vuông tại O ta có:

$SA^2=SO^2+AO^2=a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{12a^2}{9} \Rightarrow SA=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AA'=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Vì $ABC.A'B'C'$ là hình chóp cụt đều nên $AA'=BB'=CC'=\dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ đáp án B sai.

+ Ta có: $(SBC)\cap(ABC)=BC$. Vì ΔSBC cân tại S và I là trung điểm của BC nên suy ra $SI\perp BC$. Mặt khác ΔABC là tam giác đều có I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI\perp BC$.

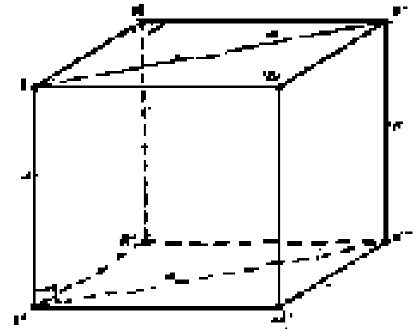
$\Rightarrow ((SBC),(ABC))=(SI,AI)=(SI,OI)=\widehat{SIO} \Rightarrow$ đáp án C đúng.

+ Ta có: $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A}{\frac{1}{2}.A'B'.A'C'.\sin A'}=\dfrac{AB.AC}{A'B'.A'C'}=\dfrac{2A'B'.2A'C'}{A'B'.A'C'}=4 \Rightarrow$ đáp án D đúng.

Câu 99. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $ACC'A'$ là hình vuông, cạnh bằng a. Cạnh đáy của hình lăng trụ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Từ giả thiết ta sauy ra ΔABC vuông cân tại B

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 45°$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABC vuông cân tại B có $\widehat{BAC} = 45°$ và cạnh $AC = a$, ta có:

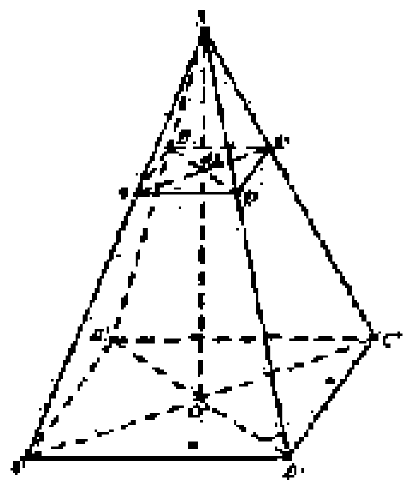
$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$

$\Rightarrow AB = AC.\cos\widehat{BAC} = a.\cos 45° = a.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 100. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh của đáy nhỏ $ABCD$ bằng $\dfrac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn $A'B'C'D'$ bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính chiều cao OO' của hình chóp cụt đã cho.

A. $OO' = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ **B.** $OO' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $OO' = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $OO' = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Ta có $SO' \perp (A'B'C'D') \supset B'D' \Rightarrow SO' \perp B'D' \Rightarrow O'D'$ là hình chiếu vuông góc của SD' lên $(A'B'C'D')$

$\Rightarrow (SD',(ABCD)) = (SD',O'D') = \widehat{SD'O'} = 60°$.

Từ giả thiết dễ dàng chỉ ra được $\dfrac{AA'}{SA'} = \dfrac{OO'}{SO'} = \dfrac{1}{3}$.

Vì $\Delta A'D'C'$ là tam giác vuông cân tại D' có $D'O'$ là đường cao nên ta có:

$\dfrac{1}{D'O'^2} = \dfrac{1}{A'D'^2} + \dfrac{1}{D'C'^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow D'O'^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow D'O' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta SD'O'$ vuông tại O' ta có:

$\tan 60° = \dfrac{SO'}{O'D'} \Rightarrow SO' = O'D'.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow OO' = \dfrac{1}{3}SO' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

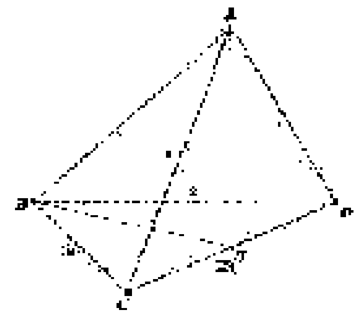
Câu 101. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính AB theo a và x

A. $AB = \sqrt{2(a^2 + x^2)}$ **B.** $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$ **C.** $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ **D.** $AB = \sqrt{a^2 + x^2}$

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Gọi H là trung điểm của CD. Vì tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B nên $AH \perp CD$, $BH \perp CD$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(ACD)\perp(BCD)\\(ACD)\cap(BCD)=CD\\(ACD)\supset AH\perp CD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\perp(BCD)\Rightarrow AH\perp BH$



$\Delta ACD=\Delta BCD(c.c.c)\Rightarrow AH=BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{a^2-x^2}$.

Tam giác AHB vuông tại H nên $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{2\left(a^2-x^2\right)}$.

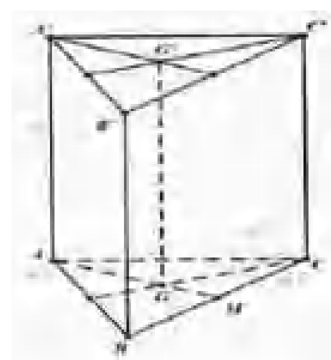
Câu 102. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về $AA'G'G$?

A. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có hai kích thước là $2a$ và $3a$.

B. $AA'G'G$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.

C. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $6a^2$.

D. $AA'G'G$ là hình vuông có diện tích bằng $8a^2$.



Hướng dẫn giải:.

Chọn B.

Gọi M là trung điểm BC. Khi đó ta dễ dàng tính được :

$AM=2a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3a$.

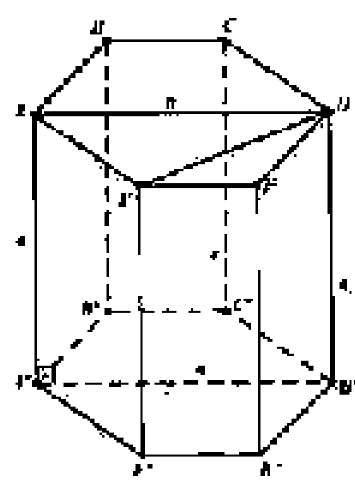
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}.3a=2a=AA'$.

$\Rightarrow AA'G'G$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.

Câu 103. Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADD'A'$ là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng

A. a **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Tổng số đo các góc của hình lục giác là $4.180°=720°$.

Vì $ABCDEF$ là hình lục giác đều nên mỗi góc của hình lục giác đều $ABCDEF$ là $120°$ $\Rightarrow \widehat{FAB}=120°$.

Vì $ABCDEF$ là hình lục giác đều nên ta suy ra

+ AD là tia phân giác của góc $\widehat{FAB}$ và $\widehat{EDC}$

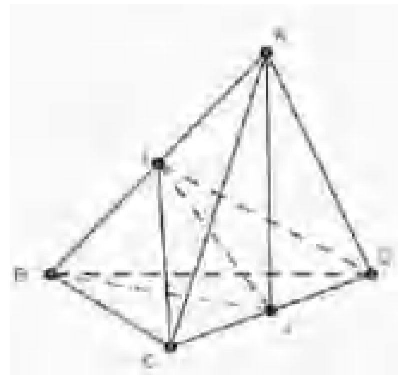
$\Rightarrow \widehat{FAD}=\dfrac{\widehat{FAB}}{2}=60°$.

+ Tam giác AFD vuông tại F.

Xét tam giác AFD vuông tại F có $\widehat{FAD}=60°$ và $AD=a$

ta suy ra: $\cos\widehat{FAD}=\dfrac{AF}{AD}$ $\Rightarrow AF=AD.\cos\widehat{FAD}=a.\cos 60°=a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Câu 104. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính IJ theo a và x



A. $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$. **B.** $IJ = \dfrac{\sqrt{2\left(a^2 + x^2\right)}}{2}$.

C. $IJ = \dfrac{\sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}}{2}$. **D.** $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn C.**

Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp AJ \\ (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp BJ.$$

Vậy tam giác ABJ vuông tại J

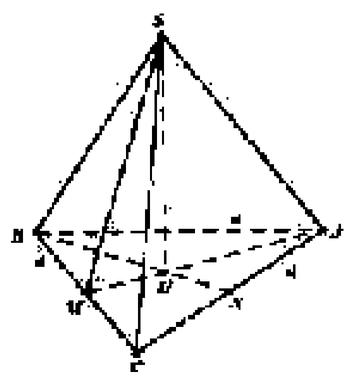
Ta có: $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Do đó tam giác ABJ vuông cân tại J. Suy ra $IJ = \dfrac{AJ\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}}{2}$

Câu 105. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH.

A. $SH = \dfrac{a}{2}$. **B.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn A.**



Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC.

Dễ chứng minh được $SM \perp BC$ và $AM \perp BC$.

$\Rightarrow \left((SBC),(ABC)\right) = (SM, AM) = \widehat{SMA} = \widehat{SMH} = 60°$.

Ta dễ tính được: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vì H là chân đường cao của hình chóp đều $S.ABC$ nên H trùng với trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow MH = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

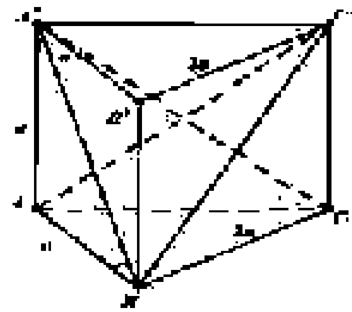
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác SHM vuông tại H ta có:

$\tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{MH} \Rightarrow SH = MH.\tan\widehat{SMH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{6} = \dfrac{a}{2}$.

Câu 106. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Đáy ABC là tam giác vuông **B.** Hai mặt $(AA'B'B)$ và $(BB'C')$ vuông góc nhau

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng $45°$ **D.** $AC' = 2a\sqrt{2}$

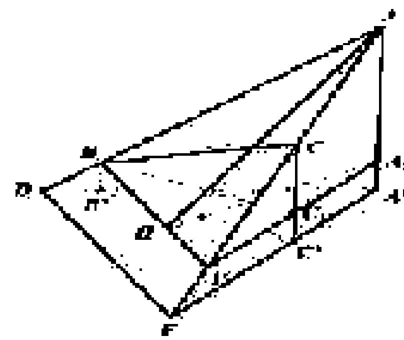


Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

+ *Cách 1:* Chứng minh trực tiếp chỉ ra D là đáp án sai.
Từ giả thiết dễ dàng suy ra $CC' = AA' = a$.
Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ACC' vuông tại C ta có:
$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 5a^2 + a^2 = 6a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{6} \Rightarrow$ đáp án D sai.
+ *Cách 2:* Chứng minh 3 đáp án A, B, C đều đúng suy ra đáp án D sai.

Câu 107. Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ. Hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$. Tìm hệ thức liên hệ giữa diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cot\varphi$. **B.** $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\sin\varphi$.
C. $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\tan\varphi$. **D.** $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$.



Hướng dẫn giải:

Qua B kẻ mặt phẳng $(Q)//(P)$ cắt $AA'; CC'$ lần lượt tại $A_1; C_1$ khi đó $S_{A'B'C'} = S_{A_1BC_1}$

Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa mặt phẳng (ABC) và (BA_1C_1) và bằng φ

Kẻ $AH \perp BF \Rightarrow A_1H \perp BF$

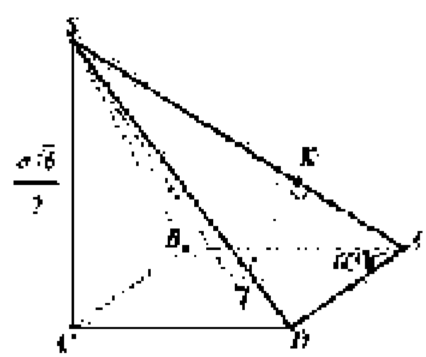
$$S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2}A_1H.BF = \frac{1}{2}AH.\cos\varphi.BF = S_{ABC}.\cos\varphi$$

Vậy $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$.

Câu 108. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng a và góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong tam giác SCA kẻ $IK \perp SA$ tại K. Tính độ dài IK được

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Tam giác AKI đồng dạng tam giác ACS $\Rightarrow$
$\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{SA} \Rightarrow IK = \frac{SC.AI}{SA}$

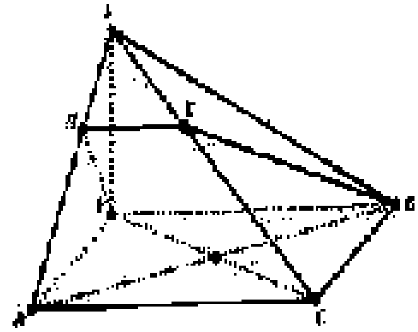
ΔBCD và ΔABD đều cạnh a $\Rightarrow IA = IC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$AC = a\sqrt{3}$

ΔSAC vuông tại C $\Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} =$
$\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $IK = \frac{a}{2}$

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD), (α) cắt chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì

A. hình bình hành **B.** hình thang vuông **C.** hình thang không vuông **D.** hình chữ nhật

Hướng dẫn giải: **Chọn B**



Vẽ $AH \perp CD$

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Suy ra $CD \perp AH$

mà $AH \subset (SCD)$ suy ra $AH \subset (\alpha)$. Do đó $(\alpha) \equiv (AHB)$

Vì $(\alpha) // CD$ nên $(\alpha) \cap (SAD) = HK // CD (K \in SC)$.

Từ đó thiết diện là hình thang $ABKH$.

Mặt khác $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$

Vậy thiết diện là hình thang vuông tại A và H.

Câu 110. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a,\ AD = 2a.$ SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu

A. $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

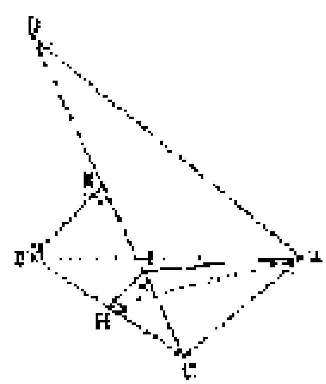
Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Gọi MN là đoạn thẳng qua O vuông góc AD (M, N thuộc AD, BC) ta có $MN \perp (SAD)$ nên SMN là thiết diện cần tìm. $\Delta\, SMN$ vuông tại M nên $S_{SMN} = \dfrac{SM.MN}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 111. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P), D trên (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD = a$. Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD là

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**



Ta có $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ BD \subset (Q), BD \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow BD \perp (P)$

Gọi H là trung điểm BC, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp CD$

Trong mặt phẳng (BCD), kẻ $HI \perp CD$ thì ta có $CD \perp (AHI)$

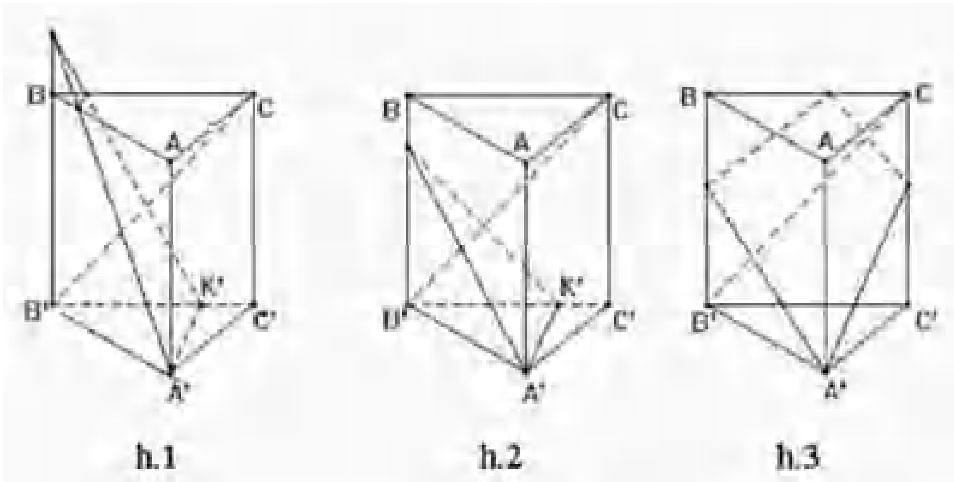
Khi đó mặt phẳng (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là tam giác AHI

Mặt khác tam giác ABC vuông cân tại A nên $BC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông BCD, kẻ đường cao BK thì $BK = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ và $HI = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác AHI vuông tại H và có diện tích $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Câu 112. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, với $AB = c$, $AC = b$, cạnh bên $AA' = h$. Mặt phẳng (P) đi qua A' và vuông góc với $B'C$. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) có hình



A. $h.1$ *và* $h.2$. **B.** $h.2$ *và* $h.3$. **C.** $h.2$. **D.** $h.1$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A' và vuông góc với BC. Từ A' ta dựng $A'K' \perp B'C'$, Vì $(ABC) \perp (BCC'B')$ nên $A'K' \perp B'C' \Rightarrow A'K' \perp (BCC'B') \Rightarrow A'K' \perp BC'$ (1).

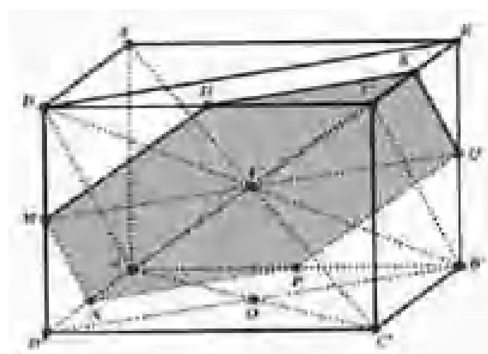
Mặt khác trong mặt phẳng $(BCC'B')$ dựng $K'x \perp B'C$ và cắt $B'B$ tại 1 điểm N (2) (điểm gì đề chưa có cho nên cho tạm điểm N).

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} BC' \perp A'K' \\ BC' \perp K'N \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'K'N)$

Câu 113. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Thiết diện là hình gì

A. Hình vuông **B.** Lục giác đều **C.** Ngũ giác đều **D.** Tam giác đều

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



Ta có AC là hình chiếu của AC' lên $(ABCD)$.

mà $AC \perp BD$ nên $AC' \perp BD$, (1)

Ta có $\left.\begin{matrix} AD \perp (AA'B'B) \\ A'B \subset (AA'B'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B \perp AD$

Lại có $A'B \perp AB'$ suy ra

$\left.\begin{matrix} A'B \perp (AB'C'D) \\ AC' \subset (AB'C'D) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC' \perp A'B$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (A'BD)$, (3)

Mặt phẳng trung trực AC' là mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của AC' và $\perp AC'$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} mp(\alpha) \text{ qua } I \\ (\alpha)//(A'BD) \end{cases}$

Do đó qua I dựng $MQ//BD$

Dựng $MN//A'D$, $NP//B'D'//BD$, $QK//B'C//A'D$, $KH//BD$

Mà $MN = NP = PQ = QK = KM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Suy ra thiết diện là lục giác đều.

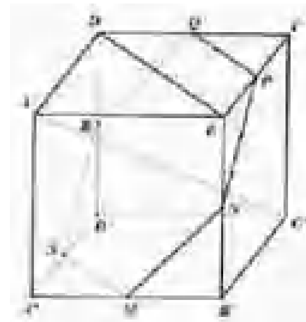
Câu 114. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Diện tích thiết diện là

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=a^2$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có mặt phẳng trung trực của AC' cắt hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là lục giác đều $MNPQRDS$ cạnh $\dfrac{1}{2}B'C=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $S=6.\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a^2\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.



Câu 115. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $SC\perp(ABC)$

B. $(SAC)\perp(ABC)$

C. Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì $A'\in SB$

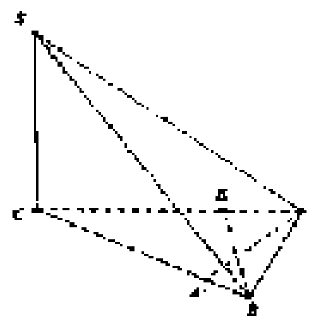
D. BK là đường cao của tam giác ABC thì $BK\perp(SAC)$.

Chọn đáp án C

Do $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow(SAC)\perp(ABC)$

Dựng $AA'\perp BC$, lại có $AA'\perp SC\Rightarrow AA'\Rightarrow(SBC)$ khi đó A' thuộc cạnh BC.

Dựng $BK\perp AC$, lại có $BK\perp SC\Rightarrow BK\perp(SAC)$.



Câu 116. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AA'=a, BC=2a, AC=a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $AC'=2a\sqrt{2}$

B. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45°

C. Hai mặt phẳng $AA'B'B$ và $BB'C'$ vuông góc nhau

D. Đáy ABC là tam giác vuông

Chọn đáp án A

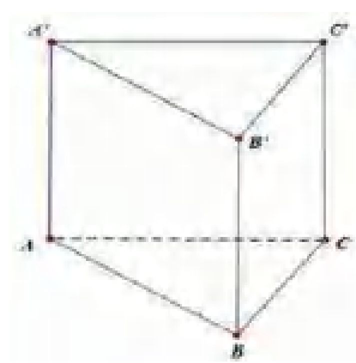
Ta có: $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\sqrt{5a^2+a^2}=a\sqrt{6}$

Mặt khác $AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow ABC$ là tam giác vuông tại B suy ra

$AB\perp BC$. Do đó $\left(\widehat{ABC,(A'BC)}\right)=\widehat{A'BA}=45°$.

Lại có: $AB\perp BB'\Rightarrow AB\perp(ABB'A')$

Do đó $(BB'C')\perp(ABB'A')$.



Câu 117. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi và chỉ khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R)

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi và chỉ khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) (hoặc $(Q)\equiv(R)$).

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng

Chọn đáp án B

A sai vì đúng trong trường hợp $(Q)\equiv(R)$

C sai vì góc giữa 2 mặt phẳng có thể bằng 0 hoặc 90°.

Câu 118. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai

Chọn đáp án D

A sai vì 2 mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của nó vuông góc với mặt phẳng thứ 3. Từ đó suy ra **C** sai.

B sai vì hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 119. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

Chọn đáp án A

B sai vì 2 đường thẳng đó có thể chéo nhau hoặc song song với nhau

C sai vì 2 mặt phẳng đó có thể song song với nhau

D sai vì 2 đường thẳng phân biệt đó có thể song song với nhau.

Câu 120. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là CBD **B.** $(BCD)\perp(AIB)$

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là AIB **D.** $(ACD)\perp(AIB)$

Chọn đáp án A

Do AB không vuông góc với (BCD) nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) không thể là $\widehat{CBD}$.

Câu 121. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Tìm khẳng định **sai**

A. $AC\perp BD'$

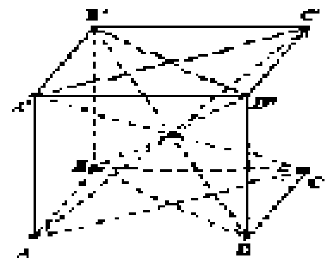
B. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau

D. Bốn đường chéo $AC', A'C, BD', B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$

Chọn đáp án B

Kiểm tra từng khẳng định ta có:



A đúng vì $AC \perp (BB'D'D) \supset BD' \Rightarrow AC \perp BD'$

C đúng, vì

$(BB'D'D) \perp AC \supset (AA'C'A) \Rightarrow (AA'C'A) \perp (BB'D'D)$

D đúng vì $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là 2 hình chữ nhật bằng nhau và $AC', A'C, BD', B'D$ là các đường chéo của chúng.

B sai vì $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hình chữ nhật có 2 cạnh là a và $a\sqrt{2}$.

Câu 122. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và gọi $d = (\alpha) \cap (\beta)$

I. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$

II. Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.

III. Nếu $b \perp d$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$

IV. Nếu $(\gamma) \perp d$ thì $(\gamma) \perp (\alpha)$ và $(\gamma) \perp (\beta)$.

Các mệnh đề đúng là

A. I, II và III **B.** III và IV **C.** II và III **D.** I, II và IV

Chọn đáp án D

Ta có các nhận xét sau:

• Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$.

• Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.

• Nếu $b \perp d$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$ hoặc $b \not\subset (\alpha), (\beta)$.

• Nếu $(\gamma) \perp d$ thì $(\gamma) \perp (\alpha)$ và $(\gamma) \perp (\beta)$.

Câu 123. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất có một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Chọn đáp án C

A sai vì hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

B sai vì qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 124. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

A. Cho đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b* và *b* nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa *a* và vuông góc với *b* thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b* và mặt phẳng (P) chứa *a*, mặt phẳng (Q) chứa *b* thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng *a* vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa *a* thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Chọn đáp án B

Nếu đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b* và mặt phẳng (P) chứa *a*, mặt phẳng (Q) chứa *b* thì chưa thể khẳng định được $(P)\perp(Q)$.

Câu 125. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Chọn đáp án C

A sai vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.

B sai vì qua một đường thẳng cho trước có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D sai vì hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của nó vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

Câu 126. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm *H* của tam giác *ABC*. Khẳng định nào sau đây **không đúng**

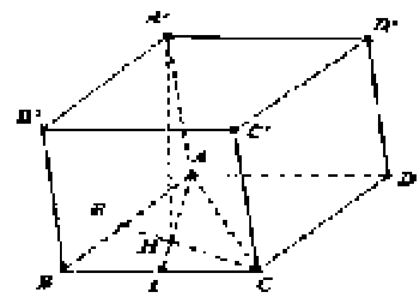
A. $BB'C'C$ là hình chữ nhật

B. $(AA'H)\perp(A'B'C')$

C. $(BB'C'C)\perp(AA'H)$

D. $(AA'B'B)\perp(BB'C'C)$

Chọn đáp án D



Ta có: $\begin{cases} BC\perp AH \\ BC\perp A'H \end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp AA'$

Mặt khác $AA'/ BB'\Rightarrow BC\perp BB'$ suy ra $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

Do $BC//B'C'\perp(AA'H)$ nên $(AA'H)\perp(A'B'C')$.

Lại có $BC\perp(AA'H)\Rightarrow(BCC'B')\perp(A'AH)$

Câu 127. Cho tứ diện *ABCD* có hai mặt *ABC, ABD* cùng vuông góc với đáy *BCD*. Vẽ các đường cao *BE, DF* của ΔBCD, đường cao *DK* của ΔACD. Khẳng định nào **sai**

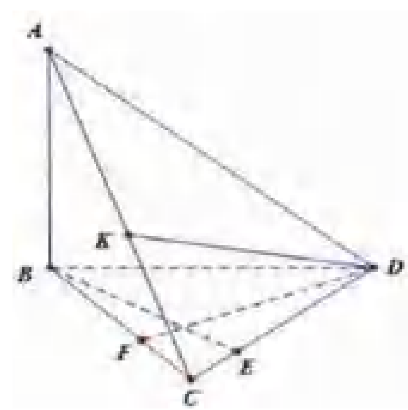
A. $AB\perp(BCD)$

B. $(DFK)\perp(ACD)$

C. $(ABE)\perp(ACD)$

D. $(ACD)\perp(ABC)$

Chọn đáp án D



Do $\begin{cases}(ABC)\perp(BCD)\\(ABD)\perp(BCD)\end{cases}\Rightarrow AB\perp(BCD)$ nên **A** đúng.

Do $\begin{cases} DF\perp BC\\ DF\perp AB\end{cases}\Rightarrow DF\perp AC$, mặt khác $DK\perp AC$

Do đó $AC\perp(DKF)$ suy ra **B** đúng.

Lại có

$\begin{cases} AB\perp CD\\ BE\perp CD\end{cases}\Rightarrow(ABE)\perp CD\Rightarrow(ABE)\perp(ACD)$.

Câu 128. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD*, *O* là tâm hình vuông *ABCD*, $AB = a, SO = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua *AB* và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện của (P) và hình chóp *S.ABCD* là hình gì

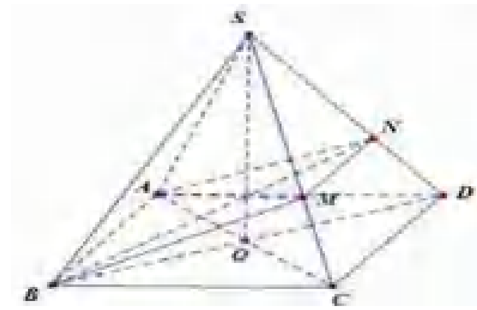
A. Hình thang vuông **B.** Hình thang cân **C.** Hình bình hành **D.** Tam giác cân

Chọn đáp án B

Gọi *MN* là giao tuyến của (SCD) và (α)

Khi đó ta có: $AB//MN//CD \Rightarrow ABMN$ là hình thang.

Dễ thấy $\Delta SAC = \Delta SBD \Rightarrow AM = BN$ nên *ABMN* là hình thang cân.



Câu 129. Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và *a, b, c, d* là các đường thẳng. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$ **B.** Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$ **D.** Nếu $c//m$ thì $c//(\alpha)$ hoặc $c//(\beta)$

Chọn đáp án C

Nếu $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ m = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \perp (\alpha) \\ m \perp (\beta) \end{cases}$

Nếu $a \subset (\alpha)$ và vuông góc với giao tuyến *m* thì $a \perp (\beta)$.

Câu 130. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau

D. Ba mệnh đề trên đều sai

Chọn đáp án D

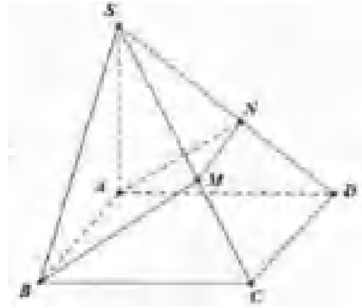
A sai vì 2 mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của nó vuông góc với mặt phẳng thứ 3. Từ đó suy ra **C** sai.

B sai vì hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 131. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa *AB* và vuông góc với (SCD), (α) cắt chóp *SABCD* theo thiết diện là hình gì

A. hình bình hành **B.** hình thang vuông **C.** hình thang không vuông **D.** hình chữ nhật

Chọn đáp án B



Gọi *MN* là giao tuyến của (SCD) và (α)

Khi đó ta có: $AB//MN//CD \Rightarrow ABMN$ là hình thang.

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Do đó $MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp AN$ suy ra *ABMN* là hình thang vuông.

Câu 132. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai đường thẳng không cắt nhau, không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Chọn đáp án B

A sai vì 2 đường thẳng phải phân biệt.

C sai vì 2 đường thẳng đã cho có thể chéo nhau.

D sai vì hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của nó vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

Câu 133. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông; $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc *ABS*.

B. $(SAC) \perp (SBD)$

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc *SOA* (với *O* là tâm hình vuông *ABCD*).

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc *SDA*.

Chọn đáp án D

Qua *M* có 1 đường thẳng *d* vuông góc (P) và (Q). Khi đó qua *M* có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) các mặt phẳng này đều chứa đường thẳng *d*.

Câu 134. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*. $AB = 2a, AD = DC = a$. Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $(SBC) \perp (SAC)$

B. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với *AB*

C. (SDC) tạo với (BCD) góc 60°

D. (SBC) tạo với đáy góc 45°.

Chọn đáp án C

Góc giữa (SCD) và (BCD) là $\widehat{ADS}$. Ta có $\tan\widehat{ADS} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{ADS} = 54,73°$.

Câu 135. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Cho hai đường thẳng song song *a* và *b* và đường thẳng *c* sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mp(α) chứa *c* thì đều vuông góc với mp(a,b)

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa *a* thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa *b* đều vuông góc với *a*.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$

Chọn đáp án B

Câu 136. Cho tứ diện *ABCD* có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi *BE* và *DF* là hai đường cao của tam giác *BCD*, *DK* là đường cao của tam giác *ACD*. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A. $(ABE) \perp (ADC)$ **B.** $(ABD) \perp (ADC)$ **C.** $(ABC) \perp (DFK)$ **D.** $(DFK) \perp (ADC)$

Chọn đáp án B Hai mặt phẳng (ABD) và (ADC) không vuông góc với nhau

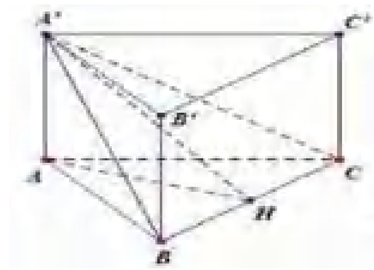
Câu 137. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy *ABC* là tam giác vuông cân ở *A*. *H* là trung điểm *BC*. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.

B. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.

C. Nếu *O* là hình chiếu vuông góc của *A* lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$.

D. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của *BC*.



Chọn đáp án B

A đúng vì $\widehat{((AA'C'C),(AA'B'B))} = \widehat{BAC} = 90°$

C, D đúng vì $BC \perp (AA'H)$ và *H* là trung điểm *BC*.

B sai vì chỉ có mặt bên $AA'C'C$ và $AA'B'B$ bằng nhau thôi.

Câu 138. Cho *a, b, c* là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa *b* đều vuông góc với *a*.

B. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa α; mặt phẳng (β) chứa *b* thì $(\alpha) \perp (\beta)$

C. Cho $a \perp b$ nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa *a* và vuông góc với *b* thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

D. Cho $a // b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa *c* trong đó $c \perp a$ và $c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Chọn đáp án C

Câu 139. Cho hai đường thẳng chéo nhau *a* và *b* đồng thời $a \perp b$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. mp(Q) chứa *b* và đường vuông góc chung của *a* và *b* thì mp$(Q) \perp a$

B. mp(R) chứa *b* và chứa đường thẳng $b' \perp a$ thì mp$(R) // a$

C. mp(α) chứa *a*, mp(β) chứa *b* thì $(\alpha) \perp (\beta)$

D. mp(P) chứa *b* thì mp$(P) \perp a$

Chọn đáp án A

Câu 140. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến *d*. Với mỗi điểm *A* thuộc (P) và mỗi điểm *B* thuộc (Q) thì ta có *AB* vuông góc với *d*.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Chọn đáp án B

Câu 141. Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng *m*. Gọi *a, b, c, d* là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

A. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$ **B.** Nếu $c \perp m$ thì $d \perp (Q)$

C. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$ **D.** Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$

Chọn đáp án A

Câu 142. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông ở A. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $(SAB) \perp (SAC)$

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là SC***B*.**

C. Vẽ $AH \perp BC, H \in BC \Rightarrow ASH$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

D. $(SAB) \perp (ABC)$

Chọn đáp án B

Góc giữa hai đường thẳng (SBC) và (SAC) là $\widehat{AHB}$ với H là hình chiếu của A lên SC.

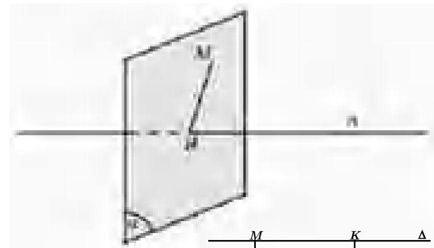
Câu 143. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây

A. Góc SBA **B.** Góc SCA **C.** Góc SIA (I là trung điểm BC) **D.** Góc SCB

Chọn A $(SBC) \cap (ABC) = BC; SA \perp (ABC); AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow ((SBC);(ABC)) = \widehat{SBA}$.

§5. KHOẢNG CÁCH

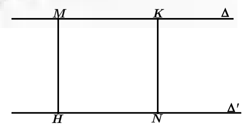
LÝ THUYẾT



1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Cho điểm M và một đường thẳng Δ.
Trong $mp\left(M,\Delta\right)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ: $d\left(M,\Delta\right)=MH$

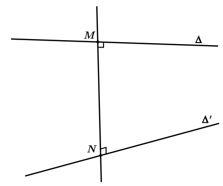
Nhận xét: $OH \le OM, \forall M \in \Delta$



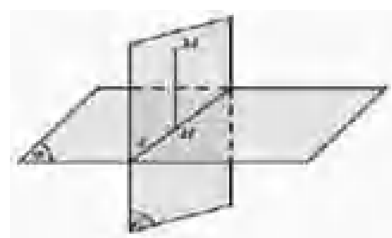
2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ':

- Nếu Δ và Δ' cắt nhau hoặc trùng nhau thì $d(\Delta,\Delta')=0$.
- Nếu Δ và Δ' song song với nhau thì $d(\Delta,\Delta')=d(M,\Delta')=d(N,\Delta)$
- Nếu Δ và Δ' chéo nhau.

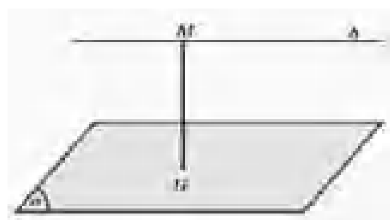


Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

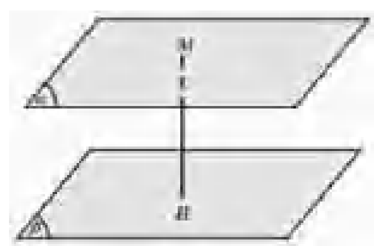
Cho mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng $\left(\alpha\right)$. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(\alpha\right)$: $d\left(M,\left(\alpha\right)\right)=MH$



4. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$: $d\left(\Delta,\left(\alpha\right)\right)=d\left(M,\left(\alpha\right)\right), M \in \Delta$.

Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha))=0$.



5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và $\left(\beta\right)$ song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳn kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ và $\left(\beta\right)$

$d\left(\left(\alpha\right),\left(\beta\right)\right)=d\left(M,\left(\beta\right)\right)=d\left(N,\left(\alpha\right)\right)$ $, M \in \left(\alpha\right), N \in \left(\beta\right)$.

6. Phương pháp tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ:

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ, rồi xem MH là đường cao của một tam giác nào đó để tính. Điểm H thường được tìm bằng một trong hai cách sau:

Trong $\mathrm{mp}\left(\mathrm{M},\Delta\right)$ vẽ $\mathrm{MH} \perp \Delta \Rightarrow \mathrm{d}\left(\mathrm{M},\Delta\right)=\mathrm{MH}$

Tìm mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua M và vuông góc với Δ tại $\mathrm{H} \Rightarrow \mathrm{d}\left(\mathrm{M},\Delta\right)=\mathrm{MH}$.

Hai công thức sau thường được dùng để tính MH

ΔMAB vuông tại M và có đường cao AH thì $\dfrac{1}{MH^2}=\dfrac{1}{MA^2}+\dfrac{1}{MB^2}$.

MH là đường cao của ΔMAB thì $MH=\dfrac{2S_{MAB}}{AB}$.

7. Phương pháp tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α)

Để tính được khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm A trên (α).

Phương pháp này thường có các trường hợp sau (minh hoạ bằng hình vẽ)

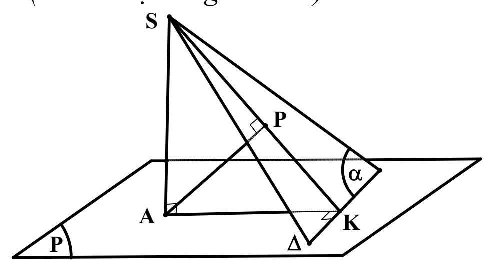
TH 1: A là chân đường cao

Bước 1: Kẻ $AK\perp\Delta\Rightarrow\Delta\perp(SAK)\Rightarrow(\alpha)\perp(SAK)$

và $(\alpha)\cap(SAK)=SK$.

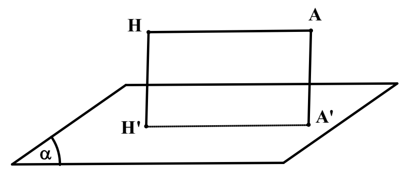
Bước 2: Kẻ $AP\perp SK\Rightarrow AP\perp(\alpha)$

$\Rightarrow d\left(A,(\alpha)\right)=AP.$



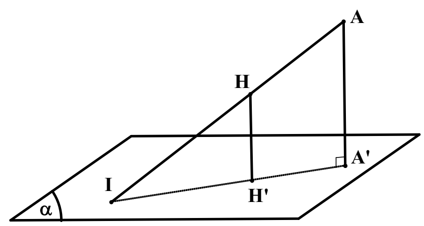
TH 2: Vẽ đường thẳng AH, $AH\parallel(\alpha)$.

Lúc đó: $d\left(A,(\alpha)\right)=d\left(H,(\alpha)\right).$



TH 3: Vẽ đường thẳng AH, $AH\cap(\alpha)=\{I\}$.

Lúc đó: $\dfrac{d\left(A,(\alpha)\right)}{d\left(H,(\alpha)\right)}=\dfrac{IA}{IH}\Rightarrow\quad d\left(A,(\alpha)\right)=\dfrac{IA}{IH}.d\left(H,(\alpha)\right)$

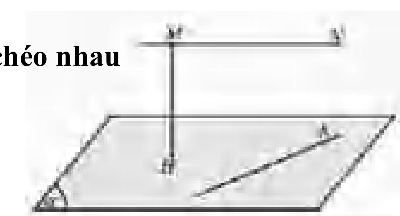


Chú ý: Nếu tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì

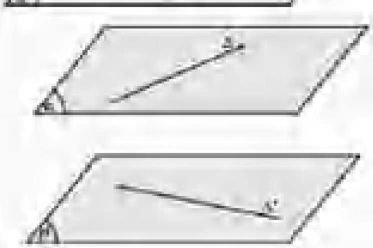
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}.$$

8. Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'. Khi đó $d(\Delta,\Delta')=d(\Delta',(\alpha))$



Phương pháp 2: Tìm hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm



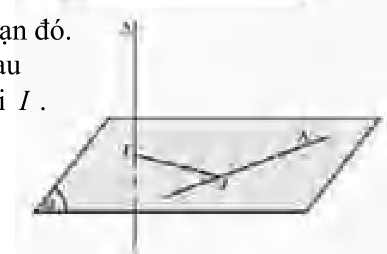
Phương pháp 3: Tìm đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Trường hợp 1: Δ và Δ' vừa chéo nhau vừa vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và vuông góc với Δ tại I.

Bước 2: Trong mặt phẳng (α) kẻ $IJ\perp\Delta'$.

Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=IJ$.



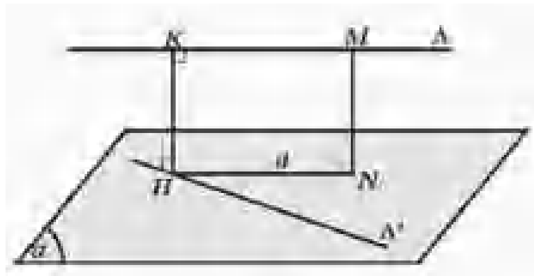
Trường hợp 2: Δ và Δ' chéo nhau mà không vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

Bước 2: Dựng d là hình chiếu vuông góc của Δ xuống (α) bằng cách lấy điểm $M \in \Delta$ dựng đoạn $MN \perp (\alpha)$, lúc đó d là đường thẳng đi qua N và song song với Δ.

Bước 3: Gọi $H = d \cap \Delta'$, dựng $HK \parallel MN$

Khi đó HK là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta, \Delta') = HK = MN$.



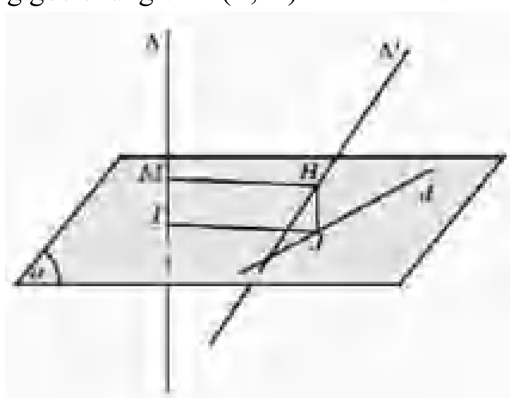
Hoặc

Bước 1: Chọn mặt phẳng $(\alpha) \perp \Delta$ tại I.

Bước 2: Tìm hình chiếu d của Δ' xuống mặt phẳng (α).

Bước 3: Trong mặt phẳng (α), dựng $IJ \perp d$, từ J dựng đường thẳng song song với Δ cắt Δ' tại H, từ H dựng $HM \parallel IJ$.

Khi đó HM là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta, \Delta') = HM = IJ$.



Phương pháp 4: Sử dụng phương pháp vectơ

a) MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0 \end{cases}$

b) Nếu trong (α) có hai vectơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ thì $OH = d\left(O, (\alpha)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{u_2} \\ H \in (\alpha) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_2} = 0 \\ H \in (\alpha) \end{cases}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây?

A. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

B. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (α) chứa đường này và (α) vuông góc với đường kia.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α)

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

• Đáp án A: Đúng
• Đáp án B: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố cắt nhau.
• Đáp án C: Sai, vì mặt phẳng đó chưa chắc đã tồn tại.
• Đáp án D: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố vuông góc.

Chọn đáp án D.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường thẳng vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kỳ thuộc a tới mp(P).

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kỳ trên b.

D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Hướng dẫn giải:

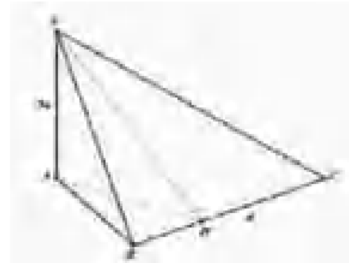
Chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA vuông góc với $\left(ABC\right)$ và $SA = 3a$. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2, BC = a$. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

A. $2a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.

Hướng dẫn giải:

Kẻ AH vuông góc với BC:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \rightarrow AH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{4a^2}{a} = 4a$$

Khoảng cách từ S đến BC chính là SH

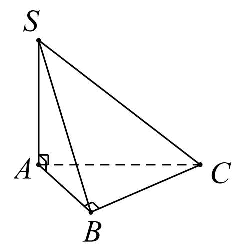
Dựa vào tam giác vuông ΔSAH ta có

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Do $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases}$ nên $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$

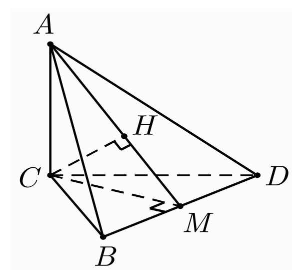
Như vậy $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + (AB^2 + BC^2)} = \sqrt{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 6. Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{7}{5}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Hướng dẫn giải:



Do ΔABC đều cạnh a nên đường cao $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$d(C, AM) = CH = \frac{AC.MC}{\sqrt{AC^2 + MC^2}} = a\frac{\sqrt{66}}{11}$$

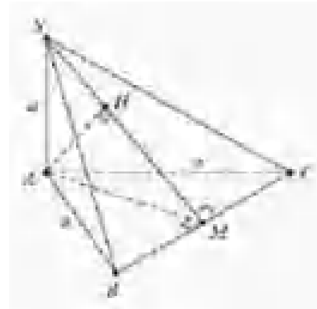
Chọn đáp án C.

Câu 7. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S sao cho $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

• Gọi M là trung điểm của BC ; H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.



• Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SM$, do đó $AH \perp (SBC)$.

Vậy $AH = d(A,(SBC))$.

• $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \dfrac{AS.AM}{\sqrt{AS^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

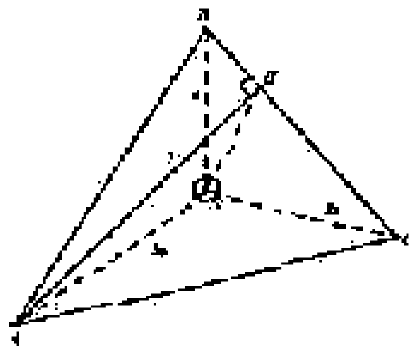
Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a$, $SB = a$, $SC = 2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{7a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{8a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.



+ Dựng $AH \perp BC \Rightarrow d(A, BC) = AH$.

+ $\begin{cases} AS \perp (SBC) \supset BC \Rightarrow AS \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases}$, AH cắt AS cùng nằm trong (SAH).

$\Rightarrow BC \perp (SAH) \supset SH \Rightarrow BC \perp SH$.

Xét trong ΔSBC vuông tại S có SH là đường cao ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow SH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

+ Ta dễ chứng minh được $AS \perp (SBC) \supset SH \Rightarrow AS \perp SH \Rightarrow \Delta ASH$ vuông tại S.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔASH vuông tại S ta có:

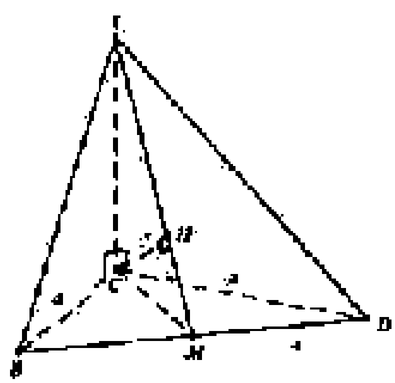
$$AH^2 = SA^2 + SH^2 = 9a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{49a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{7a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 9. Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $a\sqrt{\dfrac{6}{11}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{7}{5}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{4}{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.



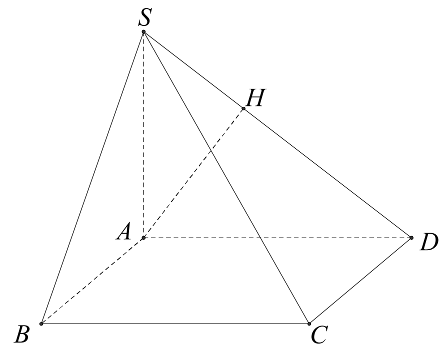
Dựng $CH \perp AM \Rightarrow d(C, AM) = CH$.

Vì ΔBCD là tam giác đều cạnh a và M là trung điểm của BD nên dễ tính được $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔACM vuông tại C có CH là đường cao, ta có:

$\dfrac{1}{CH^2}=\dfrac{1}{CA^2}+\dfrac{1}{CM^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}}=\dfrac{11}{6a^2}\Rightarrow CH^2=\dfrac{6a^2}{11}\Rightarrow CH=a\sqrt{\dfrac{6}{11}}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD=2a$, $SA=a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:



A. $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp CD$; $AD\perp CD$.

Suy ra $(SAD)\perp CD$ Trong (SAD) kẻ AH vuông góc SD tại H. Khi đó $AH\perp(SCD)$

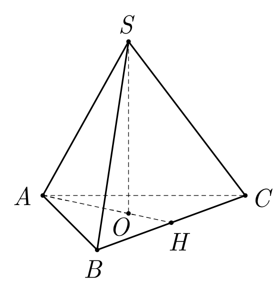
$d(A,(SCD))=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C.

Câu 11. Hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến (ABC) bằng :

A. $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:



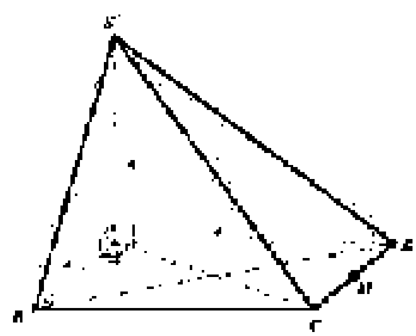
Gọi O là chân đường cao của hình chóp.

Ta có $AO=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{2}{3}.3a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$

$\mathrm{d}(O,(ABC))=SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a$

Chọn đáp án C.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?



A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$.

C. $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:

Khoảng cách từ M đến (SAB):

$d(M,(SAB))=d(D,(SAB))=a$.

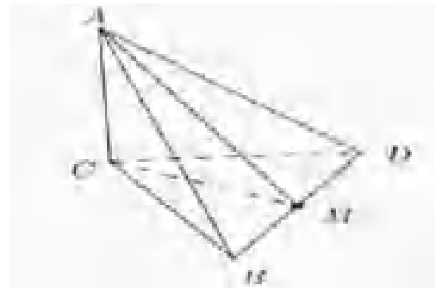
Chọn đáp án D.

Câu 13. Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC\perp(BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ CM \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp AM$ (Định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow d\left(A;BD\right) = AM$.

$CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác BCD đều).

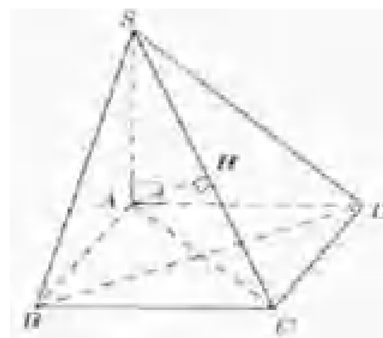
Ta có: $AM = \sqrt{AC^2 + MC^2} = \sqrt{2a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60°$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Kẻ $AH \perp SC$, khi đó $d\left(A;SC\right) = AH$.

$ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ đều nên $AC = a$.

Trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

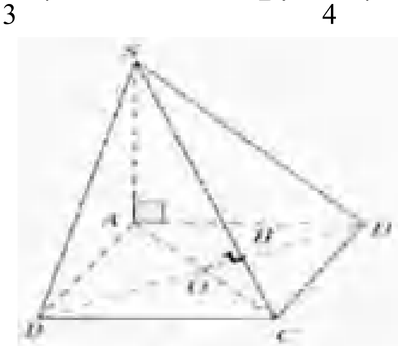
$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Kẻ $OH \perp SC$, khi đó $d\left(O;SC\right) = OH$. Ta có:

$\triangle SAC \sim \triangle OCH$ (g-g) nên $\dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \dfrac{OC}{SC}.SA$.

Mà: $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.

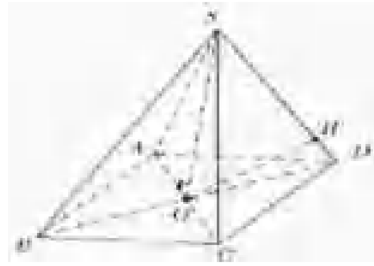
Vậy $OH = \dfrac{OC}{SC}.SA = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng

A. $a\sqrt{2}\cot\alpha$. **B.** $a\sqrt{2}\tan\alpha$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



$SO \perp (ABCD)$, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Kẻ $OH \perp SD$, khi đó $d(\mathrm{O};SD) = OH$, $\alpha = \widehat{SDO}$.

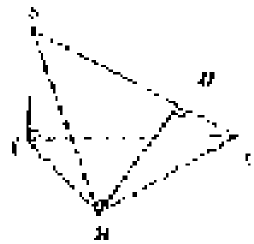
Ta có: $OH = OD\sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$, khi đó $d(B;SC) = BH$. Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

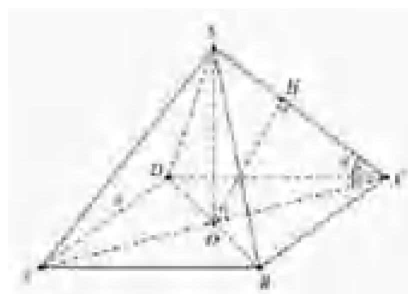
Trong tam giác vuông SBC ta có: $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2}$

$\Rightarrow BH = \dfrac{SB.BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a$.

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ **B.** $a\sqrt{2}\tan$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ **D.** $a\sqrt{2}\cot\alpha$

Hướng dẫn giải:



• $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

• Khoảng cách cần tìm là đoạn OH.

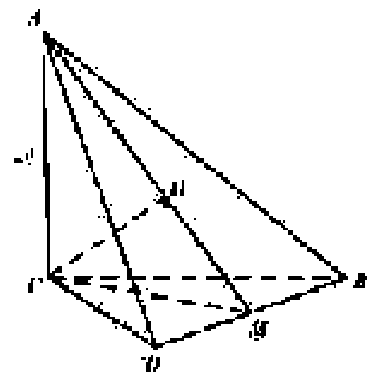
$OH = OC\sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$

Chọn đáp án C.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bên AC vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $a\sqrt{\dfrac{6}{11}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{7}{5}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{4}{7}}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn đáp án B.

Nối CM . Kẻ $CH \perp AM$

Suy ra $d(C;AM) = CH$

Xét ΔACM có

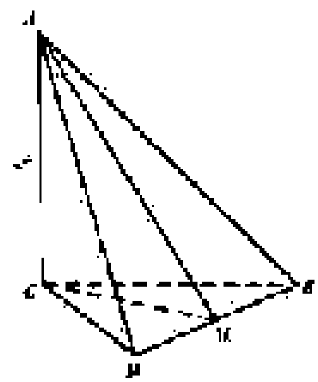
$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CM^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{6a^2}$$

$\Rightarrow CH = a\sqrt{\frac{6}{11}}$. Vậy $d(C;AM) = CH = a\sqrt{\frac{6}{11}}$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bên AC vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD bằng

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn đáp án D.

Ta có $d(A;BD) = \frac{a\sqrt{11}}{2}$ $AC \perp (BCD) \Rightarrow AC \perp BD$

Lại có với M là trung điểm BD mà ΔBCD đều nên $CM \perp BD$

Từ đó ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ CM \perp BD \end{cases} \Rightarrow AM \perp BD$

Suy ra $d(\text{A;BD}) = \text{AM}$

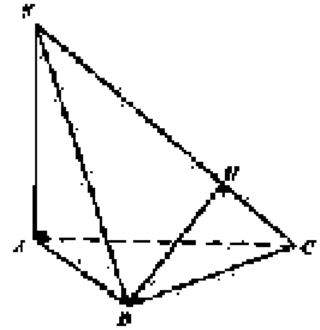
Xét tam giác vuông ACM , ta có

$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. Vậy $d(A;BD) = \frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn đáp án B.

Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$

Suy ra ΔSBC vuông tại B

Kẻ $BH \perp SC$. Ta có $d(B;SC) = BH$

Lại có

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{SA^2 + AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2}$$

$\Rightarrow d(B;SC) = BH = 2a$.

Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A của hình lập phương đó đến đường thẳng CD' bằng

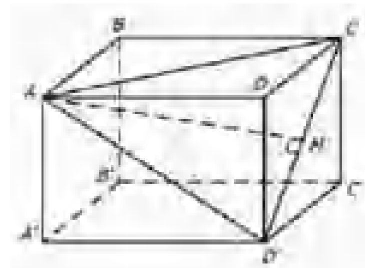
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của CD'. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tam giác ACD' là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$.

$AM \perp CD' \Rightarrow d\left(A, CD'\right) = AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Đáp án: **B.**



Câu 23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ đỉnh A của hình lập phương đó đến đường thẳng DB' bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

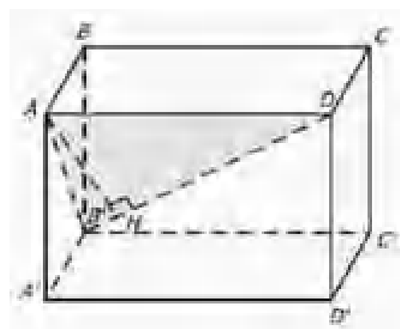
Hướng dẫn giải:

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống DB'.

Dễ thấy $AD \perp \left(ABB'A'\right) \Rightarrow \Delta ADB'$ vuông đỉnh A.

$AD = a; AB' = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB'^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Đáp án D.



Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ ba điểm nào sau đây đến đường chéo AC' bằng nhau ?

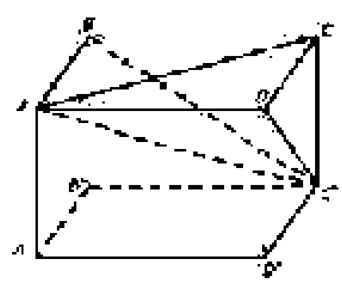
A. A', B, C'. **B.** B, C, D. **C.** B', C', D'. **D.** A, A', D'.

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy các tam giác $ABC', C'CA, ADC'$ là các tam giác vuông bằng nhau nên các đường cao hạ từ đỉnh góc vuông xuống canh huyền cũng bằng nhau.

Vậy: $d\left(B, AC'\right) = d\left(C, AC'\right) = d\left(D, AC'\right)$

Đáp án B.

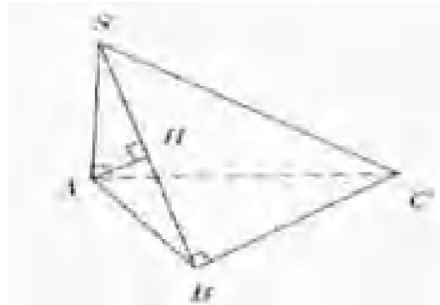


Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Kẻ $AH \perp SB$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AH$.

Trong tam giác vuông SAB ta có:

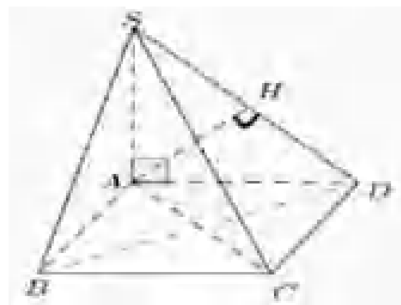
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Kẻ $AH \perp SD$, mà vì $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ nên $d(A;SCD) = AH$.

Trong tam giác vuông SAD ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2}$$

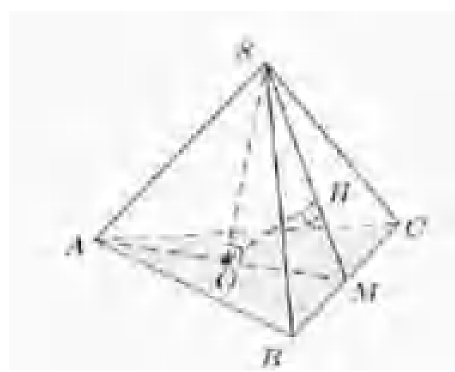
$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Câu 27. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



$SO \perp (ABC)$, với O là trọng tâm của tam giác ABC.

M là trung điểm của BC.

Kẻ $OH \perp SM$, ta có

$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp MO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM) \Rightarrow BC \perp OH$

nên suy ra $d\left(\text{O};(SBC)\right) = OH$.

Ta có: $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

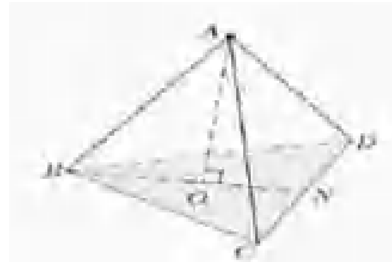
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO.\text{OM}}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3}{9}a^2}} = \frac{3a}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{3}{10}}a.$$

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn B.



Ta có: $AO \perp (BCD) \Rightarrow O$ là trọng tâm tam giác BCD.

$d(A;(BCD)) = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là:

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{8}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

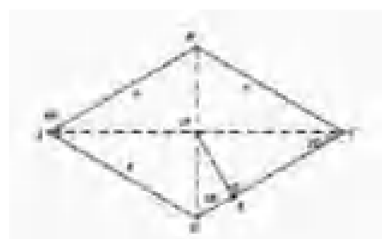
<u>Hướng dẫn giải:</u>

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: kẻ $OK \perp BC\,(K \in BC)$.

Mà $BC \perp SO$ nên suy ra hai mặt phẳng (SOK) và (SBC) vuông góc nhau theo giao tuyến SK.

Trong mặt phẳng (SOK): kẻ $OH \perp SK\,(H \in SK)$.

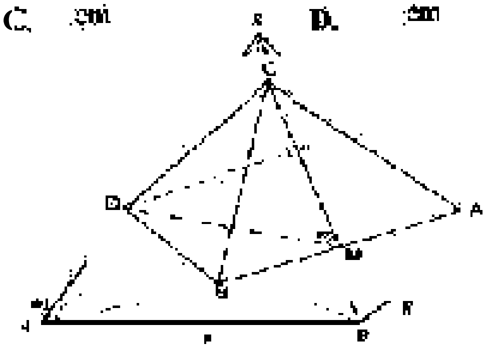
Suy ra: $OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.



Câu 30. Cho hai tam giác ABC và ABD nằm trong hai mặt phẳng hợp với nhau một góc 60^o, ΔABC cân ở C, ΔABD cân ở D. Đường cao DK của ΔABD bằng $12cm$. Khoảng cách từ D đến (ABC) bằng

A. $3\sqrt{3}$ cm **B.** $6\sqrt{3}$ cm **C.** [illegible] **D.** [illegible]

<u>Hướng dẫn giải:</u>



- Gọi M là trung điểm AB suy ra:
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên CM

$\Rightarrow DH = d(D,(ABC))$

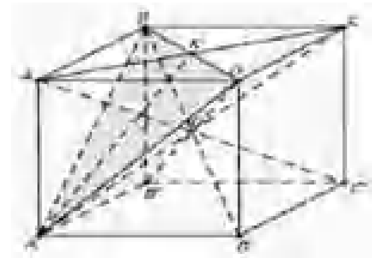
- $DH = \sin 60^0 . DM = 6\sqrt{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó khoảng cách từ tâm của hình lập phương đến mặt phẳng (BDA') bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Bài toán chứng minh $AC' \perp (A'BD)$ trong sách giáo khoa đã có. Không chứng minh lại.

Dễ dàng tìm được $AC' = a\sqrt{3}$

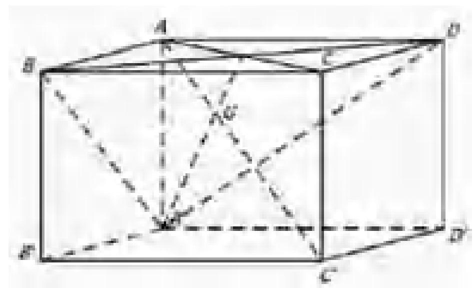
$d\left(O,\left(A'BD\right)\right) = OJ = \dfrac{1}{6}AC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Đáp án: **D**

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến (BDA') bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có

$$\left.\begin{array}{l} AC' \perp \left(BDA'\right) \\ AC' \cap \left(BDA'\right) = \{G\} \end{array}\right\} \Rightarrow d\left(A,\left(BDA'\right)\right) = AG = \frac{1}{3}AC$$

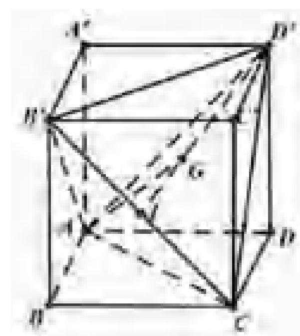
$d\left(A,\left(BCA'\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Đáp án **B.**

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến $(B'CD')$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $AB' = AC = AD' = B'D' = B'C = CD' = a\sqrt{2}$

Nên tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.

Gọi I là trung điểm $B'C$, G là trọng tâm tam giác $B'CD'$.

Khi đó ta có: $d\left(A;\left(B'CD'\right)\right) = AG$

Vì tam giác $B'CD'$ đều nên $D'I = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $D'G = \dfrac{2}{3}D'I = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

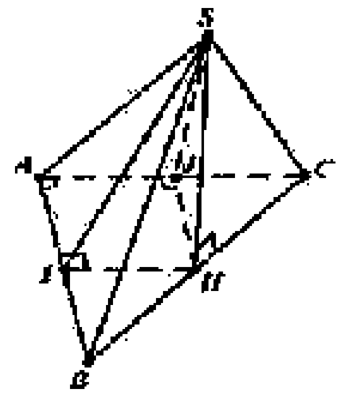
Trong tam giác vuông AGD' có:

$AG = \sqrt{D'A^2 - D'G^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C**

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $AB = a$. Mặt bên chứa BC của hình chóp vuông góc với mặt đáy, hai mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng đáy (ABC).

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC), vì mặt bên (SBC) vuông góc với (ABC) nên $H \in BC$.

Dựng $HI \perp AB, HJ \perp AC$, theo đề bài ta có $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^0$.

Do đó tam giác $SHI = SHJ$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

Suy ra $HI = HJ$.

Lại có $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^0 \Rightarrow \Delta BIH = \Delta CJH \Rightarrow HB = HC$

Vậy H trùng với trung điểm của BC. Từ đó ta có HI là đường trung bình của tam giác ABC nên $HI = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác SHI vuông tại H và có $\widehat{SIH} = 45^0 \Rightarrow \Delta SHI$ vuông cân.

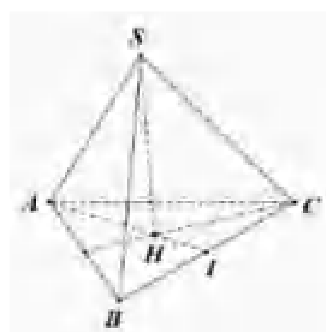
Do đó: $SH = HI = \frac{a}{2}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng b, cạnh đáy bằng d, với $d < b\sqrt{3}$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định bên dưới.

A. $d(S,(ABC)) = \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}d^2}$.　　**B.** $d(S,(ABC)) = \sqrt{b^2 - d^2}$.

C. $d(S,(ABC)) = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3}d^2}$.　　**D.** $d(S,(ABC)) = \sqrt{b^2 + d^2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Gọi I là trung điểm của BC, H là trọng tâm tam giác ABC.

Do S.ABC là hình chóp đều nên $SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S,(ABC)) = SH$.

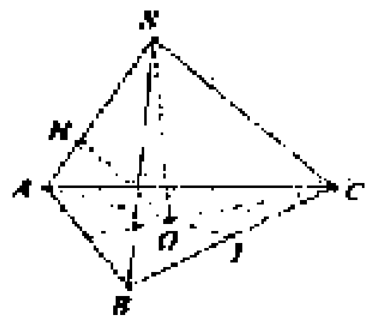
Ta có $AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$.

$AH = \frac{2}{3}AI = \frac{d\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{d^2}{3}}$. **Chọn** C.

Câu 36. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm O đến cạnh bên SA bằng

A. $a\sqrt{6}$.　　**B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.　　**C.** $a\sqrt{3}$.　　**D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Vì hình chóp $S.ABC$ đều có SO là đường cao $\Rightarrow$ O là tâm của ΔABC

Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Tam giác ABC đều nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $OH \perp SA . \Rightarrow d\left(O, SA\right) = OH$. Xét tam giác SOA vuông tại O :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng $\left(C_1D_1M\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$ **C.** $\dfrac{1}{2}a$ **D.** a

Hướng dẫn giải:

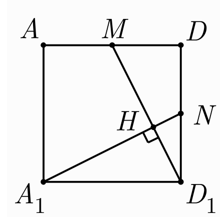
Gọi N là trung điểm cạnh DD_1 và $H = A_1N \cap MD_1$

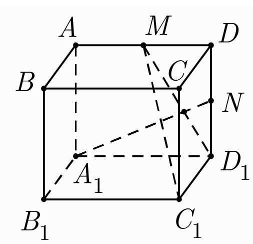
Khi đó ta chứng minh được $A_1N \perp MD_1$

suy ra $A_1N \perp (C_1D_1M)$

$$\Rightarrow d\left(A_1, (C_1D_1M)\right) = AH = \frac{A_1D_1^2}{A_1N} = \frac{A_1D_1^2}{\sqrt{A_1D_1^2 + ND_1^2}}$$

$$\Rightarrow d\left(A_1, (C_1D_1M)\right) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$ **Chọn đáp án A.**

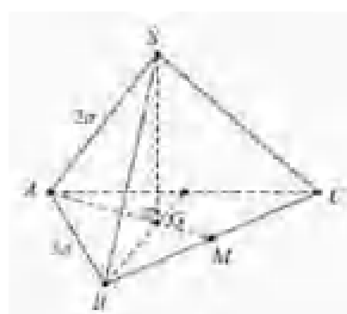




Câu 38. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng:

A. $4a$. **B.** $3a$. **C.** a. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải:



- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là chóp đều nên $SG \perp \left(ABC\right)$.
- $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3}.$
- ΔSAG vuông tại $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$

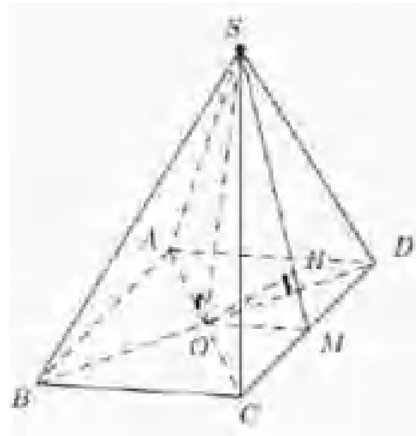
Chọn đáp án C.

Câu 39. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



$SO \perp (ABCD)$, với O là tâm của hình vuông $ABCD$. M là trung điểm của CD.

Kẻ $OH \perp SM$, ta có:

$$\begin{cases} DC \perp SO \\ DC \perp MO \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SOM) \Rightarrow DC \perp OH.$$

nên suy ra $d(O;(SCD)) = OH$.

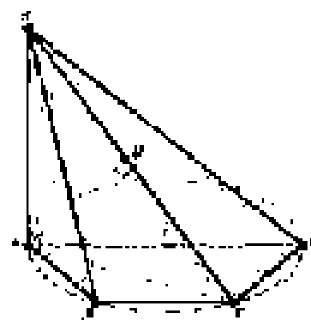
Ta có: $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO.\text{OM}}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD) lần lượt là:

A. $a\sqrt{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:



☑ $d(A,(SCD)) = AH; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

☑ $d(B,(SCD)) = d(I,(SCD)) = \frac{1}{2}.d(A,(SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A.

Câu 41. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước AB = a, AD = b, AA_1 = c. Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai**?

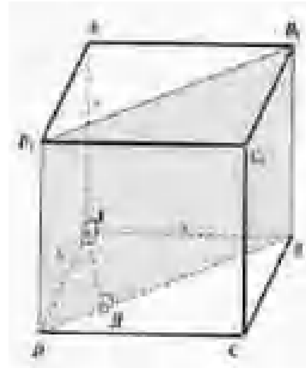
A. khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC_1 bằng b.

B. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

D. $BD_1 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Hướng dẫn giải:



☑ $d\left(AB, CC_1\right) = BC = b \Rightarrow$ Câu A đúng.

☑

$$d\left(A,\left(B_1BD\right)\right) = AH; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} \Rightarrow AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Câu B đúng.

☑ Suy ra câu C sai.

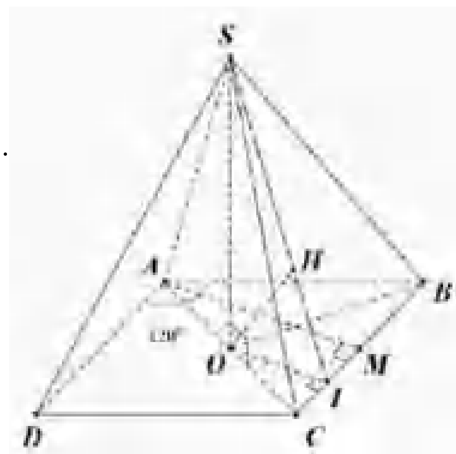
☑ Suy ra câu D đúng, đường chéo hình chữ nhật bằng $BD_1 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Chọn đáp án C.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình thoi tâm O, cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$, đường cao $SO = a$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{67}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{47}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Hướng dẫn giải:



Vì hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}$ bằng 120°

Suy ra tam giác ABC đều cạnh a.

Kẻ đường cao AM của tam giác ABC $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $OI \perp BC$ tại I $\Rightarrow OI = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d\left(O,(SBC)\right) = OH$

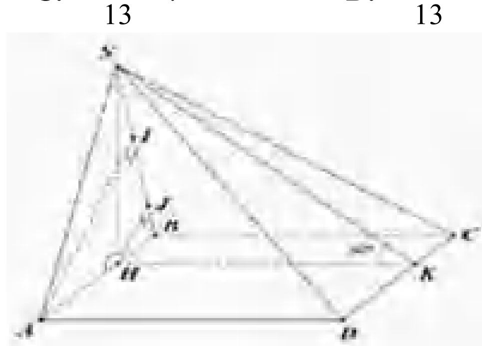
Xét tam giác vuông SOI ta có:

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **Chọn D.**

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a; AD = 2a.$ Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB.$ Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải:



Kẻ $HK \perp CD$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$

là 

Có $HK = AD = 2a$, $SH = HK.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

Có $BC \perp (SAB)$,

Kẻ $HJ \perp SB$, mà $HJ \perp BC$ $HJ \perp (SBC)$, $\dfrac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \dfrac{BA}{BH} = 3$

$d(A,(SBC)) = 3.d(H,(SBC)) = 3HJ$

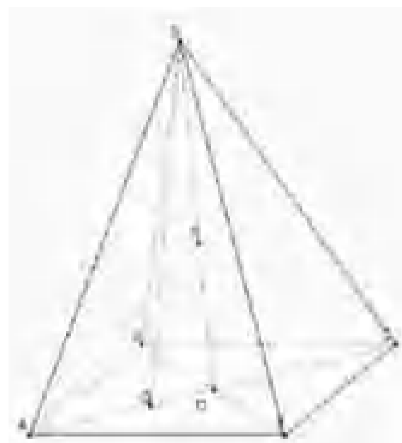
Mà $\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HB^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{12a^2} = \dfrac{13}{12a^2}$ $\Rightarrow HJ = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$.

Chọn C.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a; $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm G của tam giác ABD, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Xác định khoảng cách:

- Đặc điểm của hình: Có đáy là hình thoi, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên tam giác ABD đều cạnh a; $AC = a\sqrt{3}; AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác SAC vuông ở S, có đường cao SG nên

$SA = \sqrt{AG.AC} = \sqrt{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3}} = a$; $SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét hình chóp $S.ABD$ có chân đường cao trùng với tâm của đáy nên $SA = SB = SD = a$.

- Dựng hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD): Kẻ đường cao AH của tam giác SAO với O là tâm của hình thoi.

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SG \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$ $\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp SO \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

Vậy $d(A,(SBD)) = AH$

- Tính độ dài AH: $AH = \dfrac{SG.AO}{SO}$

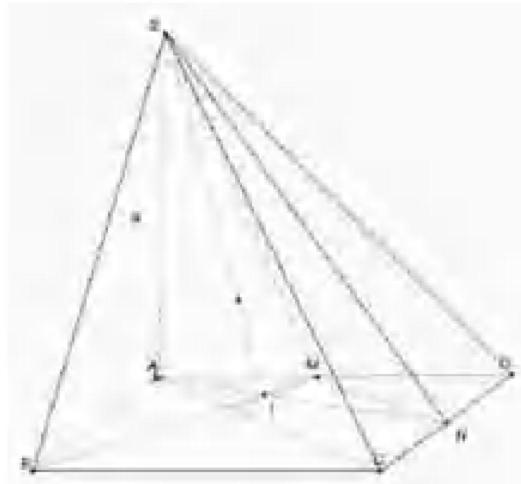
Với $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **Chọn đáp án D.**

Cách khác: Nhận xét tứ diện $S.ABD$ có tất cả các cạnh bằng a; do đó $S.ABD$ là tứ diện đều, vậy $AH = SG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC. Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



+ Đặc điểm của hình: Đáy là hình vuông $ABCD$ nên $AN \perp BM$.

Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{AIS} = 45^\circ$. Vậy tam giác ASI vuông cân tại A. $AI = a$

- Xác định khoảng cách: $d\left(D,(SBM)\right) = d\left(A,(SBM)\right) = AH$. Với H là chân đường cao của tam giác ASI.

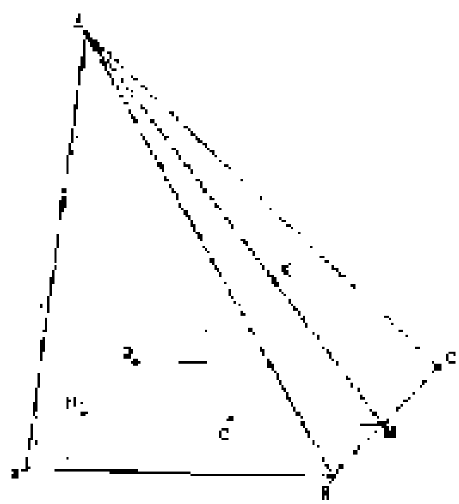
- Tính AH: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{2}{a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn đáp án D**

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AD, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{33}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{33}}{11}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Hướng dẫn giải:



- Đặc điểm của hình: Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIH} = 60^\circ$.

$IH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = IH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

- Xác định khoảng cách: $d\left(H,(SAC)\right) = HK$. Với HK là đường cao của tam giác SHM với M là trung điểm BC.

- Tính HK.

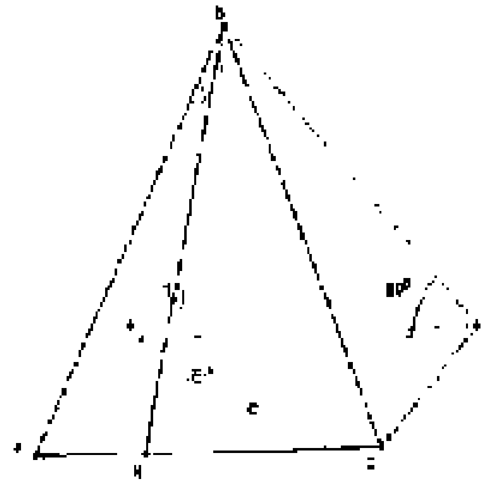
Xét tam giác vuông SHM có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{(a)^2} = \dfrac{11}{3a^2}$

$HK = \dfrac{\sqrt{33}a}{11}$. **Chọn đáp án C**

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh bên SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{18}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{285}}{18}$.

Hướng dẫn giải:



Đặc điểm hình: Góc giữa SD tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDE}=60^\circ$.

$DE=\sqrt{OD^2+OE^2}=\dfrac{2\sqrt{5}a}{6}$;

$SE=DE.\tan 60^0=\dfrac{2\sqrt{15}}{6}a$

Xác định khoảng cách

$d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(E,(SBC)\right)=\dfrac{3}{2}EH$

Tính EH :

$$\frac{1}{EH^2}=\frac{1}{EK^2}+\frac{1}{ES^2}=\frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{15}a}{6}\right)^2}=\frac{57}{20a^2}$$

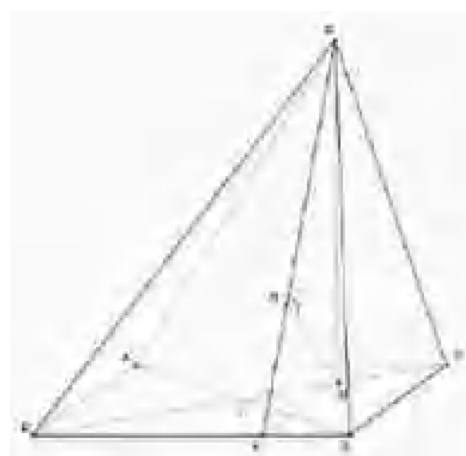
$EH=\dfrac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{57}}$. Vậy

$d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(E,(SBC)\right)=\dfrac{3}{2}EH=\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I với $AB=2a\sqrt{3};BC=2a$. Biết chân đường cao H hạ từ đỉnh S xuống đáy $ABCD$ trùng với trung điểm đoạn DI và SB hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Khoảng cách từ D đến (SBC) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Hướng dẫn giải:



Đặc điểm của hình: Góc giữa SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SBM}=60^\circ$. $BM=\dfrac{3}{4}BD=3a$;

$SM=BM.\tan 60^0=3\sqrt{3}a$

Xác định khoảng cách:

$d\left(D,(SBC)\right)=\dfrac{4}{3}d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{4}{3}MH$

Tính khoảng cách MH :

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MK^2}+\frac{1}{MS^2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}.2\sqrt{3}a\right)^2}+\frac{1}{\left(3\sqrt{3}a\right)^2}=\frac{5}{27a^2}\quad MH=\sqrt{\frac{27}{5}}a\text{, vậy}$$

$d\left(D,(SBC)\right)=\dfrac{4}{3}d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{4}{3}MH=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}a$ **Chọn đáp án C.**

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Gọi M là một điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3MA$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCM) là

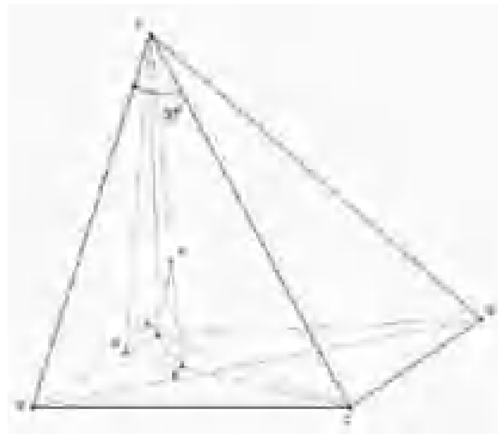
A. $\dfrac{\sqrt{34}a}{51}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{34}a}{51}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{34}a}{51}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{34}a}{51}$.

Đặc điểm của hình: SC tạo với mặt phẳng (SAB) góc $\widehat{CSB} = 30^\circ$. $BC = \sqrt{3}a$; $SB = BC.\tan 30^0 = a$;

$MC = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 + 3a^2} = \dfrac{\sqrt{57}}{4}a$; $MA = \dfrac{a}{4}$; $AC = 2a$;

$AS = 2\sqrt{2}a$

$AK = \dfrac{2S_{AMC}}{MC} = \dfrac{\sqrt{19}}{19}a$



Xác định khoảng cách: $d\left(A,(SBC)\right) = AH$

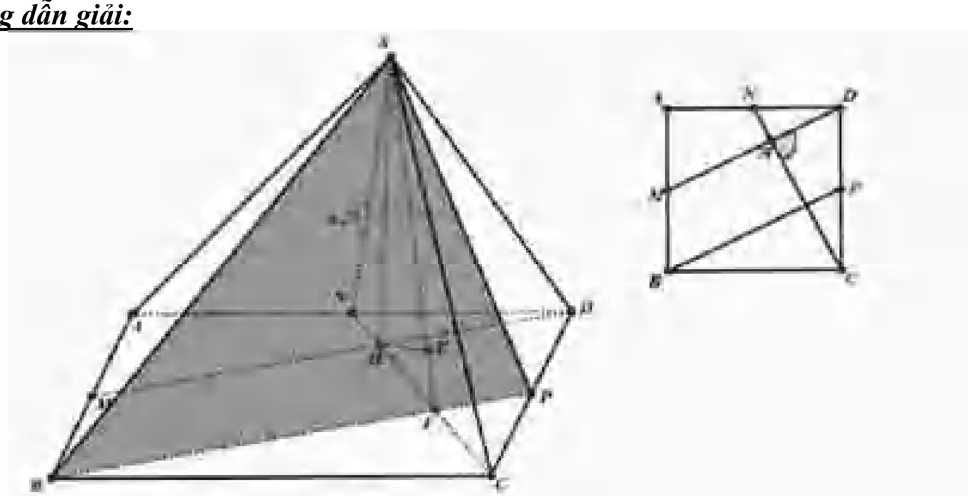
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{19}}{19}a\right)^2} + \frac{1}{\left(2\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{153}{8a^2}$$

Vậy $d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{2\sqrt{34}}{51}$ **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và DC. Gọi H là giao điểm của CN và DM, biết SH vuông góc $(ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBP) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Ta chứng minh : $NC \perp MD$

Thật vậy : $\Delta ADM = \Delta DCM$ vì $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$; $AD = DC$; $AM = DN$

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN}$; mà $\widehat{ADM} + \widehat{MDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MDC} + \widehat{DCN} = 90^0 \Rightarrow NC \perp MD$

Ta có : $BP \perp NC\left(MD//BP\right); BP \perp SH \Rightarrow BP \perp \left(SNC\right) \Rightarrow \left(SBP\right) \perp \left(SNC\right)$

Kẻ $HE \perp SF \Rightarrow HE \perp \left(SBP\right) \Rightarrow d\left(H,(SBP)\right) = d(C,(SBP)) = HE$

Do $DC^2 = HC.NC \Rightarrow HC = \dfrac{DC^2}{NC} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow HF = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Mà $HE = \dfrac{SH.HF}{SF} = \dfrac{SH.HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $AD = 2a\sqrt{2}; BC = a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$ cùng vuông góc với mặt đáy $\left(ABCD\right)$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SCD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60°. Khoảng cách từ M là trung điểm đoạn AB đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{20}$. **D.** $\dfrac{9a\sqrt{15}}{20}$.

Hướng dẫn giải:

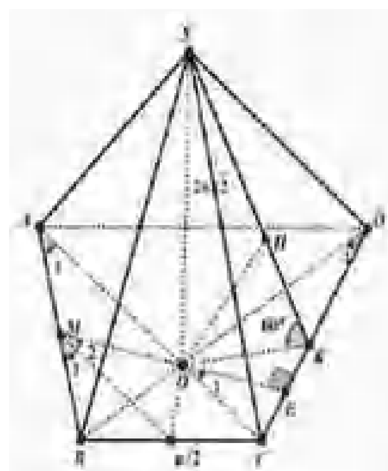
Do $\left(SAC\right) \perp \left(ABCD\right), \left(SBD\right) \perp \left(ABCD\right), \left(SAC\right) \cap \left(SBD\right) = SO \Rightarrow SO \perp \left(ABCD\right)$

Dựng góc giữa $\left(SCD\right), \left(ABCD\right)$:

$\left(SCD\right) \cap \left(ABCD\right) = DC$. Kẻ $OK \perp DC \Rightarrow SK \perp DC \Rightarrow \left(\widehat{\left(SCD\right),\left(ABCD\right)}\right) = \widehat{SKO}$

Kéo dài MO cắt DC tại E

Ta có :



$\widehat{A_1} = \widehat{D_1}; \widehat{A_1} = \widehat{M_1}; \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{O_1} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{O_1}; \widehat{O_1} + \widehat{EOD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{E} = 90^0 \Rightarrow E \equiv K$

Ta có: $OK = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}}; OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}; MK = \dfrac{9a\sqrt{5}}{10}$

$$\frac{d(O,(SCD))}{d(M,(SCD))} = \frac{OE}{ME} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right) = \frac{9}{4} d\left(O,(SCD)\right) = \frac{9}{4} OH$$

$$OS = OK.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{OK.OS}{\sqrt{OK^2 + OS^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d\left(M,(SCD)\right) = \frac{9a\sqrt{15}}{20}$$

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Biết rằng $SA = 2\sqrt{3}a$ và đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 30°. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ tính theo a bằng

A. $\frac{2\sqrt{66}a}{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{11}a}{66}$. **C.** $\frac{2\sqrt{66}a}{11}$. **D.** $\frac{\sqrt{66}a}{11}$.

Hướng dẫn giải:

SC có hình chiếu vuông góc lên mp$\left(ABCD\right)$ là HC $\Rightarrow \widehat{SC,\left(ABCD\right)} = \widehat{SCH} = 30^0$

Đặt $AD = 4x$ $\left(x > 0\right)$

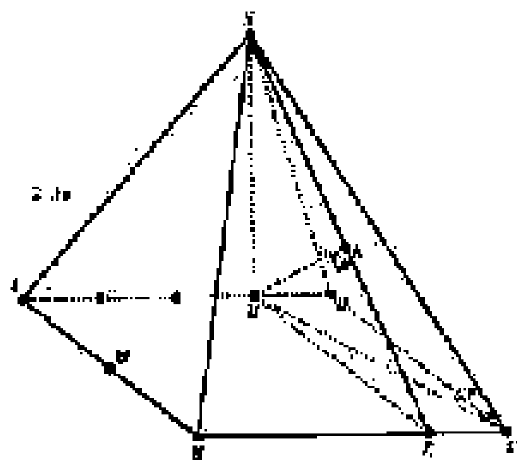
Ta có : $SA^2 = AH.AD \Rightarrow 12a^2 = 12x^2 \Rightarrow x = a$
$\Rightarrow AD = 4a, AH = 3a, HD = a$

Mà : $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = 3a$
$\Rightarrow DC = 2\sqrt{2}a$

Kẻ $HE \perp BC, SH \perp BC \Rightarrow \left(SHE\right) \perp \left(SBC\right)$

Kẻ

$HK \perp SE \Rightarrow HK \perp \left(SBC\right)$



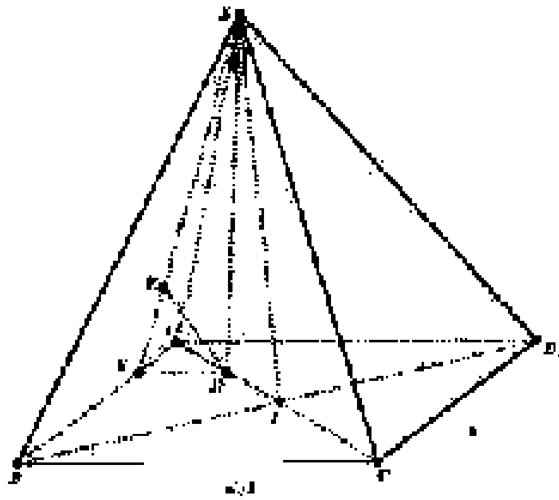
$$\Rightarrow d\left(H,SBC\right) = HK \Rightarrow d\left(M,(SBC)\right) = \frac{HK}{2}$$

$$HK = \frac{SH.EH}{\sqrt{SH^2 + EH^2}} = \frac{2a\sqrt{66}}{11} \Rightarrow d\left(M,(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{66}}{11}$$

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB = a; BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AI. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có : $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$, mà ΔSAC vuông tại $S \Rightarrow SI = \dfrac{AB}{2} = a$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Kẻ $HK \perp AB; AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (KHS)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (KHS)$ Mà $(SAB) \cap (KHS) = SK$.

Kẻ $HE \perp SK \Rightarrow HE \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SCD)) = HE$

$A = HC \cap (SAB) \Rightarrow \dfrac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))} = \dfrac{CA}{HA} = 4$

$\Rightarrow d(C,(SAB)) = 4d(H,(SAB)) = 4HE$

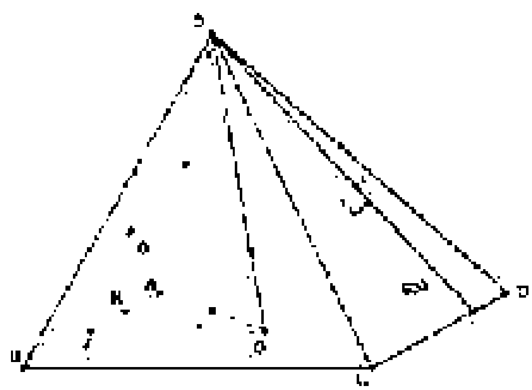
$$HE = \frac{HK.SH}{\sqrt{HK^2 + SH^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{16} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{15}}{10} \Rightarrow d(C,(SAB)) = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O, hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm của AO, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là 60°. Khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SCD) tính theo a bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn D.



Ta có: $\dfrac{HI}{AD} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HI = \dfrac{3a}{4}$

$\tan 60^0 = \dfrac{SH}{HI} \Rightarrow SH = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$

$SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2} = \dfrac{3}{2}a$

$d(G,(SCD)) = \dfrac{3}{2}d(J,(SCD)) = \dfrac{2}{3}d(K,(SCD))$

$$= \frac{2}{3}.\frac{4}{3}.d(H,(SCD)) = \frac{8}{9}d(H,(SCD)) = \frac{8}{9}HL = \frac{8}{9}.\frac{SH.HI}{SI} = \frac{8}{9}\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a.\frac{3a}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\tan\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) tính theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{3a}{13}$.

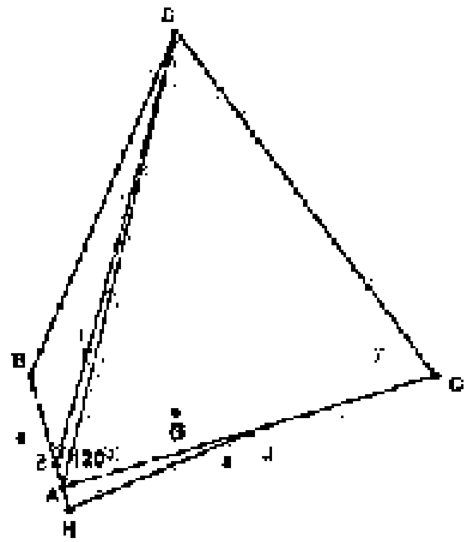
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi H là hình chiếu của J lên AB

Gọi G là hình chiếu của G lên AB

Gọi I là hình chiếu của G lên SZ



$$BJ = \sqrt{BA^2 + AJ^2 - 2BA.AJ.cos120^0} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$S_{\Delta BAJ=}\frac{1}{2}.AB.AJ.\sin 120^0 = \frac{1}{2}JH.AB \Leftrightarrow JH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

$$\frac{GZ}{JH} = \frac{BG}{BJ} = \frac{2}{3} \Rightarrow GZ = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\tan\alpha = \frac{SG}{GC} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{SG}{BG} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{SG}{\frac{2}{3}BJ}$$

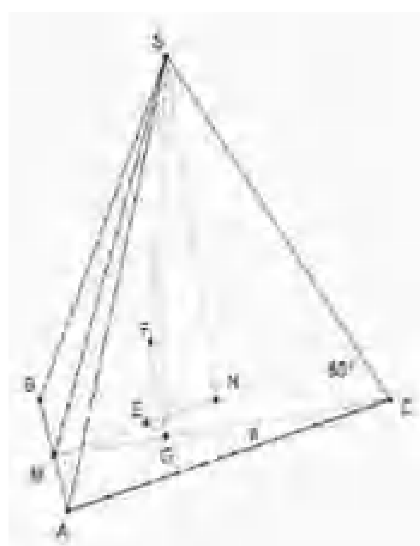
$$\Leftrightarrow SG = \frac{2}{\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{2}a = a$$

$$d\left(C,\left(SAB\right)\right) = 3d\left(G,\left(SAB\right)\right) = 3GI = 3.\frac{SG.GZ}{SZ} = 3\frac{SG.GZ}{\sqrt{SG^2 + GZ^2}} = 3.\frac{a.\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a$$

Câu 56. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(SMN\right)$ tính theo a bằng

A. $\dfrac{a}{7}$. **B.** $\dfrac{7a}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{7}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Trong ΔSGC vuông tại G $\Rightarrow SG = GC\sqrt{3} = \frac{2}{3}\frac{3a}{2} = a.$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của G trên MN và SE.

Khi đó $d\left(\text{C},\left(SMN\right)\right) = 3d\left(\text{G},\left(SMN\right)\right) = 3GF$

Ta có :
$$GE = \frac{1}{2}d\left(G,\text{AC}\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.d\left(M,\text{AC}\right)$$
$$= \frac{1}{3}d\left(M,\text{AC}\right) = \frac{1}{6}d\left(B,\text{AC}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$

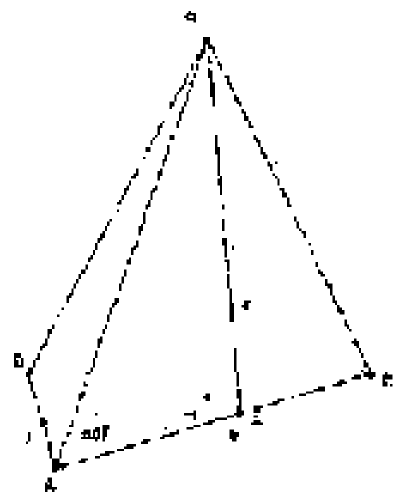
Trong ΔSGE vuông tại H suy ra

$$GF = \frac{GE.SG}{\sqrt{GE^2 + SG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 + a^2}} = \frac{a}{7}$$

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{2\sqrt{29}}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



Trong ΔACI có trung tuyến AH suy ra

$$AH=\sqrt{\frac{2\left(AI^2+AC^2\right)-CI^2}{4}}=\sqrt{\frac{7a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Trong ΔSHA vuông tại H suy ra $SH=AH\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$

Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của H trên BC và SE.

Khi đó $d\left(H,(SBC)\right)=HF$

Ta có : $HE=\dfrac{1}{2}d\left(I,BC\right)=\dfrac{1}{4}d\left(A,BC\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

Trong ΔSHE vuông tại H suy ra

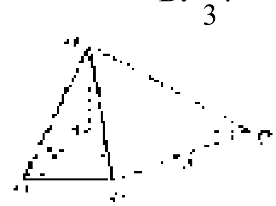
$$HF=\frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2+SH^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{a\sqrt{21}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{21}}{4}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}.$$

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông cạnh a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có: Vì $IJ\,//\,AD$ nên $IJ\,//\,(SAD)$

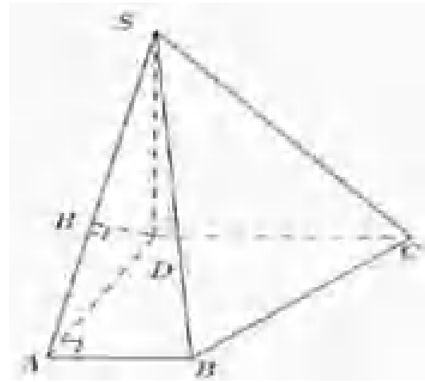
$\Rightarrow d\left(IJ;(SAD)\right)=d\left(\text{I};(SAD)\right)=IA=\dfrac{a}{2}$.

Câu 59. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD=2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Vì $DC // AB$ nên $DC // (SAB)$

$\Rightarrow d(DC;(SAB)) = d(D;(SAB))$.

Kẻ $DH \perp SA$, do $AB \perp AD$, $AB \perp SA$ nên $AB \perp (SAD) \Rightarrow DH \perp AB$ suy ra $d(D;SC) = DH$.

Trong tam giác vuông SAD ta có:

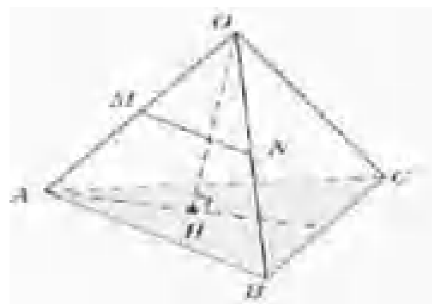
$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 60. Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Vì M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB nên $MN // AB$ $MN // (ABC)$.

Ta có:

$d(MN;(ABC)) = d(M;(ABC)) = \frac{1}{2}OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (vì M là trung điểm của OA).

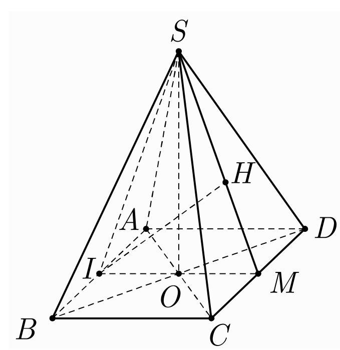
Câu 61. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = SA = 2a$. Khoảng cách từ đường thẳng AB đến (SCD) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:

Gọi I, M lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD thì $CD \perp (SIM)$

Vẽ $IH \perp SM$ tại $H \in SM$ thì $IH \perp (SCD)$



$\Rightarrow d(AB,(SCD)) = d(I,(SCD)) = IH = \frac{SO.IM}{SM}$

ΔSAB đều cạnh $2a \Rightarrow SI = a\sqrt{3} \Rightarrow SM = a\sqrt{3}$

Và $OM = \frac{1}{2}IM = a \Rightarrow SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = a\sqrt{2}$

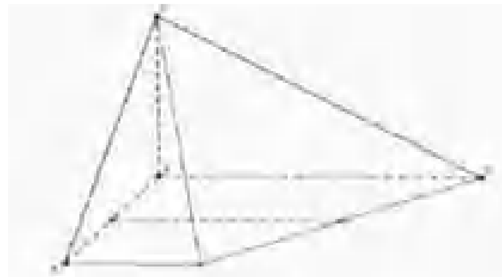
Cuối cùng $d(AB,(SCD)) = \frac{SO.IM}{SM} = \frac{a\sqrt{2}.2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Chọn đáp án B.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Tính khỏang cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Hướng dẫn giải:



$IJ//AD \Rightarrow IJ//(SAD)$

$\Rightarrow d\left(IJ,(SAD)\right) = d\left(I,(SAD)\right) = IA = \dfrac{a}{2}.$

Chọn đáp án B.

Câu 63. Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tính khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC):

$$d\left(MN,(ABC)\right) = d\left((MNP),(ABC)\right) = \frac{OH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 64. Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng

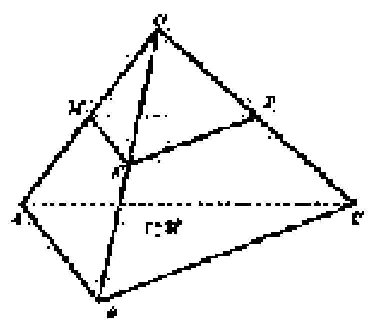
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Do $MN//(ABC) \Rightarrow d\left(MN,(ABC)\right) = d\left(M,(ABC)\right)$

Lại có $\dfrac{OA}{MA} = \dfrac{d\left(O,(ABC)\right)}{d\left(M,(ABC)\right)} = 2 \Rightarrow d\left(M,(ABC)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(O,(ABC)\right) = \dfrac{OH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Chọn D.



Chọn đáp án A.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, mặt đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

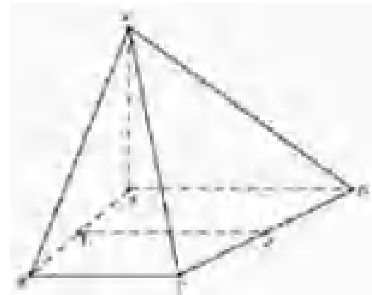
Hướng dẫn giải:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AI$.

Lại có $AI \perp AD$ (hình thang vuông) suy ra $IA \perp (SAD)$

$IJ \parallel AD$ theo tính chất hình thang, nên

$d(IJ,(SAD)) = d(I,(SAD)) = IA = \dfrac{a}{2}$



Câu 66. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa DC và (SAB).

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

*Trong tam giác DHA, dựng $DH \perp SA$;

*Vì $DC // AB \Rightarrow d(DC;(SAB)) = d(D;(SAB)) = DH$

Xét tam giác vuông SDA có :

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{12}}{3} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Chọn A.

Câu 67. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

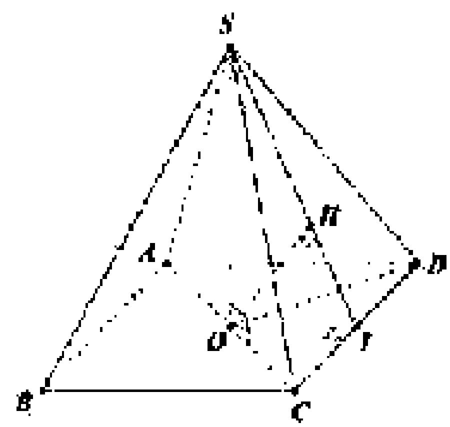
Kẻ $OI \perp CD, OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SCD)$

Ta tính được $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$OI = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow d(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn D.

Câu 68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó, khoảng cách giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ

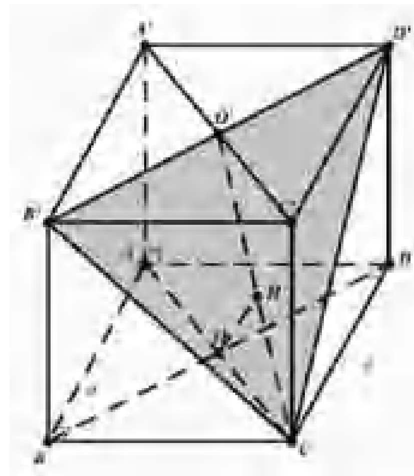
$A(0;0;0); B(1;0;0); D(0;1;0); A'(0;0;1)$

$C(1;1;0); B'(1;0;1); D'(0;1;1); C'(1;1;1)$

$\overrightarrow{CB'} = (0;-1;1); \overrightarrow{CD'} = (-1;0;1)$

Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$

Có VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CD'}\right] = (-1;-1;-1)$



$(CB'D'): 1(x-1)+1(y-1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y+z-2=0$

$d\left(BD;(CB'D')\right) = d\left(B;(CB'D')\right) = \dfrac{|1+0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Vậy $d\left(BD;(CB'D')\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 69. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

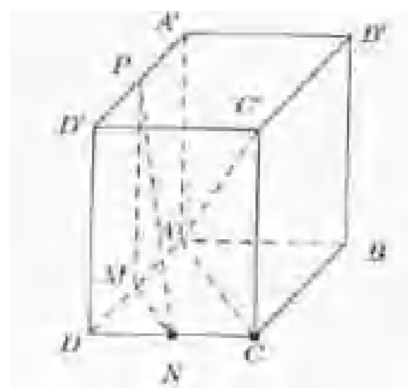
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn D.

Ta có: $(MNP)//(ACA')$

$\Rightarrow d\left((MNP);(ACA')\right) = d\left(\mathrm{P};(ACA')\right) = \dfrac{1}{2}OD' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

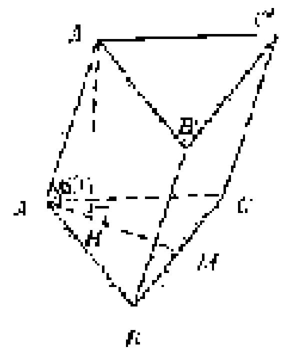


Câu 70. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng $60°$, đáy ABC là tam giác đều và A' cách đều A, B, C. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Vì $\triangle ABC$ đều và $AA' = A'B = A'C \Rightarrow A'ABC$ là hình chóp đều.

Gọi $A'H$ là chiều cao của lăng trụ, suy ra H là trọng tâm $\triangle ABC$,

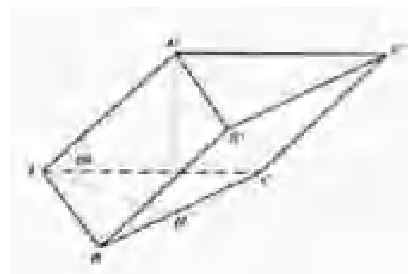
$\widehat{A'AH} = 60°$.

$A'H = AH.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\sqrt{3} = a$.

Câu 71. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh bên bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt đáy góc $60°$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ là trung điểm của B_1C_1. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng bao nhiêu?

A. $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $A'H \perp (ABC) \to \widehat{A'AH} = 60°$.

$d\big((A'B'C'),(ABC)\big) = A'H = A'A.\cos 60° = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

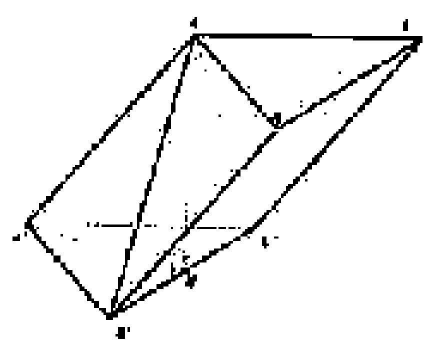
Chọn đáp án **A.**

Câu 72. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là:

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Do hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a suy ra



$AB' = AC' \Rightarrow B'H = HC' \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

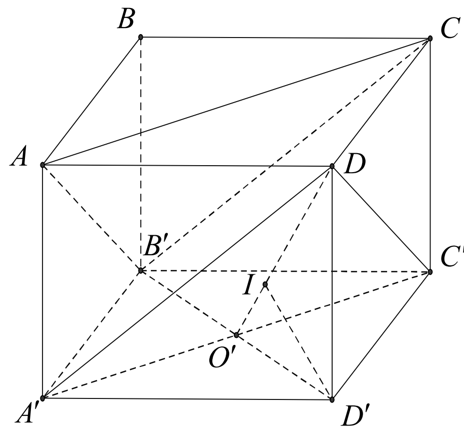
Chọn đáp án C.

Câu 73. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa $(AB'C)$ và $(A'DC')$ bằng :

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có



$d\left(\left(AB'C\right),\left(A'DC'\right)\right)=d\left(B',\left(A'DC'\right)\right)=d\left(D',\left(A'DC'\right)\right)$ Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi I là hình

Chiếu của D' trên $O'D$, suy ra I là hình chiếu của D' trên $\left(A'DC'\right)$.

$$d\left[\left(AB'C\right),\left(A'DC'\right)\right]=d\left[D',\left(A'DC'\right)\right]=$$

$$D'I=\frac{D'O'.D'D}{\sqrt{D'O'^2+D'D^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+a^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án D.

Câu 74. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

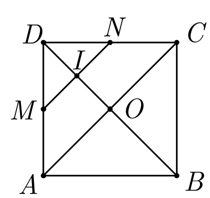
Nhận xét $(ACC')\equiv(ACC'A')$

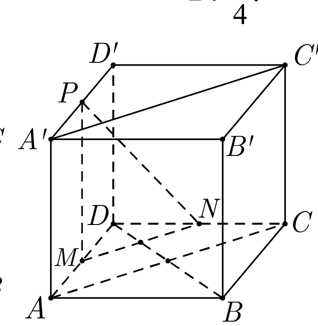
Gọi $O=AC\cap BD$, $I=MN\cap BD$

Khi đó, $OI\perp AC$, $OI\perp AA'\Rightarrow OI\perp(ACC'A')$

Suy ra $d\left((MNP),(ACC')\right)=OI=\frac{1}{4}AC=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Chọn đáp án B.





Câu 75. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ bằng

A. khoảng cách từ điểm D' đến đường thẳng $A'C'$.

B. khoảng cách giữa hai điểm B và D'.

C. khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'C'$.

D. khoảng cách giữa trọng tâm của hai tam giác ACD' và $BA'C'$

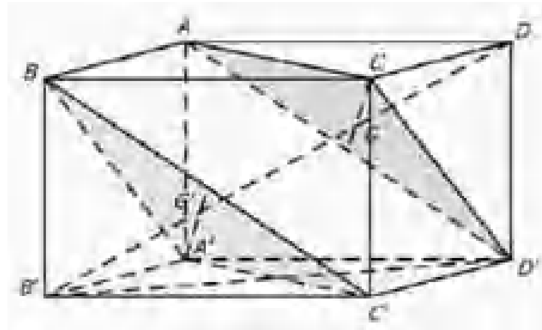
Hướng dẫn giải:

Ta có $(ACD')//(BA'C')$.

$DB' \perp (ACD')$

$DB' \perp (BA'C')$ **(**đã chứng minh trong SGK**)**

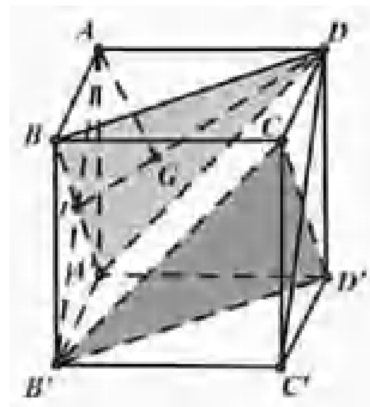
Đáp án D.



Câu 76. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng *a*. Khi đó, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và (BDA') bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Vì $(A'BD)//(B'CD')$ nên ta có:

$d\left(\left(A'BD\right),\left(B'CD'\right)\right)=d\left(C;\left(A'BD\right)\right)=d\left(A;\left(A'BD\right)\right)$.

Vì $AB=AD=AA'=a$ và $A'B=A'D=BD=a\sqrt{2}$ nên $A.A'BD$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi I là trung điểm $A'B$, G là trọng tâm tam giác $A'BD$.

Khi đó ta có: $d\left(A;\left(A'BD\right)\right)=AG$

Vì tam giác $A'BD$ đều nên $DI=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $DG=\dfrac{2}{3}DI=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông AGD có: $AG=\sqrt{AD^2-DG^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{6a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B**

Câu 77. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh *a*. Khoảng cách giữa (ACB') và $(DA'C')$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

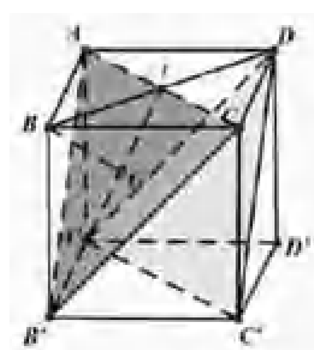
Hướng dẫn giải:

Vì $(ACB')//(DA'C')$ nên ta có: $d\left(\left(ACB'\right),\left(DA'C'\right)\right)=d\left(D;\left(ACB'\right)\right)=d\left(B;\left(ACB'\right)\right)$.

Vì $BA=BB'=BC=a$ và $AB'=AC=CB'=a\sqrt{2}$ nên $B.ACB'$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi I là trung điểm AC, G là trọng tâm tam giác ACB'.

Khi đó ta có: $d\left(B;\left(ACB'\right)\right)=BG$



Vì tam giác ACB' đều nên $B'I=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Theo tính chất trọng tâm ta có: $B'G=\dfrac{2}{3}B'I=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác vuông BGB' có:

$BG = \sqrt{BB'^2 - B'G^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C.**

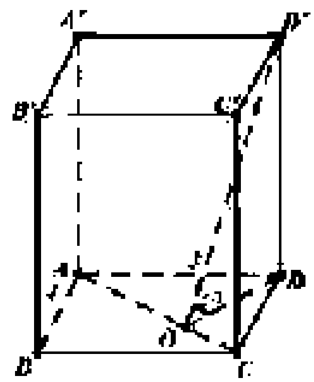
Câu 78. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4$, $AD = 3$. Mặt phẳng (ACD') tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình hộp.

A. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Gọi O là hình chiếu của D lên AC.



Ta có $\begin{cases} (ACD') \cap (ABCD) = AC \\ AC \perp DO \\ AC \perp D'O\left(AC \perp (ODD') \supset OD'\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(D'AC),(ABCD)}\right) = \widehat{D'OD} = 60^0$

$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $DO = \frac{AD.DC}{AC} = \frac{12}{5}$

Khoảng cách giữa hai mặt đáy là $DD' = DO.\tan 60^0 = \frac{12\sqrt{3}}{5}$

Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và O lên SD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

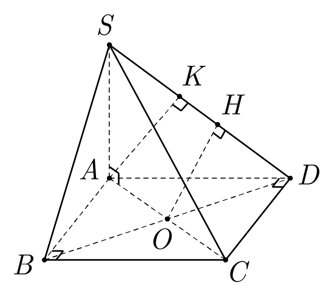
A. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là AK

B. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là CD

C. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là OH.

D. Các khẳng định trên đều sai.

Hướng dẫn giải:



Nếu $AK \perp AC$, do $AK \perp AB \Rightarrow AK \perp (ABC)$

$\Rightarrow AK \equiv SA$ (vì $SA \perp (ABC)$)

$\Rightarrow SA \perp SD \Rightarrow \Delta SAD$ có 2 góc vuông (vô lý).

Theo tính chất của hình vuông $CD \not\perp AC$.

Nếu $AC \perp OH$, do $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO \Rightarrow \Delta SOA$ có 2 góc vuông (vô lý)

Như vậy $AC \not\perp AK$, $AC \not\perp CD$, $AC \not\perp OH$. **Chọn đáp án D.**

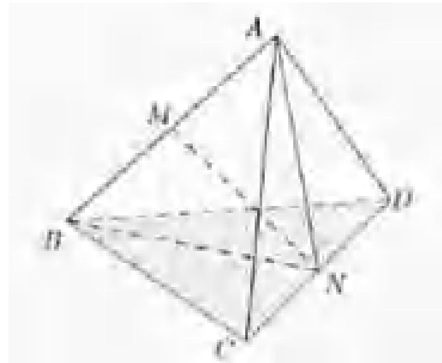
Câu 80. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AB và CD.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Khi đó $NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ANB cân, suy ra $NM \perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NM \perp DC$, nên $d\left(AB;CD\right) = MN$.

Ta có: $S_{ABN} = \sqrt{p\left(p-AB\right)\left(p-BN\right)\left(p-AN\right)}$ (p là nửa chu vi).

$= \sqrt{\frac{a+a\sqrt{3}}{2}.\frac{a+a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Mặt khác: $S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.MN = \frac{1}{2}a.MN \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Cách khác. Tính $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn D.**

Ta có: $BC // \left(SAD\right) \Rightarrow d\left(BC;SD\right) = d\left(BC;\left(SAD\right)\right) = d\left(B;\left(SAD\right)\right)$.

Mà $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(SAD\right) \Rightarrow d\left(B;\left(SAD\right)\right) = AB$.

Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = \sqrt{3}a$.

Câu 82. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a**.** Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn C.**

Ta có: $d\left(BB';AC\right) = d\left(BB';\left(ACC'A'\right)\right) = \frac{1}{2}DB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

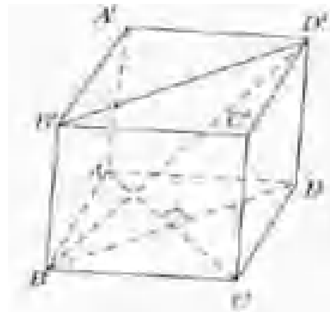
Câu 83. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvdt). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn B.

Ta có: $d\left(AA';BD'\right)=d\left(BB';\left(DBB'D'\right)\right)=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

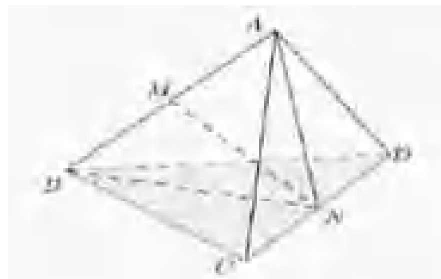


Câu 84. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai cạnh đối AB và CD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Khi đó $NA=NB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác ANB cân, suy ra $NM\perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NM\perp DC$, nên $d\left(AB;CD\right)=MN$.

Ta có: $S_{ABN}=\sqrt{p\left(p-AB\right)\left(p-BN\right)\left(p-AN\right)}=\sqrt{\dfrac{a+a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a+a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$

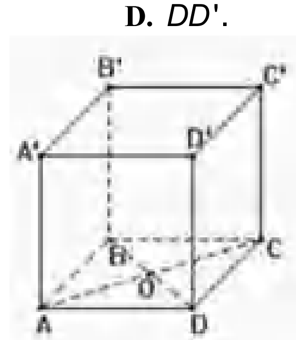
(p là nửa chu vi).

Mặt khác: $S_{ABN}=\dfrac{1}{2}AB.MN=\dfrac{1}{2}a.MN \Rightarrow MN=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 85. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AD và $A'C'$ là :

A. AA'. **B.** BB'. **C.** DA'. **D.** DD'.

Hướng dẫn giải:



$\begin{cases} AA'\perp\left(A'B'C'D'\right) \\ A'C'\subset\left(A'B'C'D'\right) \end{cases}\rightarrow AA'\perp A'C'$

$\begin{cases} AA'\perp\left(ABCD\right) \\ AD\subset\left(ABCD\right. \end{cases}\rightarrow AA'\perp AD$

Chọn đáp án **A.**

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $d\left(CD,SB\right)=d\left(CD,\left(SAB\right)\right)=AD=a$. **Chọn phương án A.**

Câu 87. Cho tứ diện $OABC$ trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách giữa AI và OC bằng bao nhiêu?

A. a **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Hướng dẫn giải:

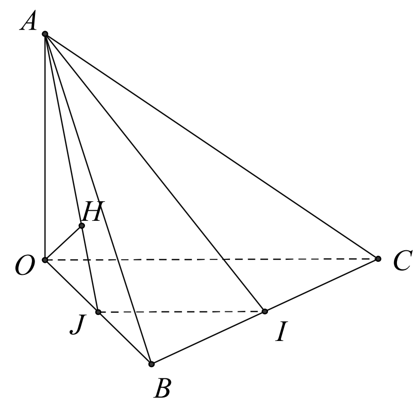
Gọi J là trung điểm OB. Kẻ OH vuông góc AJ tại H.

Tam giác AOJ vuông tại O, có OH là đường cao

$$OH = \frac{OA.OJ}{\sqrt{OA^2 + OJ^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ta có: $OC // IJ$ nên $OC // \left(AIJ\right)$

Do đó:



$d\left(AI, OC\right) = d\left(OC, \left(AIJ\right)\right) = d\left(O, \left(AIJ\right)\right) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa SB và CD.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

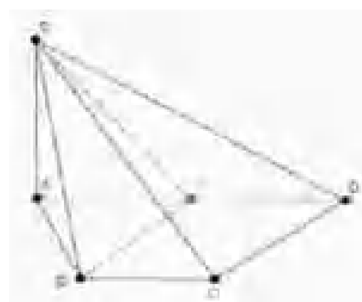
Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm AD ta có: $\mathrm{d(CD;SB) = d(D;(SBH)) = d(A;(SBH))}$

Mà

$$\frac{1}{\mathrm{d^2(A;(SBH))}} = \frac{1}{\mathrm{AS^2}} + \frac{1}{\mathrm{AB^2}} + \frac{1}{\mathrm{AH^2}} = \frac{3}{\mathrm{a^2}} \rightarrow \mathrm{d(CD;SB)} = \frac{\mathrm{a}\sqrt{3}}{3}$$

Chọn đáp án C



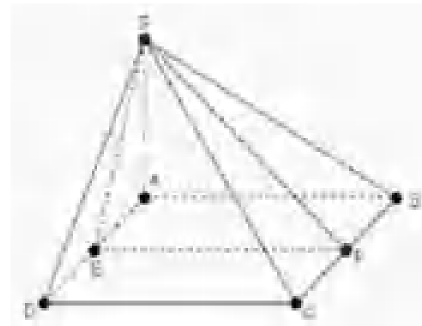
Câu 89. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AD = a$. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn đáp án B**

Gọi E, F lần lượt là trung điểm AD, BC. Ta có: AD, BC $\perp$ (SFE), suy ra SF là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SEF)

Nên

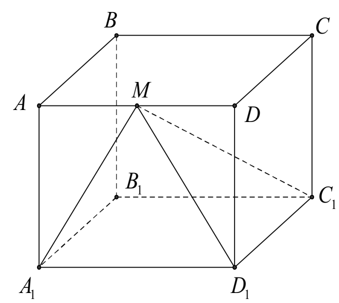


$$d(AD;SB) = d(E;SF) = \frac{SE.FE}{\sqrt{SE^2+FE^2}} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

Câu 90. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AA_1 = 2a, AD = 4a$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B_1 và C_1M bằng bao nhiêu?

A. $3a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Ta có $A_1B_1 // C_1D_1$ suy ra

$d\left(A_1B_1, C_1M\right) = d\left(A_1B_1, \left(C_1D_1M\right)\right) = d\left(A_1, \left(C_1D_1M\right)\right)$

Vì $AA_1 = 2a,\ AD = 4a$ và M là trung điểm AD nên $A_1M \perp D_1M$, suy ra $A_1M \perp \left(C_1D_1M\right)$

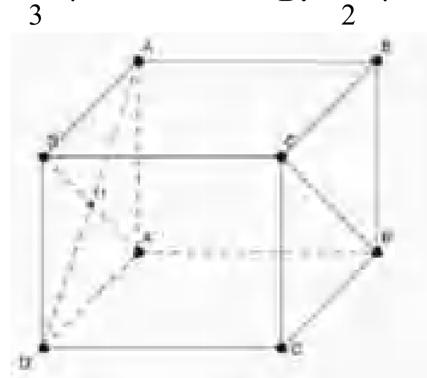
$\Rightarrow d\left(A_1, \left(C_1D_1M\right)\right) = A_1M = 2a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B.

Câu 91. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và $A'B'$ bằng bao nhiêu ?

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn B.**



Ta có $\begin{cases} A'B' \perp A'A \\ A'B' \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp \left(ADD'A'\right)$.

Gọi H là giao điểm của AD' với $A'D$.

$\Rightarrow A'H \perp AD'$

$\begin{cases} A'H \perp AD' \\ A'H \perp A'B' \end{cases} \Rightarrow d\left(A'B'; AD'\right) = A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 92. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

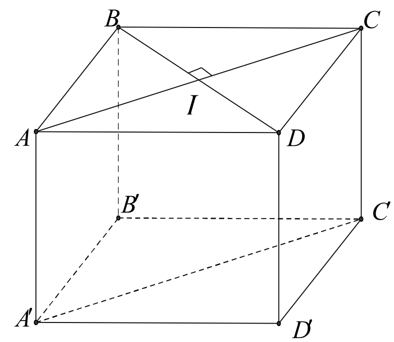
Hướng dẫn giải:

Vì $\begin{cases}(AA'C'C)\supset AC\\(AA'C'C)//BB'\end{cases}$ nên $d(BB';AC)=d\big(BB';(AA'C'C)\big)$.

Gọi $I=AC\cap BD$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BI\perp(AA'C'C)$.

Suy ra $d(BB';AC)=d\big(BB';(AA'C'C)\big)=IB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

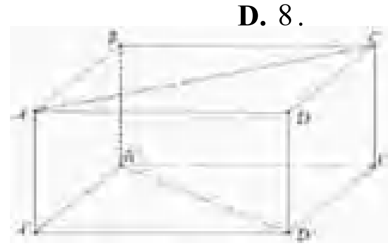
Chọn đáp án **C.**



Câu 93. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3, AD=4, AA'=5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 5. **D.** 8.

Hướng dẫn giải:



Ta có $\begin{cases}(ABCD)//(A'B'C'D')\\AC\subset(ABCD);B'D'\subset(A'B'C'D')\end{cases}$

$\Rightarrow d(AC;B'D')=d\big((ABCD);(A'B'C'D')\big)=AA'=5$

Chọn đáp án C.

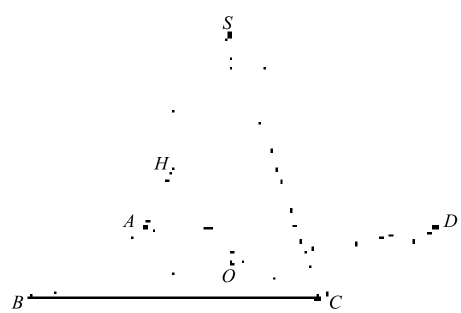
Câu 94. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BD.

A. $\dfrac{ah}{\sqrt{3a^2+h^2}}$. **B.** $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. **C.** $\dfrac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. **D.** $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+2h^2}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $O=AC\cap BD$. Gọi H là hình chiếu của O lên SA. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp OH$. Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD, SA.

$$OH=\frac{OS.OA}{\sqrt{OS^2+OA^2}}=\frac{a\sqrt{2}.h}{2\sqrt{\dfrac{2h^2+a^2}{2}}}=\frac{ah}{\sqrt{2h^2+a^2}}.$$



Chọn đáp án D.

Câu 95. Cho hai tam giác đều ABC và ABD cạnh x nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

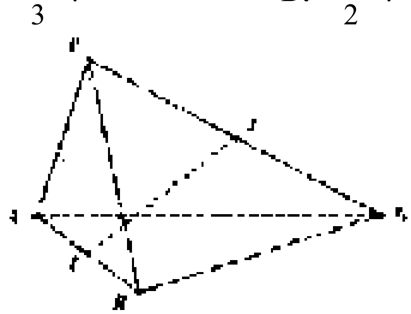
A. $\dfrac{x\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{x\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn đáp án A.**

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$(ABC)\perp(ABD)$ và hai tam giác ABC và ABD đều nên $AB\perp(CDI)$ và $CI=DI$ suy ra IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB, CD.

Vì tam giác CDI vuông tại I và J là trung điểm của CD



Nên $IJ = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{2CI^2}}{2} = \frac{\sqrt{2.\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{2} = \frac{x\sqrt{6}}{4}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa SB và CD.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Ta có $d\left(SB;CD\right) = d\left(CD;\left(SAB\right)\right) = d\left(D;\left(SAB\right)\right) = DA = a$. **Chọn đáp án B.**

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa SA và BD theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

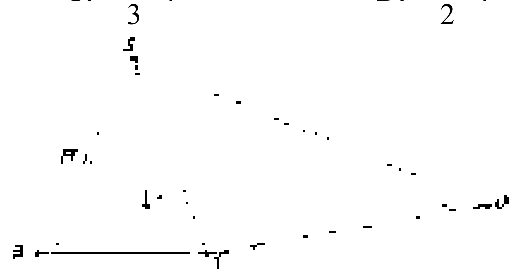
Vì $SA \perp \left(ABCD\right)$ tại A và $BD \subset \left(ABCD\right)$ nên

$d\left(SA;BD\right) = d\left(A;BD\right) = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{5a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 98. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa AD và SB.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Vì $AD \perp \left(SAB\right)$ tại A và $SB \subset \left(SAB\right)$ nên

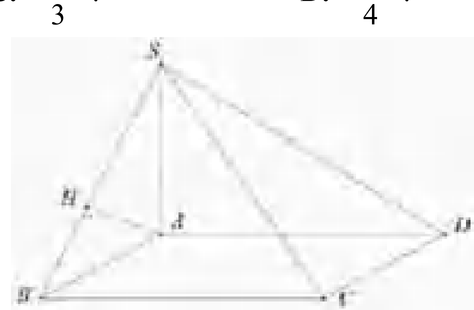
$d\left(AD;SB\right) = d\left(A;SB\right) = \frac{AS.AB}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D.

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa AD và SB là

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp \left(ABCD\right)$.

Vì $AD \perp \left(SAB\right)$ tại A và $SB \subset \left(SAB\right)$ nên

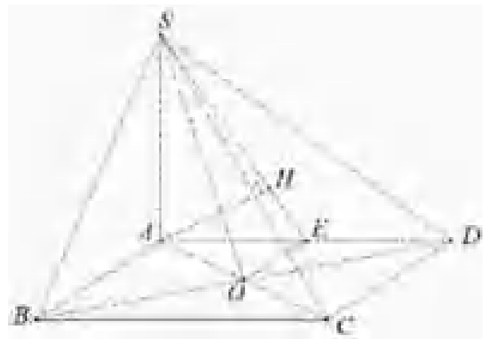
$d\left(AD;SB\right) = d\left(A;SB\right) = AH = \frac{AS.AB}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án C.

Câu 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa SO và AB là

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi E là trung điểm của AD khi đó $d(SO;AB) = d(AB;(SOE)) = AH$, với H là hình chiếu của A lên SE.

Ta có $AH = \dfrac{EA.ES}{\sqrt{EA^2 + ES^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B.

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. độ dài của đoạn thẳng OA. **B.** độ dài của đoạn thẳng BC.

C. khoảng cách từ điểm O đến cạnh SC. **D.** khoảng cách từ điểm S đến đoạn BD.

Hướng dẫn giải:

Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SA \perp (ABCD)$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$ tại O, mà $SC \subset (SAC)$ nên khoảng cách giữa BD và SC bằng khoảng cách từ điểm O đến cạnh SC. **Chọn đáp án C.**

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy $BA \perp (SAD)$

$BC // AD \Rightarrow BC // (SAD) \Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = BA$

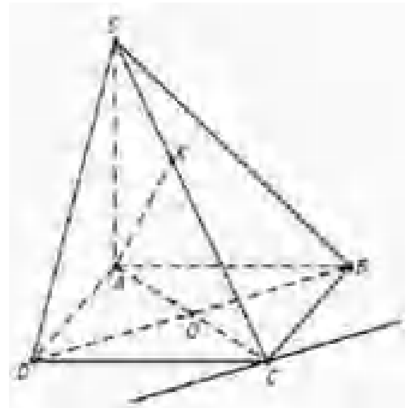
Xét tam giác vuông ABC có $AB = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$ **Đáp án D**

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải:

Dựng $Cx // BD, (\alpha) = (SC, Cx)$



$\Rightarrow BD // (\alpha) \Rightarrow d(BD, SC) = d(BD, (\alpha))$

$d(BD, (\alpha)) = d(O, (\alpha)) = \frac{1}{2} d(A, (\alpha))$

Dựng $AK \perp SC$. Dễ thấy $AK \perp (\alpha) \Rightarrow d(A, (\alpha)) = AK$

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d(O, (\alpha)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ **Đáp án A.**

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SB và CD bằng

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải:

Dễ thấy $AD \perp (SAD)$

$CD // AB \Rightarrow CD // (SAB) \Rightarrow d(SB, DC) = d(CD, (SAB)) = AD = a$ Xét tam giác vuông ABC có $AB = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$ **Đáp án A**

Câu 105. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính khoảng cách giữa AB và CC_1.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3b^2}}$. **D.** $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+2b^2}}$.

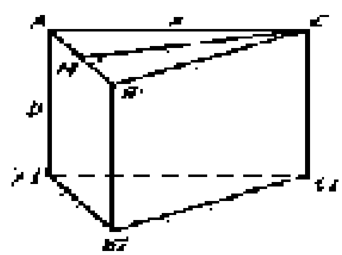
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của AB

$CC_1 / AA_1 \Rightarrow CC_1 / (ABB_1A_1) \Rightarrow d(AB, CC_1)$

$= d(CC_1, (ABB_1A_1)) = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

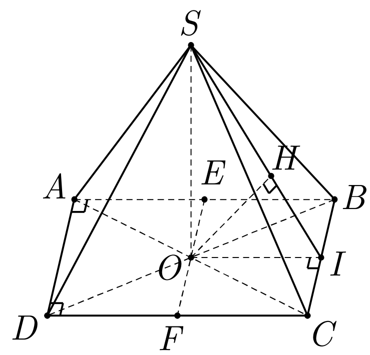
Đáp án B.



Câu 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; K là điểm bất kỳ trên AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm cạnh đáy BC.

Do $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$

Từ đó ta chứng minh được $BC \perp (SOI)$

$\Rightarrow OH \perp (SBC)$ (với $OH \perp BC$ tại SI)

Do $\begin{cases} EF // (SBC) \\ SK \subset (SBC) \end{cases}$ nên $d\left(EF, SK\right) = d\left(EF, (SBC)\right) = OH$

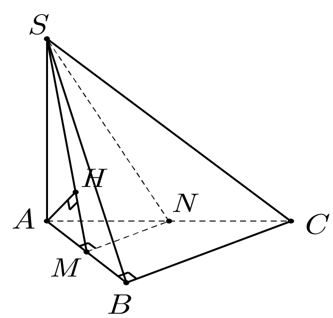
Thực hiện tính toán để được $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Cuối cùng $d\left(EF, SK\right) = OH = \dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 107. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa SM và BC bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:



Gọi N là trung điểm của cạnh đáy AC. Khi đó $BC // (SMN)$

Nên $d\left(SM, BC\right) = d\left(B, (SMN)\right) = d\left(A, (SMN)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đoạn SM.

Ta có thể chứng minh được $MN \perp (SAM)$, từ đó

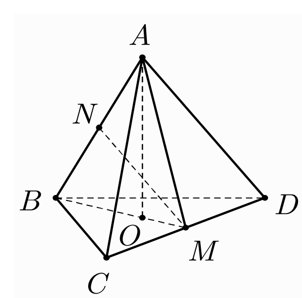
$AH \perp (SMN) \Rightarrow d\left(A, (SMN)\right) = AH = \dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Chọn đáp án A.

Câu 108. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** a **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB

Tam giác MAB cân tại M và ΔNCD cân tại N

do đó $MN \perp AB$, $MN \perp CD$

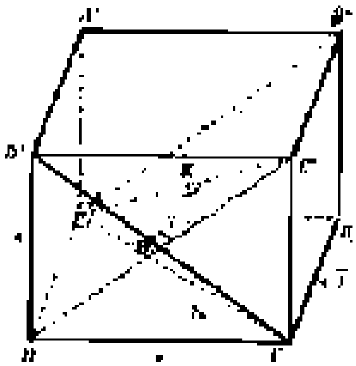
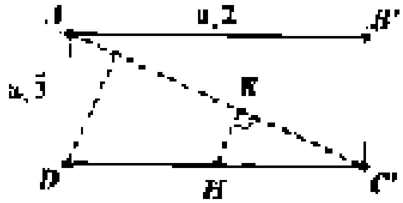
$\Rightarrow d\left(AB, CD\right) = MN = \sqrt{BM^2 - NB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án B.

Câu 109. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Tính khoảng cách giữa AC' và CD':

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải:

☑ Ta có hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(DCC'D')$ là $DC' \perp D'C$ nên $AC' \perp D'C \Rightarrow (ADC'B') \perp D'C$ tại điểm H là trung điểm CD'. Từ H ta kẻ $HK \perp AC' \Rightarrow d(AC', D'C) = HK$.

☑ Ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{5a^2}{6a^4} \Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{6}{5}}a = \dfrac{\sqrt{30}}{5}a \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{30}}{10}a$. **Chọn đáp án D.**

Câu 110. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvd). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

$AA'//BB' \Rightarrow AA'//(DBB'D')$

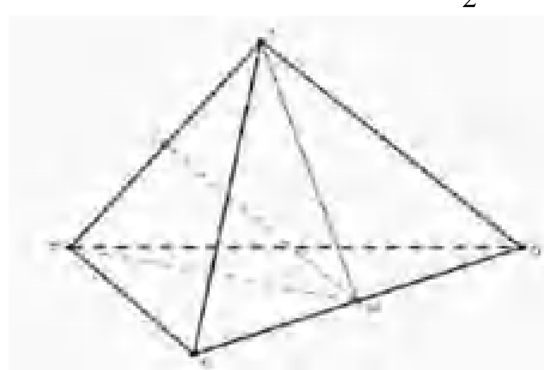
Ta có :

$$\Rightarrow d(AA') = d\left(A, (DBB'D')\right) = AO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 111. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



☐ Gọi M là trung điểm DC, H là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

☐ Ta có: $\begin{cases} BM \perp CD \\ AM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (\mathrm{ABM})$

☐ $\begin{cases} CD \perp MH \\ AB \perp MH \end{cases} \Rightarrow MH = d(\mathrm{AB}, \mathrm{CD})$

☐ $MH = \dfrac{2S_{ABM}}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **Chọn đáp án D.**

Câu 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$, $BC = a\sqrt{2}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

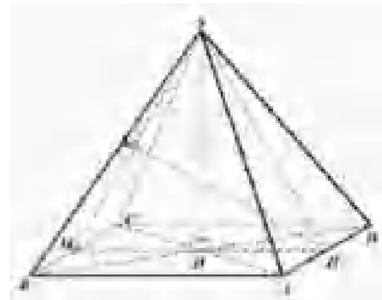
Hướng dẫn giải:

Khoảng cách giữa SD và BC: $d(BC, SD) = CD = a\sqrt{3}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là:

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:



☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là: HK.

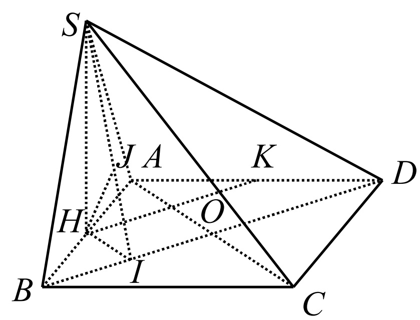
☑ $SH = SM = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}; SO = \sqrt{\dfrac{7a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

☑ Có : $HK = \dfrac{SO.MH}{SM} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{6}}{2}.a}{a\dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a.

A. $\dfrac{3a}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{5}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn đáp án C.**



Ta có: $HK // BD \Rightarrow HK // (SBD)$

$\Rightarrow d(HK, SD) = d(HK, (SBD)) = d(H, (SBD))$

Kẻ $HI \perp BD$, $HJ \perp SI$

Khi đó: $BD \perp HI$, $BD \perp SH \Rightarrow BD \perp (SHI) \Rightarrow BD \perp HJ$

Nên $HJ \perp (SBD) \Rightarrow d(H, (SBD)) = HJ$

Ta có: $HI = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và

$HD^2 = HA^2 + AD^2 = \dfrac{5}{4}a^2 \Rightarrow SH^2 = SD^2 - HD^2 = 3a^2$

Do đó: $HJ^2 = \dfrac{SH^2.HI^2}{SH^2 + HI^2} = \dfrac{3}{7}a^2 \Rightarrow HJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d(SD, HK) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 115. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = b$ và có cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. b. **B.** $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. **C.** $b\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Kẻ $Ax//BC \Rightarrow BC//(AB'x)$

$\Rightarrow d(BC, AB') = d(BC,(AB'x)) = d(B,(AB'x))$

Kẻ $BD \perp Ax, BK \perp DB'$

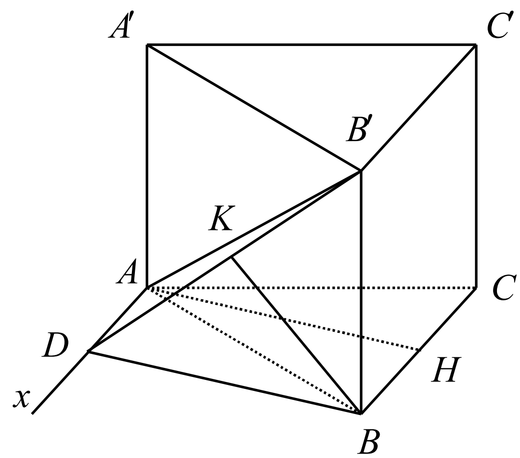
Ta có: $AD \perp BD, AD \perp BB' \Rightarrow AD \perp (BDB')$

$\Rightarrow AD \perp BK$.

Do đó: $BK \perp (ADB') \Rightarrow d(B,(ADB')) = BK$

Khi đó: $BD = AH = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$

Nên $BK^2 = \dfrac{BD^2.BB'^2}{BD^2 + BB'^2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$



Chọn đáp án D.

Câu 116. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, CD theo a bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

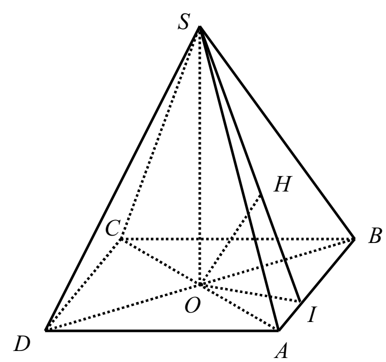
Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $OI \perp AB$, $OH \perp SI$

Ta có: $(SAC) \perp (ABCD), (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Ta lại có: $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow \widehat{SAO} = 30^0$

Khi đó: $CD//AB \Rightarrow CD//(SAB)$



$\Rightarrow d(CD, SA) = d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB)) = 2d(O,(SAB))$

Ta có: $AB \perp SO, AB \perp OI \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

Nên $OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OH$

Mà $OC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}a$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{OCD} = 60^0 \Rightarrow OI = OC.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

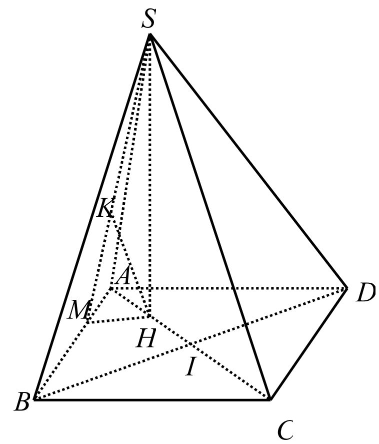
Do đó: $OH = OI.\sin 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow d(CD, SA) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **Chọn đáp án B.**

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, $AB = 2a; BD = \sqrt{3}AC$, mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh A, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AI. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{35}}{7}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{35}}{7}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{35}}{35}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn đáp án B.**

Ta có: $CD//AB \Rightarrow CD//(SAB)$



$\Rightarrow d(CD,SB) = d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB)) = 4d(H,(SAB))$

Kẻ $MH \perp AB, HK \perp SM$

Ta có: $AB \perp HM, AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow HK \perp AB$

Khi đó: $HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HK$

Ta có: $\tan\widehat{BAC} = \dfrac{BI}{IA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$\Rightarrow AC = 2a \Rightarrow AH = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{1}{2}a$

Mà $HM = AI.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ và $SH^2 = SA^2 - AH^2 = \dfrac{15a^2}{4}$

Do đó: $HK^2 = \dfrac{HM^2.SH^2}{HM^2 + SH^2} = \dfrac{5a^2}{28} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{35}}{14} \Rightarrow d(CD,SB) = 4HK = \dfrac{2a\sqrt{35}}{7}$

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a là:

A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{42}}{8}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{42}}{4}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn đáp án A**

Kẻ $Ax//BC$, $HI \perp Ax$, $HK \perp SI$.

Ta có: $BC//Ax \Rightarrow BC//(SAx)$

$\Rightarrow d(BC,SA) = d(BC,(SAx)) = d(B,(SAx)) = \dfrac{3}{2}d(H,(SAx))$

Ta lại có: $AI \perp HI,\ AI \perp SH \Rightarrow AI \perp (SHI) \Rightarrow AI \perp HK$

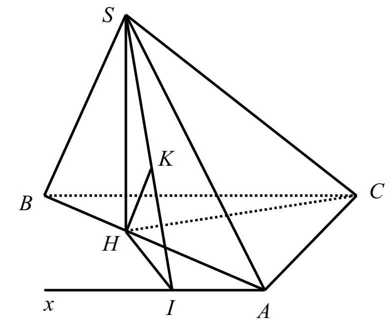
Nên $HK \perp (SAI) \Rightarrow d(H,(SAI)) = HK$

Gọi M là trung điểm của AB

Khi đó:

$$BH = \frac{1}{3}a,\ AH = \frac{2}{3}a,\ AM = \frac{1}{2}a, HM = \frac{1}{6}a, CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

và $HC = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$



Mà $SH \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của SC lên (ABC) nên $\widehat{SCH} = 60^0$

Suy ra $SH = HC.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

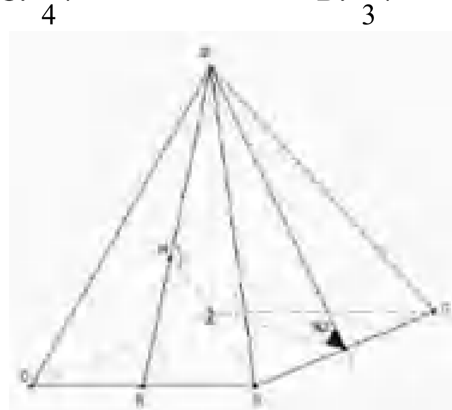
Do $\widehat{ABC} = \widehat{HAI} = 60^0$ nên $HI = AH.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Khi đó: $HK^2 = \dfrac{HI^2.SH^2}{HI^2 + SH^2} = \dfrac{7}{24}a^2 \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d(BC,SA) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$

Câu 119. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi I là trung điểm cạnh BC. Biết góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{4a}{3}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Đáp án B.**



Hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI nên góc giữa SI và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SIA}$ (vì tam giác SIA vuông tại A nên $\widehat{SIA}$ nhọn). Suy ra $\widehat{SIA} = 60^0$.

Xét tam giác SIA vuông tại A, $\widehat{SIA} = 60^0,\ AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

nên $SA = \dfrac{3a}{2}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, tam giác ABC đều nên tam giác ABD đều.

Có $AC // BD, AC \not\subset (SBD) \Rightarrow AC // (SBD)$ mà $(SBD) \supset SB \Rightarrow d(AC,SB) = d(A,(SBD))$.

Gọi K là trung điểm đoạn BD, tam giác ABD đều suy ra $AK \perp BD$ và $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ mà

$BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAK)$. Dựng $AH \perp SK, H \in SK$ lại có $AH \perp BD$ suy ra $AH \perp (SBD)$

Vậy $d(A,(SBD)) = AH$.

Xét tam giác SAK vuông tại vuông tại A, đường cao AH ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} \quad \Rightarrow d(AC,SB) = d(A,(SBD)) = \frac{3a}{4}.$$

Câu 120. Cho hình chóp $S.ABC$ tam giác ABC vuông tại B, $BC = a$, $AC = 2a$, tam giác SAB đều. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là:

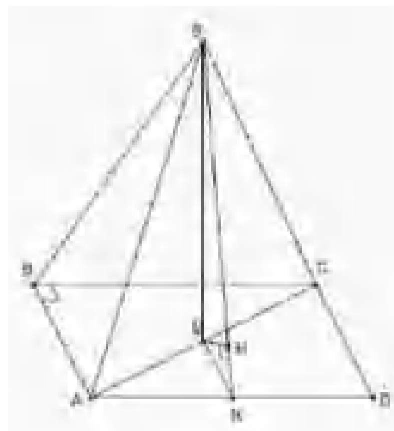
A. $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

Hướng dẫn giải:

Tam giác ABC vuông tại $B, BC = a, AC = 2a$ suy ra $AB = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAM vuông tại $M, SA = a\sqrt{3}, AM = a \Rightarrow SM = a\sqrt{2}$.

Dựng hình bình hành $ABCD$, gọi N là trung điểm của AD. Do $\widehat{ABC} = 90^0$ suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật suy ra $MN \perp AD$. Lại có $SM \perp AD$ nên $AD \perp (SMN)$.



Dựng $MH \perp SD, H \in SN$.

Theo trên có $AD \perp (SMN) \Rightarrow MH \perp AD \Rightarrow MH \perp (SAD)$.

Vậy $d(M,(SAD)) = MH$.

Ta có $BC // AD, BC \not\subset (SAD) \Rightarrow BC // (SAD)$

Mà $SA \subset (SAD)$ $\begin{aligned} &\Rightarrow d(SA,BC) = d(BC,(SAD)) \\ &= d(C,(SAD)) = 2d(H,(SAD)) = 2MH. \end{aligned}$.

Xét tam giác SMN vuông tại M, đường cao $MH, SM = a\sqrt{2}, MN = \dfrac{a}{2}$ có

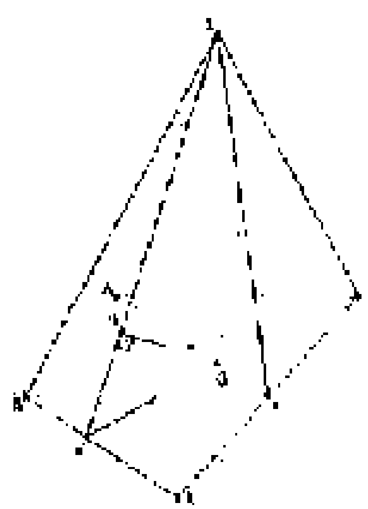
$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MS^2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{66}}{11} \Rightarrow d(SA,BC) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$$

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = 2a$; $BC = a\sqrt{2}$; $BD = a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm G của tam giác BCD, biết $SG = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a là:

A. a. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a\sqrt{2}, BD = a\sqrt{6}$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.



Dựng hình bình hành $ACEB$. Ta có $AC // BE, AC \not\subset (SBE) \Rightarrow AC // (SBE)$ mà $(SBE) \supset SB$ vậy $d(SB,AC) = d(AC,(SBE)) = d(G,(SBE))$.

Dựng $GK \perp BE, K \in BE$ lại có $SG \perp BE$ nên $BE \perp (SGK)$.

Dựng $GH \perp SK, H \in SK$ lại có $GH \perp BE$ nên $GH \perp (SBE) \Rightarrow d(G,(SBE)) = GH$.

Ta có $GK = d\left(B, AC\right)$. Tam giác ABC vuông tại B suy ra $\dfrac{1}{d^2\left(B, AC\right)} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2}$ vậy $GK = d\left(B, AC\right) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác SGK vuông tại G, đường cao $GH, SG = 2a, GK = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ có

$\dfrac{1}{GH^2} = \dfrac{1}{GK^2} + \dfrac{1}{GS^2} \Rightarrow GH = a \Rightarrow d\left(SB, AC\right) = a$. **Đáp án A.**

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 4a$; $BC = 3a$, gọi I là trung điểm của AB, hai mặt phẳng $\left(SIC\right)$ và $\left(SIB\right)$ cùng vuông góc với $\left(ABC\right)$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a là:

A. $\dfrac{12a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

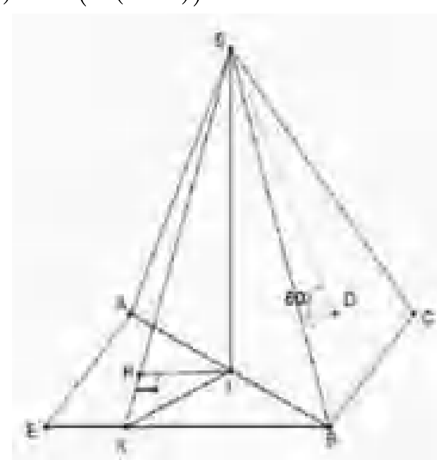
Ta có $\left(SIC\right), \left(SIB\right)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ nên $SI \perp \left(ABC\right)$.

Dựng hình bình hành $ACBE$. Ta có $AC // BE, AC \not\subset \left(SBE\right) \Rightarrow AC // \left(SBE\right)$ mà $\left(SBE\right) \supset SB$

vậy $\begin{aligned} & d\left(SB, AC\right) = d\left(AC, \left(SBE\right)\right) = d\left(A, \left(SBE\right)\right) \\ & = 2d\left(I, \left(SBE\right)\right) \end{aligned}$.

Dựng $IK \perp BE, K \in BE$ lại có $SI \perp BE$ nên $BE \perp \left(SGK\right)$.

Dựng $IH \perp SK, H \in SK$ lại có $IH \perp BE$ nên $IH \perp \left(SBE\right) \Rightarrow d\left(I, \left(SBE\right)\right) = IH$.



Kéo dài IK cắt AC tại D mà $SI \perp AC \Rightarrow \left(SID\right) \perp AC$.

Lại có $\left(SAC\right) \cap \left(ABC\right) = AC$.

$\left(SAD\right) \cap \left(ABC\right) = AD$

$\left(SAD\right) \cap \left(ASC\right) = SD$

Góc giữa $\left(SAC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng $\widehat{SDI}$ suy ra $\widehat{SDI} = 60^0$.

Ta có $ID = IK = \dfrac{1}{2} d\left(B, AC\right)$

Mà tam giác ABC vuông tại B suy ra

$\dfrac{1}{d^2\left(B, AC\right)} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2}$ vậy

$ID = IK = d\left(B, AC\right) = \dfrac{12a}{5}$.

Xét tam giác SID vuông tại I, $ID = \dfrac{12a}{5}, \widehat{SDI} = 60^0$ suy ra $SI = \dfrac{12a\sqrt{3}}{5}$.

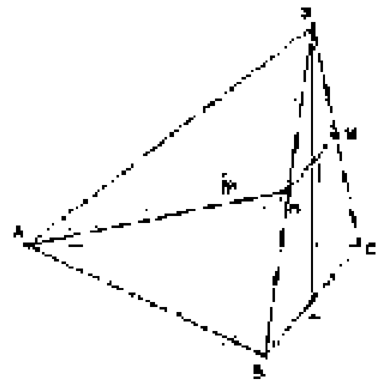
Xét tam giác SIK vuông tại I, đường cao IH có

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IK^2}+\frac{1}{IS^2}\Rightarrow IH=\frac{6a\sqrt{3}}{5}\Rightarrow d\left(SB,AC\right)=\frac{12a\sqrt{3}}{5}.$$ **Đáp án A.**

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A. Gọi H, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC, SH vuông góc với $\left(ABC\right)$, $SA=2a$ và tạo với mặt đáy góc 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{21}$.

Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là HA.



Vậy góc giữa SA và $\left(ABC\right)$ là $\widehat{SAH}$. Ta có $\widehat{SAH}=60^0$ suy ra $AH=a, SH=a\sqrt{3}$.

Gọi N, I lần lượt là trung điểm của SB, SI.

Ta có mặt phẳng $\left(AMN\right)$ song song với BC và chứa AM.

Vậy $d\left(AM,BC\right)=d\left(BC,\left(SAM\right)\right)=d\left(H,\left(SAM\right)\right)$.

Dựng $HK\perp AI, K\in AI$.

Ta có $BC\perp SH, BC\perp MH\Rightarrow BC\perp\left(SMH\right)$.

$\Rightarrow BC\perp HK$ mà $MN//BC\Rightarrow HK\perp MN$

Do $HK\perp AI$ (cách dựng). Suy ra

$HK\perp\left(AMN\right)\Rightarrow d\left(H,\left(AMN\right)\right)=HK$.

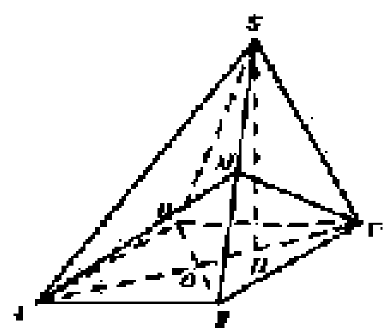
Xét tam giác IAH vuông tại H, đường cao HK

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HI^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{21}}{7},\ d\left(H,\left(AMN\right)\right)=HK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$ **Đáp án C.**

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ một góc 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a là:

A. $\frac{2a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{11}}{11}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn A.**



Gọi M là trung điểm của SB.

Mặt phẳng $\left(ACM\right)$ chứa AC và song song SD.

Do đó $d(SD,AC)=d(SD,(ACM))=d(D,(ACM))$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó

$$A\left(0;0;0\right),B\left(a;0;0\right),D\left(0;2\sqrt{2}a;0\right),S\left(\frac{2a}{3};\frac{4\sqrt{2}a}{3};2a\right),C\left(a;2\sqrt{2}a;0\right)$$

$M\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right)$. $\overrightarrow{AC}=\left(a;2\sqrt{2}a;0\right), \overrightarrow{AM}=\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AM}=\left(2\sqrt{2}a^2;-a^2;-\sqrt{2}a^2\right)$

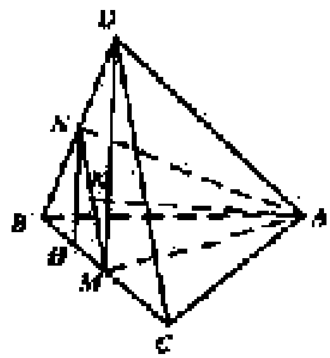
Mặt phẳng (ACM) đi qua điểm A và có vtpt $\vec{n}=\left(2\sqrt{2};-1;-\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình là $2\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}z=0\Rightarrow d(D;(ACM))=\dfrac{\left|-2\sqrt{2}a\right|}{\sqrt{8+1+2}}=\dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 125. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC$, tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Ngoài ra DBC là tam giác vuông. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CD, với M là trung điểm của BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{7}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi N là trung điểm BD. Ta chứng minh được $CD//(AMN)$.

Do đó $d(CD,AM)=d(CD,(AMN))=d(C,(AMN))$.

Xét tứ diện $ACMN$. Thể tích tứ diện này là :

$V_{ACMN}=\frac{1}{3}d(C,(AMN)).S_{\Delta AMN}=\frac{1}{3}d(N,(ACM)).S_{\Delta ACM}$

Suy ra $d(C,(AMN))=\dfrac{d(N,(ACM)).S_{\Delta ACM}}{S_{\Delta AMN}}$ (*)

Gọi H là trung điểm BM. Khi đó, $NH//DM$ suy ra $NH\perp(ACM)$ nên

$NH=d(N,(ACM))=\frac{1}{2}DM=\frac{1}{2}a.$ (1) $S_{\Delta ACM}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. (2)

Áp dụng công thức trung tuyến $AN^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AD^2-\frac{1}{2}DB^2\right)=a^2\Rightarrow AN=a.$

Ta có $AM=\frac{1}{2}BC=a$ nên ΔAMN cân tại A. Gọi K là trung điểm MN thì $AK\perp MN$.

$MN=\frac{CD}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trong tam giác vuông ΔAKM, ta có $AK=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Suy ra $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}AK.MN=\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. (3)

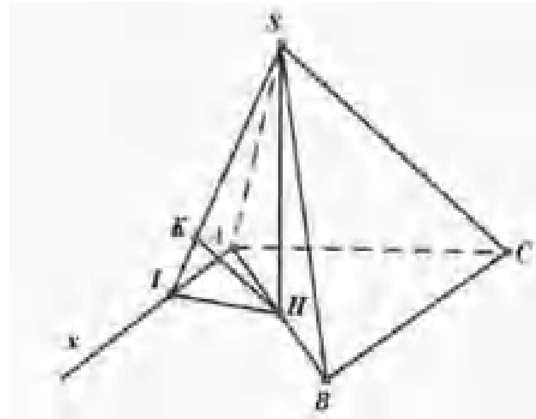
Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $d(C,(AMN))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d(CD,AM)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 126. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu của S mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Ta có: Từ A Kẻ Ax song song với BC.Từ H kẻ $HI \perp Ax$.Từ H Kẻ $KH \perp SI$ với SI thì:



$d\left(SA,BC\right)=d\left(B,\left(SAx\right)\right)=2d\left(H,\left(SAx\right)\right)=2HK$ $IH=AH.\sin 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ và

$SH=AH.\tan 60^0=\dfrac{a}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{IH^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{15}}{10}$

$d\left(SA,BC\right)=2d\left(H,\left(SAx\right)\right)=2HK=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

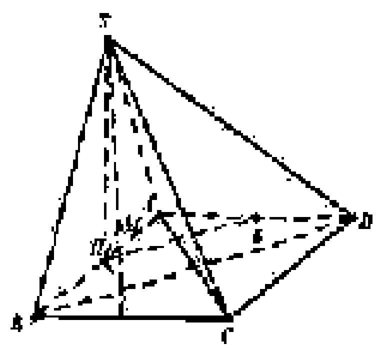
Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**

Ta có: SD cắt $\left(ABCD\right)$ tại D. Từ H kẻ $HI \perp BD$, $HM \perp SI$ .Ta thấy HK song song BD: $d\left(HK,SD\right)=d\left(H,\left(SBD\right)\right)=HM$

ΔSHD:



$SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{\dfrac{9a^2}{4}-\left(AD^2+AH^2\right)}=\sqrt{\dfrac{9a^2}{4}-\left(a^2+\dfrac{a^2}{4}\right)}=a$ $IH=\dfrac{AC}{4}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$,

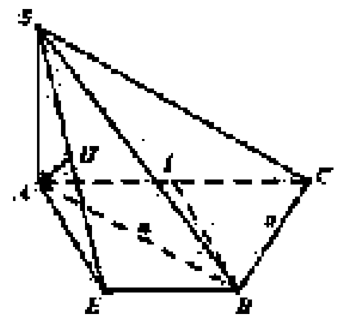
$\dfrac{1}{HM^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{IH^2}\Rightarrow HM=\dfrac{a}{3}$

$d\left(SA,BC\right)=d\left(H,\left(SBD\right)\right)=HM=\dfrac{a}{3}$

Câu 128. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $2a.\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. **B.** $2a.\dfrac{\sqrt{78}}{13}$. **C.** $a.\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. **D.** $a.\dfrac{\sqrt{78}}{13}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**



Gọi I là trung điểm của AC. Qua B kẻ đường thẳng d song song với AC, trong mặt phẳng (ABC) kẻ AE vuông góc với d tại E. Khi đó $AE \perp BE$ và $AE \perp AC$.

Ta có:

$AC // BE \Rightarrow AC // (SBE) \Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (SBE))$.

Gọi AH là đường cao của (SAE), ta có

$\begin{cases} BE \perp SA \\ BE \perp AE \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AH$

Mặt khác $AH \perp SE$ nên $AH \perp (SBE)$. Do đó $d(AC, SB) = d(A, (SBE)) = AH$

Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC) là AC suy ra gó giữa SC và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SCA} = 60^\circ$

Xét ΔSAE vuông tại A có: AH là đường cao, $SA = \tan 60^\circ . AC = \sqrt{3}.a\sqrt{2} = a\sqrt{6}$,

$AE = BI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{6a^2} = \dfrac{13}{6a^2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{6a^2}{13} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{78}}{13}$

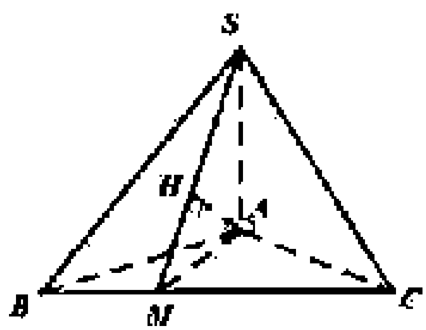
Vậy $d(AC, SB) = \dfrac{a\sqrt{78}}{13}$.

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), $SA = a\sqrt{6}$, $AB = AC = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC.

A. $\dfrac{2a\sqrt{42}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Dựa vào định lý Côsin trong tam giác ta có:



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$BC^2 = 3a^2 + 3a^2 - 2.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.\cos 120^\circ$

$BC^2 = 9a^2 \Rightarrow BC = 3a$

$CM = \dfrac{2}{3}BC = 2a$.

$AM^2 = CM^2 + CA^2 - 2CM.CA.\cos\widehat{MCA}$

$AM^2 = 4a^2 + 3a^2 - 2.2a.a\sqrt{3}.\cos 30^\circ$

$AM^2 = a^2 \Rightarrow AM = a$

Xét tam giác ACM có $CM^2 = AM^2 + AC^2 = 4a^2$ nên tam giác ACM vuông tại A suy ra $AC \perp AM$ mà $AC \perp SA$ nên $AC \perp (SAM)$

Gọi H là hình chiếu của A trên SM, ta có $\begin{cases} AH \perp AC \\ AH \perp SM \end{cases} \Rightarrow d\left(AC, SM\right) = AH$

Xét tam giác SAM có $SA = a\sqrt{6}$, $AM = a$, AH là đường cao nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{6a^2} = \dfrac{7}{6a^2}$ $\quad AH^2 = \dfrac{6a^2}{7} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$ $\quad d\left(AC, SM\right) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

Câu 130. Trong không gian cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với đáy, tam giác SAB vuông cân tại S. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $3a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $2a\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Chọn A.

Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Kẻ $BM // AC \Rightarrow AC // (SBM)$

$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBM)) = d(A, (SBM)) = 2d(H, (SBM))$.

Kẻ $HK \perp BM$, ta có: $SH \perp BM \in (ABC) \Rightarrow BM \perp (SHK)$.

Kẻ $HQ \perp SK$, ta có: $BM \perp HQ \in (SHK) \Rightarrow HQ \perp (SBM) \Rightarrow d(H, (SBM)) = HQ$.

Xét tam giác vuông SHK ta có: $\dfrac{1}{HQ^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2}$.

Trong đó: $SH = AH = \dfrac{a}{2}$ (do tam giác SAB vuông cân tại S), $HK = HB.\sin 60^\circ = \dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

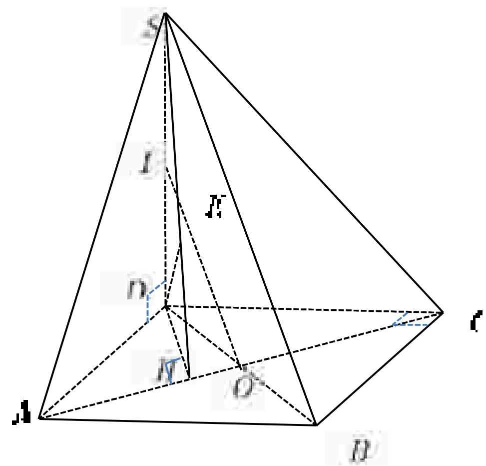
$\Rightarrow \dfrac{1}{HQ^2} = \dfrac{16}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{28}{3a^2} \Rightarrow HQ = \dfrac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow d(AC, SB) = 2HQ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 131. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, SD vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, $AD = a$, góc $\widehat{AOB} = 120^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{4}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn B.**

Vì: $\left.\begin{matrix} BC \perp DC \\ BC \perp SD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SDC) \Rightarrow \widehat{SCD} = 45^\circ$



$\Rightarrow SD = DC = \dfrac{AD}{\tan 60^\circ} = a\sqrt{3}.$

Kẻ

$OI//SB(I \in SD) \Rightarrow ID=SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SB//(IAC) \Rightarrow$

$d(AC,SB) = d(SB,(IAC)) = d(B,(IAC))$
$= d(D,(IAC)).$

Kẻ IH $\perp AC \Rightarrow AC \perp (IDH) \Rightarrow DH \perp AC.$

Kẻ DK $\perp IH,$

Ta có: $DK \perp AC(AC \perp (DIH)) \Rightarrow DK \perp (IAC) \Rightarrow d(D,(IAC))=DK.$

Xét tam giác vuông DHA: ta có $DH = a.\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác DHI vuông cân tại

$DK = DH.\sin 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

Câu 132. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $BC = a\sqrt{3}$, $AB = a$; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và đường thẳng SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{15}a}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn D.**

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $(SAC)\cap(SBD) = SO, (SAC)\perp(ABCD), (SBD)\perp(ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

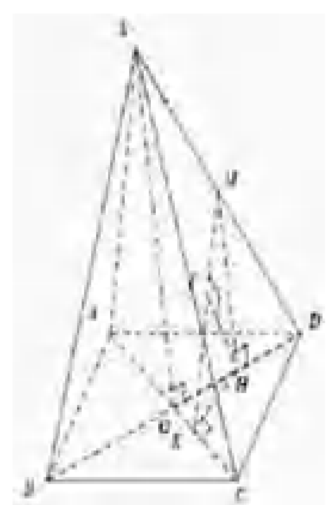
OC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng

$(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCO} = 60^0$

Gọi M là trung điểm của SD $\Rightarrow OM \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (ACM)$

Trong mặt phẳng (SBD) kẻ $MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

Khi đó



$d(SB,AC) = d(SB,(ACM)) = d(B,(ACM)) = 2d(H,(ACM)) = 2HI$

Ta có $HK = \dfrac{1}{2}d(D,AC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Có $OC = \dfrac{AC}{2} = a \Rightarrow SO = OC.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

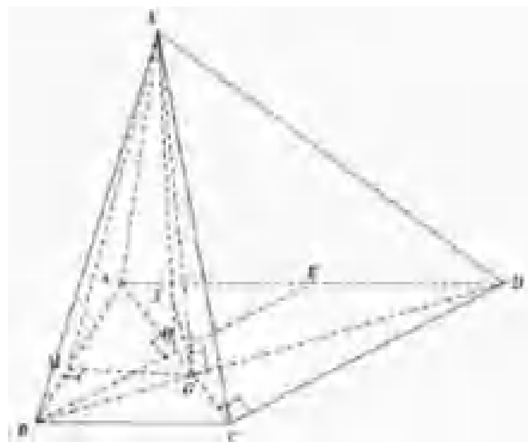
$\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{20}{3a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

Vậy $d\left(SB, AC\right) = 2HI = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 133. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Các mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$ cùng vuông góc với mặt đáy $\left(ABCD\right)$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{array}{l}\left(SAC\right) \cap \left(SBD\right) = SO, \left(SAC\right) \perp \left(ABCD\right), \\ \left(SBD\right) \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SO \perp \left(ABCD\right)\end{array}$.

Gọi E là trung điểm của AD, $H = AC \cap BE$

$\Rightarrow BE \parallel CD \Rightarrow CD \parallel \left(SBE\right)$

$\Rightarrow d\left(CD, SB\right) = d\left(C, \left(SBE\right)\right)$.

$= 3d\left(O, \left(SBE\right)\right) = 3OI$

Kẻ $\begin{array}{l}OM \perp AB, SO \perp AB \Rightarrow SM \perp AB \\ \Rightarrow \left(\left(SAB\right), \left(ABCD\right)\right) = \widehat{SMO} = 60^0\end{array}$

Tính $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{6}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$, $OM = \dfrac{1}{3}AD = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow SO = OM.\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

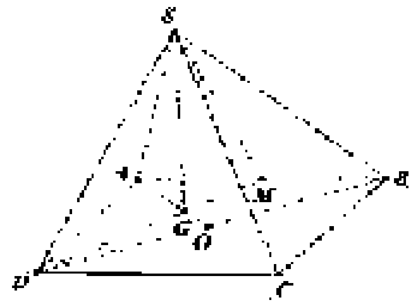
$\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{75}{4a^2} \Rightarrow OI = \dfrac{2a}{5\sqrt{3}} \Rightarrow d\left(CD, SB\right) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 134. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy $ABCD$ một góc 60°. Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$, mặt phẳng $\left(SDM\right)$ và mặt phẳng $\left(SAC\right)$ cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a là:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có $(SMD)\cap(SAC)=SG$ suy ra $SG\perp(ABCD)$

Kẻ $GH\perp AB$, $GK\perp SH$

Khi đó,

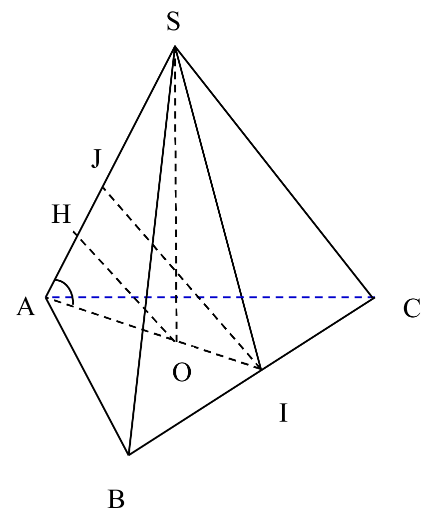
$d(DC,SM)=d(DC,(SAB))=d(D,(SAB))$

$=\dfrac{GD}{GM}.d(G,(SAB))=3GK=\dfrac{3a\sqrt{15}}{4}$

Câu 135. Một hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$ và tạo với mặt đáy một góc 45°. Tính khoảng cách giữa SA và BC.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn A.**



+ Vì $SABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO\perp(ABC)$

(Với O là trọng tâm của ΔABC).

+ Xét ΔSOA Vuông tại O có:

- $\widehat{SAO}=45^0$ mà

$SA=2\sqrt{2}$ nên $OA=SO=2.\Rightarrow AI=3.$

- Với H là chân đường cao hạ từ O

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{SO^2}\Rightarrow OH=\sqrt{2}.$

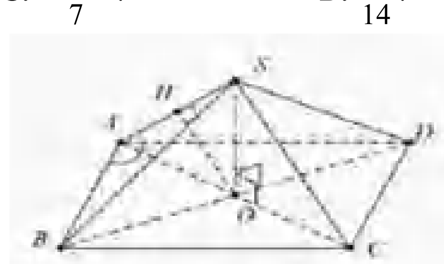
+ Trong ΔSIA Gọi J là chân đường cao hạ từ I xuống SA. Lại có $BC\perp(SAI)$ nên $BC\perp IJ$. Từ đó IJ là đường vuông góc chung của SA & BC.

+ Xét trong ΔAIJ : $\dfrac{OH}{IJ}=\dfrac{OA}{AI}\Rightarrow IJ=\dfrac{OH.AI}{OA}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

Câu 136. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$ và $SO=\dfrac{3a}{4}$. Biết $SA=SC$ và $SB=SD$. Hỏi khoảng cách giữa SA và BD bằng bao nhiêu ?

A. $\dfrac{3a}{7}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\dfrac{3a}{14}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $\left.\begin{matrix}SO\perp AC\\SO\perp DB\end{matrix}\right\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)\ \Rightarrow DB\perp SO$

Ta có: $\left.\begin{matrix}DB\perp SO\\BD\perp AC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

Trong mp (SAC), kẻ $OH\perp SA\ (H\in SA)$, ta có: $OH\perp SA, OH\perp BD$

Do đó: $d(SA,DB)=OH$. Ta có: $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$

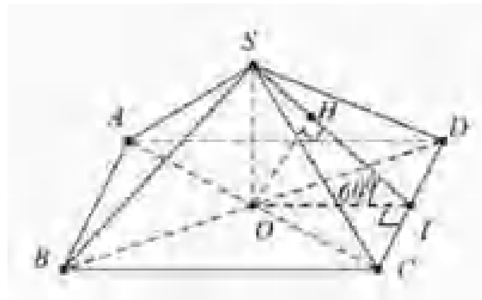
Tam giác SOA vuông tại O, có OH là đường cao, ta có:

$OH = \dfrac{SO.OA}{SA} = \dfrac{3a}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{4}{a\sqrt{21}} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. Vậy $d(SA,DB) = OH = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **Chọn B.**

Câu 137. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đường cao $SO = 2,$ mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Gọi I là trung điểm của CD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(SCD)\cap(ABCD) = CD\\ (SOI)\perp CD\\ (SOI)\cap(ABCD) = OI,(SOI)\cap(SCD) = SI\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{(OI,SI)} = 60^0$

Ta có: $AB//CD \Rightarrow AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SD) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD))$

Trong mp (SOI), kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI)$, ta có: $OH \perp (SCD)$ và $OI = \dfrac{SO}{\tan 60^0} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $d(O,(SCD)) = OH$. Ta có: $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{2^2 + \dfrac{4}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Tam giác SOI vuông tại O, có đường cao OH nên $OH = \dfrac{SO.OI}{SI} = 2.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 1$

Do đó: $d(AB,SD) = 2d(O,(SCD)) = 2OH = 2.1 = 2$. **Chọn B.**

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a; AD = 2a.$ Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB.$ Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD theo a là

A. $\dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H nên $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $HM \perp CD (M \in CD)$, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(ABCD)\cap(SCD) = CD\\ (SHM)\perp CD\\ (SHM)\cap(ABCD) = HM\\ (SHM)\cap(SCD) = SM\end{array}\right\}\Rightarrow \left(\widehat{(ABCD),(SCD)}\right) = \widehat{SMH} = 60^0$$

Ta có: $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC)$ và $d(AD,SC) = d(A,(SBC)) = 3d(H,(SBC))$

Kẻ $HI \perp SB$ $(I \in SB)$, ta có: $HI \perp (SBC)$ và $d(H,(SBC)) = HI$

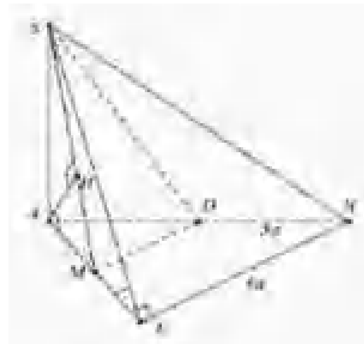
Ta có: $SH = HM.\tan 60^0 = 2a.\sqrt{3}$ và $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{13}$

Suy ra: $IH = \dfrac{SH.HB}{SB} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. Vậy $d(AD,SC) = 3HI = \dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$. **Chọn A.**

Câu 139. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB = 5a$; $BC = 4a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy (ABC) bằng 60°. Gọi D là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC là:

A. $\dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Gọi M là trung điểm AC, ta có: $BC//(SMD)$

$\Rightarrow d(BC,SD) = d(C,(SMD)) = d(A,(SMD))$

Kẻ $AH \perp SM$ $(H \in SM)$, ta có: $AH \perp (SMD)$

$\Rightarrow d(A,(SMD)) = AH = \dfrac{SA.AM}{SM} = \dfrac{3a\sqrt{39}}{13}$

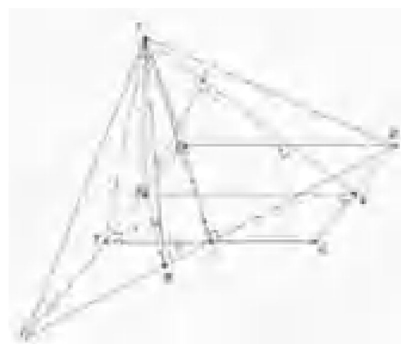
Với $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{2}$.

Chọn A.

Câu 140. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, tam giác SAB cân tại đỉnh S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60°. Khoảng cách AB và SD là:

A. $\dfrac{a\sqrt{177}}{59}$. **B.** $\dfrac{6a\sqrt{177}}{59}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{177}}{59}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{177}}{59}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Vẽ hình chữ nhật $ABED$, có tam giác ACD vuông cân tại C.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB, ED, ta có: $SH \perp (ABCD)$.

Gọi F là đối xứng của A qua B, kẻ $HM \perp DF$ $(M \in DF)$

Suy ra: $(SHM) \perp DF$ và $\widehat{(SCD),(ABCD)} = \widehat{SMH} = 60^0$

Ta có: $HM // AC \Rightarrow HM = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

Ta có: $AB // ED \Rightarrow AB // (SED)$ và $d(AB,SD) = d(H,(SED))$

Kẻ $HI \perp SK$, ta có: $HI \perp (SED)$ và $d(H,(SED)) = HI$

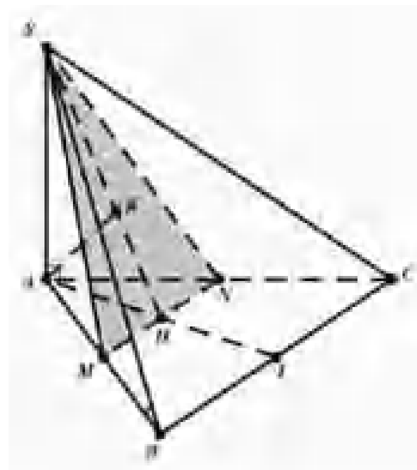
Ta có: $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \dfrac{a\sqrt{59}}{2\sqrt{2}}$. Suy ra: $HI = \dfrac{SI.IK}{SK} = \dfrac{6a\sqrt{3}}{\sqrt{59}} = \dfrac{6a\sqrt{177}}{59}$.

Chọn B.

Câu 141. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$, M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC là:

A. $\dfrac{4a\sqrt{51}}{51}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{51}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{51}}{51}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{51}}{17}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u>



Gọi N, I lần lượt là trung điểm của AC, BC.

MN là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow MN \parallel BC$

$\Rightarrow BC \parallel (SMN)$

Ta có: $d(BC;SM) = d(BC;(SMN)) = d(I;(SMN))$

$= d(A;(SMN))$.

Dễ thấy

$BC \perp (SAI) \Rightarrow MN \perp (SAI) \Rightarrow (SMN) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SH.

Trong mặt phẳng (SAI) kẻ $AK \perp SH$ $\Rightarrow AK \perp (SMN)$

Vậy $d(BC;SM) = d(A;(SMN)) = AK$

Ta có: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

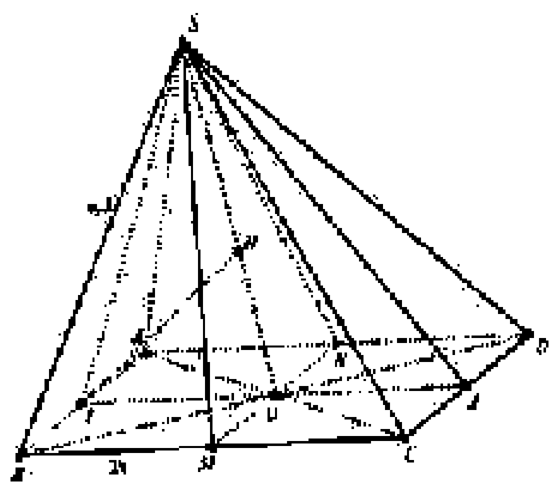
Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SB;(ABC)) = (SB;AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$ $\Rightarrow SA = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{17}{3a^2}$ $\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{51}}{17}$.

Câu 142. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều, SI vuông góc với (SCD) và I là trung điểm AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SO và AB là:

A. $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $MN // AB$



$\Rightarrow d(SO, AB) = d(AB,(SMN)) = d(I,(SMN))$ Ta có

$AB \perp SI \Rightarrow MN \perp SI, AB \perp OI \Rightarrow MN \perp OI$

$\Rightarrow MN \perp (SOI) \Rightarrow (SMN) \perp (SOI)$.Kẻ $IH \perp SO \Rightarrow IH \perp (SMN)$

$\Rightarrow IH = d(I;(SMN))$

Gọi J là trung điểm của CD

Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp SJ$ $\Rightarrow SO = \dfrac{JI}{2} = a$

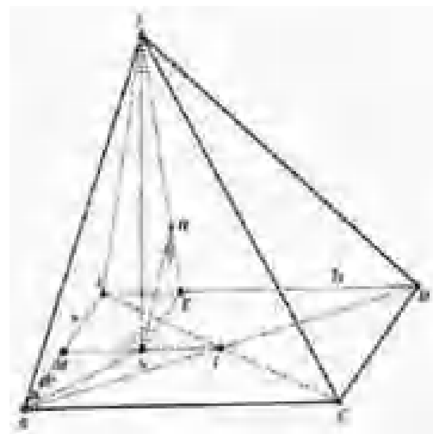
+ Do ΔSIO cân tại O. kẻ $OE \perp SI \Rightarrow OE = \sqrt{OI^2 - IE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$

+ $S_{\Delta OSI} = \frac{1}{2}OE.SI = \frac{1}{2}\frac{a}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta OSI}}{SO} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 143. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là trung điểm đoạn MI. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với điểm N. Biết góc tạo bởi đường thẳng SB với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SD theo a là:

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải:



Do $MN // AD \Rightarrow MN // (SAD) \Rightarrow d(MN, SD) = d(MN,(SAD)) = d(N,(SAD))$

Kẻ $NE \perp AD, SN \perp AD \Rightarrow AD \perp (SNE) \Rightarrow (SAD) \perp (SNE)$

Kẻ $NH \perp SE \Rightarrow NH \perp (SAD) \Rightarrow d(N,(SAD)) = d(MN,(SAD)) = NH$

Ta có : $\widehat{SB;(ABCD)} = \widehat{SBN} = 45^0$

Xét $\Delta BMN \Rightarrow$

$BN = \sqrt{BM^2 + NM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do $NH = \frac{NE.NS}{\sqrt{NE^2 + NS^2}} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 144. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có : $\widehat{SC,(ABCD)} = \widehat{SCA} = 45^0$

Gọi E, K lần lượt là giao điểm của AC với BD, NM

Kẻ $MN // BD \Rightarrow BD // (SMN) \Rightarrow d(SM, BD) = d(BD,(SMN)) = d(E,(SMN))$

Do $MN // BD \Rightarrow K$ trung điểm $AE \Rightarrow d(E;(SMN)) = d(A,(SMN))$

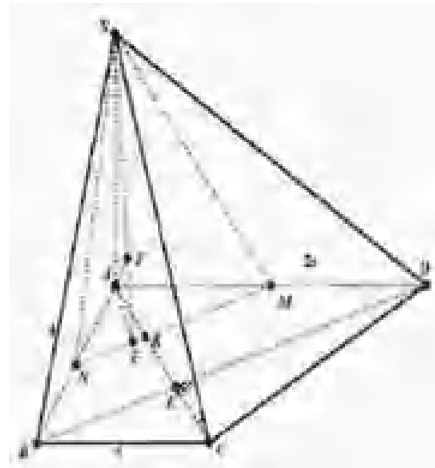
Kẻ $AE \perp MN, SA \perp MN \Rightarrow MN \perp (SAE) \Rightarrow (SAE) \perp (SMN)$

Kẻ $AF \perp SE \Rightarrow FA \perp (SMN) \Rightarrow d\left(A,(SMN)\right) = FA$

Xét $\Delta ABC \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

$$AE = \frac{AN.AM}{\sqrt{AN^2 + AM^2}} = \frac{\frac{a}{2}.a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$FA = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{55}}{5}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}$$



Câu 145. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, $SG \perp (ABCD)$ và $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm CD. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng AB và SM theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn A.**

Gọi J, K lần lượt là hình chiếu của H lên DC, SJ

$$d\left(AB, SM\right) = d\left(AB,(SDC)\right) = d\left(A,(SDC)\right) = \frac{3}{2}d\left(G,(SDC)\right)$$

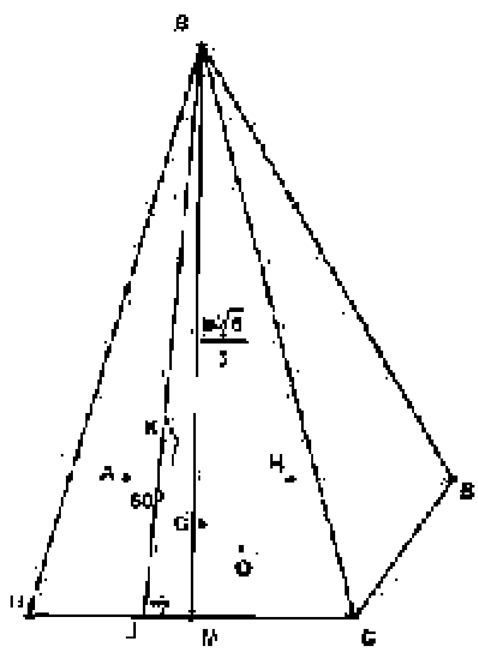
$$= \frac{3}{2}GK = \frac{3}{2}.\frac{SG.GJ}{SJ} = \frac{3}{2}.\frac{SG.GC.\sin\widehat{GCJ}}{\sqrt{SG^2 + GJ^2}}$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{SG.GC.\sin\widehat{GCJ}}{\sqrt{SG^2 + \left(GC.\sin\widehat{GCJ}\right)^2}}$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2}{3}.AC.\sin 30^0}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.AC.\sin 30^0\right)^2}}$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2}{3}.2\,\mathrm{AO}.\sin 30^0}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.2\,\mathrm{AO}.\sin 30^0\right)^2}}$$

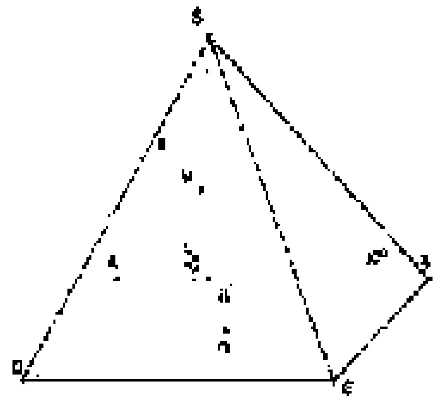
$$= \frac{3}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2}{3}.2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 30^0}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 30^0\right)^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Câu 146. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Biết $SA=a$ và cạnh bên SB tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn C.**



Vẽ đường thẳng d qua A và song song với AC

Gọi L,M lần lượt là hình chiếu của H lên d, SL

$$d(SA,BD)=d(BD,(SAL))=d(B,(SAL))$$

$$=\frac{BA}{HA}.d(H,(SAL))=\frac{BA}{HA}.HM$$

$$=\frac{BA}{HA}.\frac{SH.HL}{SL}=\frac{BA}{HA}.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}.$$

$$=\frac{\frac{a}{\sin 30^0}}{a.\cos 60^0}.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}=4.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}$$

$\sin 60^0=\frac{SH}{SA}\Rightarrow SH=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\widehat{LAH}=\frac{HL}{AH}\Leftrightarrow \sin\widehat{ABO}=\frac{HL}{AH}$ $cos60^0=\frac{AH}{SA}\Rightarrow AH=\frac{a}{2}$

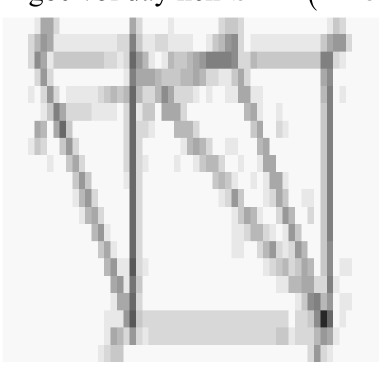
$\Leftrightarrow \frac{AO}{AB}=\frac{HL}{AH}\Leftrightarrow HL=\frac{AO.AH}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}AH=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ $4.\frac{SH.HL}{\sqrt{SH^2+HL^2}}=4.\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{4}.a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$

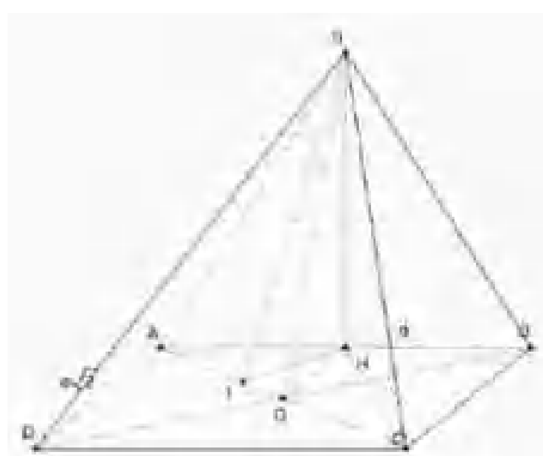
Câu 147. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB ; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ; góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CH và SD là :

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{2}}{5}$.

<u>Hướng dẫn giải:</u> **Chọn D.**

Vì H là trung điểm của cạnh AB ; tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH\perp(ABCD)$.





Gọi I là hình chiếu của H trên AC suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$là góc $\widehat{SIH}=60^0$.

Ta có $\Delta ABC\sim\Delta AIH\Rightarrow\dfrac{IH}{AH}=\dfrac{BC}{AC}\Leftrightarrow IH=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong ΔSHI vuông tại H có $SH=IH\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi K là điểm đối xứng của H qua A ta có tứ giác CDKH là hình bình hành suy ra CH song song với mặt phẳng $(SDK)\supset SD$.

Nên ta có: $d(CH,SD)=d(CH,(SDK))=d(H,(SDK))$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên DK và SE. Khi đó ta có $d(H,(SDK))=HF$.

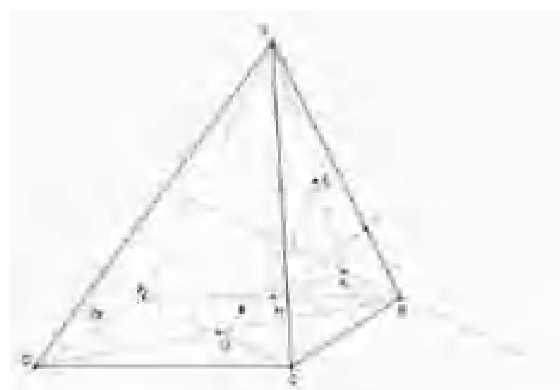
Ta có $HE=2d(B,HC)=2\dfrac{BH.BC}{\sqrt{BH^2+BC^2}}=2\dfrac{\frac{a}{2}.a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2}}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$

Trong ΔSHE vuông tại H có $HF=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{2a\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{8a^2}{9}}}=\dfrac{2a^2}{3}.\dfrac{3\sqrt{2}}{5a}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{5}$.Chọn **D.**

Câu 148. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ D đến (SBC) bằng $\dfrac{2a}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**



Vẽ đường thẳng d qua A và song song với AC

Gọi K, I lần lượt là hình chiếu của H lên d, SK

$d(D,(SBC))=\dfrac{2a}{3}\Leftrightarrow d(A,(SBc))=\dfrac{2a}{3}$

$\Leftrightarrow d(H,(SBC))=\dfrac{a}{3}\Leftrightarrow HI=\dfrac{a}{3}$

$\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HB^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{9}{a^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{4}{a^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{5}{a^2}\Leftrightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

$\sin\widehat{KBH}=\dfrac{HK}{HB}\Leftrightarrow\sin\widehat{CAB}=\dfrac{HK}{HB}\Leftrightarrow\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{HK}{HB}\Rightarrow HK=\dfrac{HB.CB}{AC}=\dfrac{\frac{a}{2}.2a}{\sqrt{5}.a}=\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$

$d(AC,SB)=d(A,(SBK))=2d(H,(SBK))=2HL$

$=2\dfrac{SH.HK}{SK}=2\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=2.\dfrac{SH^2}{SH\sqrt{2}}=2\dfrac{SH}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

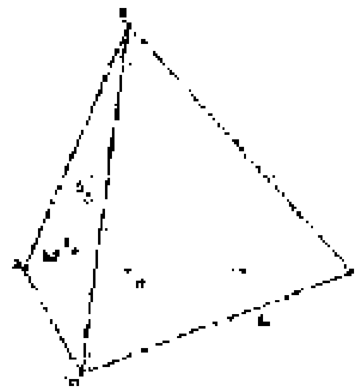
Câu 149. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$, có $SH \perp (ABC)$ với H thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AH$. Góc tạo bởi SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn B.**

Vẽ đường thẳng d qua A và song song với BC

Gọi F, G lần lượt là hình chiếu của H lên d, SF



$$\tan 60^0 = \frac{SH}{a} \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$$

$$\sin \widehat{FAH} = \frac{HF}{AH} \Leftrightarrow \sin 60^0 = \frac{HF}{a} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$HG = \frac{SH.HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

$$d\left(BC, SA\right) = d\left(B, \left(SAF\right)\right) = 3d\left(H, \left(SAF\right)\right) = 3HG = 3\frac{\sqrt{15}}{5}a$$

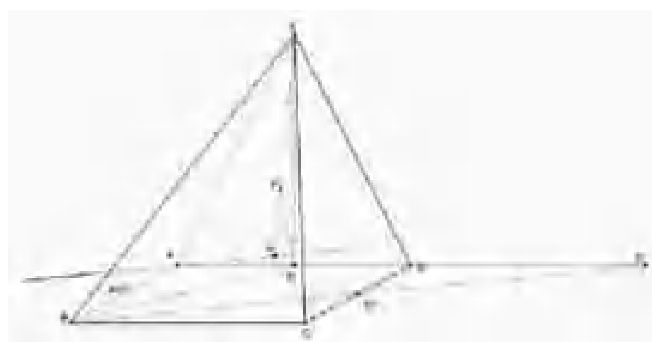
Câu 150. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AD, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 60^0, M là trung điểm của DC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA *và* BM bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{285}}{9}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{285}}{19}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{285}}{9}$.

Hướng dẫn giải: **Chọn C.**

Vẽ đường thẳng d qua A và song song với BM

Gọi O, P lần lượt là hình chiếu của H lên d, SO



$$BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan 60^0 = \frac{SH}{BH} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\sin \widehat{OAH} = \frac{OH}{AH} \Leftrightarrow \sin \widehat{MBC} = \frac{OH}{AH} \Leftrightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{OH}{AH} \Leftrightarrow OH = \frac{CM.AH}{BM} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{5}}{10}a$$

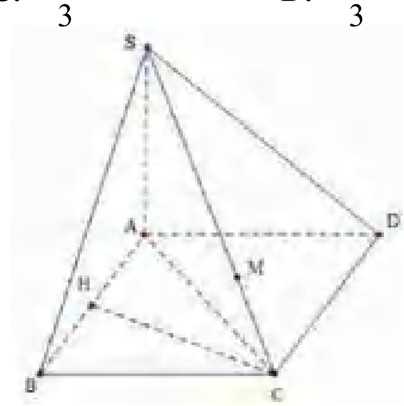
$$SO = \sqrt{SH^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}a}{5}$$

$$d\left(SA,BM\right)=d\left(N,\left(SAO\right)\right)=4d\left(H,\left(SAO\right)\right)=4HP=4.\frac{SH.OH}{SO}=4.\frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{95}a}{5}}=\frac{\sqrt{285}}{19}a.$$

Câu 151. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $ABC = 60°$. Mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh SC lấy điểm M sao cho $MC = 2MS$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

HD. Chọn đáp án B



Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAD)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Dựng $CH\perp AB \Rightarrow CH\perp(SAB)$

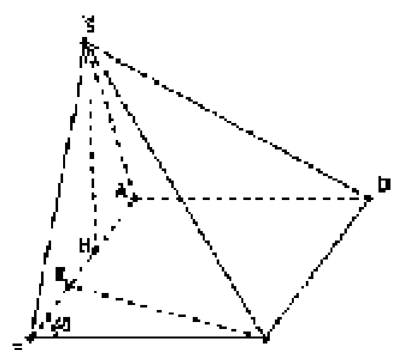
Do $\frac{d(C,(SAB))}{d(M,(SAB))} = \frac{CS}{MS} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow d(M,(SAB)) = \frac{2}{3}d(C,(SAB)) = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}, ABC = 60°$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

HD. Chọn đáp án A



Kẻ $SH\perp AB$,

do $(SAB)\perp(ABCD) \Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Dựng $CK\perp AB$, có $CK\perp SH \Rightarrow CK\perp(SAB)$

Do $CD//AB \Rightarrow d(D,(SAB)) = d(C,(SAB)) = CK$

$= BC\sin 60° = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 153. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $ABC = 60°$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh BC và CD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $MB = MC$ và $NC = 2ND$. Gọi P là giao điểm của AC và MN. Khoảng cách từ điểm P đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{14}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{10}$

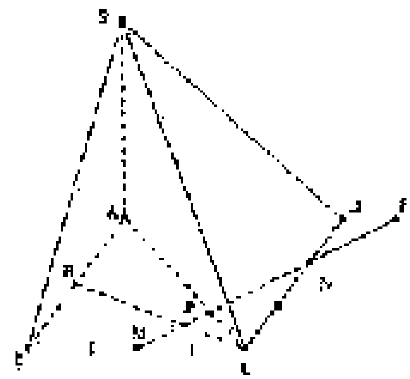
HD. Chọn đáp án C

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB)$

Giả sử MN cắt AD tại F. Theo định lý Talet ta có:

$\frac{DF}{MC} = \frac{ND}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DF = \frac{MC}{2} = \frac{a}{4}$.

Khi đó $\frac{PA}{PC} = \frac{AF}{MC} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{CA}{PA} = \frac{7}{5}$

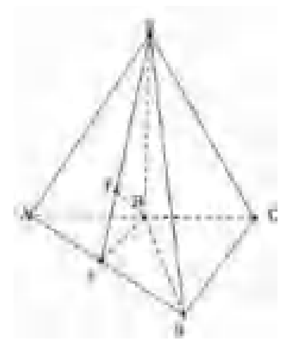


Do đó $d(P,(SAB)) = \frac{5}{7}d(C,(sAB)) = \frac{5}{7}CH = \frac{5}{7}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5a\sqrt{3}}{14}$

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giac vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AC. Biết $SB = a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\frac{7a\sqrt{21}}{3}$

HD. Chọn đáp án B



$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \to BH = \frac{AC}{2} = a$

Do vậy $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a$. Dựng $HE \perp AB; HF \perp SE$

Ta có: $HE = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(H,(SAB)) = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, diện tích tứ giác $ABCD$ bằng $6a^2\sqrt{6}$. Cạnh $SA = a\sqrt{\frac{110}{3}}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 30°. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) **gần nhất** với giá trị nào sau đây:

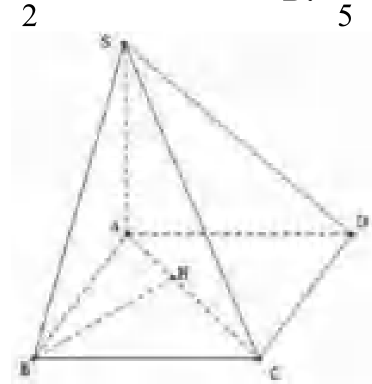
A. $\frac{13a}{10}$ **B.** $\frac{7a}{5}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $\frac{8a}{5}$

HD. Chọn đáp án B

Kẻ $BH \perp AC$, lại có $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA}$

Ta có: $AC\tan 30° = SA = a\sqrt{\frac{110}{3}} \Rightarrow AC = a\sqrt{110}$

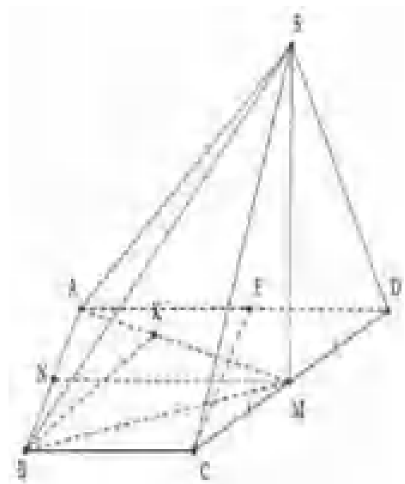


Do vậy $BH = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{6a^2\sqrt{6}}{\sqrt{110}} \approx 1,4a = \frac{7}{5}a$

Câu 156. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*, $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt đáy là trung điểm *M* của cạnh *CD*. Khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (SAM) bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{10}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{3}$

HD. Chọn đáp án B



Gọi *E* là trung điểm của *AD* ta có $CE = AB = ED$.

Có $CD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow CE = ED = 2a$

Do vậy $AD = 4a; BD = 2a$. Gọi *N* là trung điểm của *AB*

Suy ra $MN = 3a, S_{MAB} = \frac{1}{2}NM.AB = 3a^2$

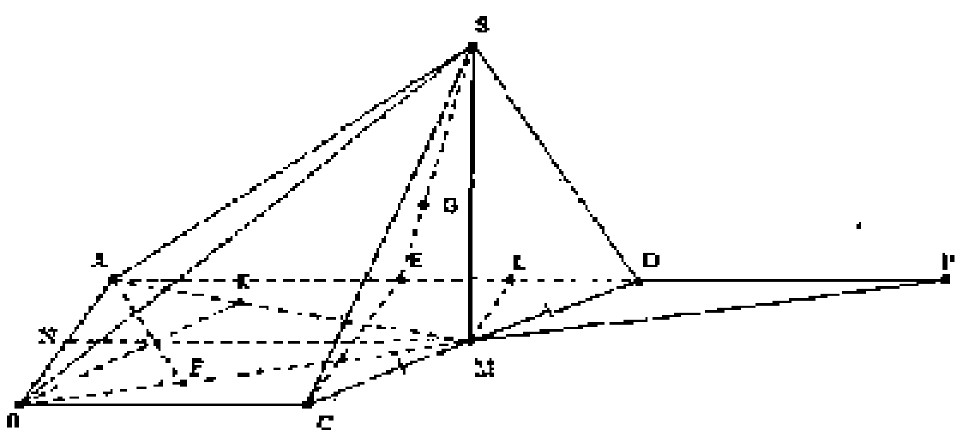
$MA = \sqrt{AN^2 + NM^2} = a\sqrt{10}$.

Kẻ $BK \perp AM \Rightarrow d\left(B,(SAM)\right) = BK = \frac{2S_{ABM}}{AM} = \frac{3a\sqrt{10}}{5}$

Câu 157. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*, $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt đáy là trung điểm *M* của cạnh *CD*. Khoảng cách từ trọng tâm *G* của tam giác *SAD* đến mặt phẳng (SBM) bằng

A. $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{10}}{15}$

HD. Chọn đáp án A



Gọi *E* là trung điểm của *AD* ta có $CE = AB = ED$.

Có $CD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow CE = ED = 2a$

Do vậy $AD = 4a; BD = 2a$. Gọi N là trung điểm của AB

Suy ra $MN = 3a, S_{MAB} = \dfrac{1}{2}NM.AB = 3a^2$

$MA = \sqrt{AN^2 + NM^2} = a\sqrt{10} = MB$. Gọi L là trung điểm của DE ta có $LA = 3a$ và L là trung điểm của AP. Khi đó

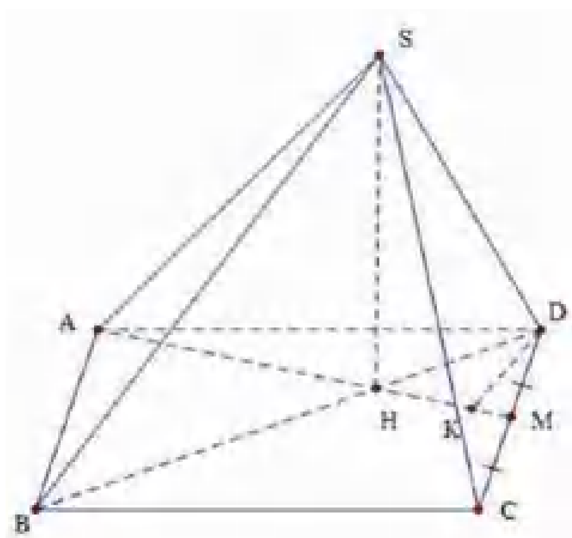
$LP = 3a \Rightarrow EP = 4a; PA = 6a. \dfrac{d(A,(SBM))}{d(E,(SBM))} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}, d(E,(SBM)) = \dfrac{3}{2}d(G,(SMB))$

Do đó $d(G,(SBM)) = \dfrac{4}{9}d(A,(SMB)) = \dfrac{4}{9}AF = \dfrac{4}{9}.\dfrac{3a\sqrt{10}}{5} = \dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$

Câu 158. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của CD. Hai mặt phẳng (SBD) và (SAM) cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A. $\dfrac{4a\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\dfrac{3a\sqrt{10}}{5}$

HD. Chọn đáp án C



Gọi $H = AM \cap BD$. Ta có: $\begin{cases}(SBD) \perp (ABC) \\ (SAM) \perp (ABC)\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Lại có $\dfrac{HB}{HD} = \dfrac{AB}{DM} = 2 \Rightarrow d(D,(SAM)) = \dfrac{1}{2}d(B,(SAM))$

$S_{ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ADC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{2}$.

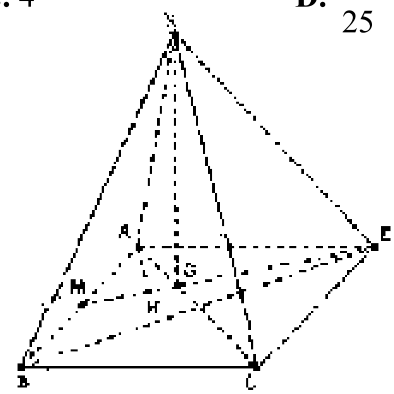
Ta có: $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}AD.DM\sin D \Rightarrow \sin D = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{D} = 45°$

Do vậy $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2 - 2AD.DM\cos 45°} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$

Do vậy $DK = \dfrac{2S_{ADM}}{AM} = \dfrac{2a}{\sqrt{10}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 159. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ABD. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SDG) bằng $\sqrt{5}$ và $SG = 1$. Thể tích khối chóp đã cho là

A. $\dfrac{25}{12}$ **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** 4 **D.** $\dfrac{12}{25}$



HD. Chọn đáp án A

Ta có: $CG = 2AG \Rightarrow d\left(C,(SDG)\right) = 2d\left(A,(SDG)\right)$

Suy ra $d\left(A,(SDG)\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Dựng $AH \perp DG$

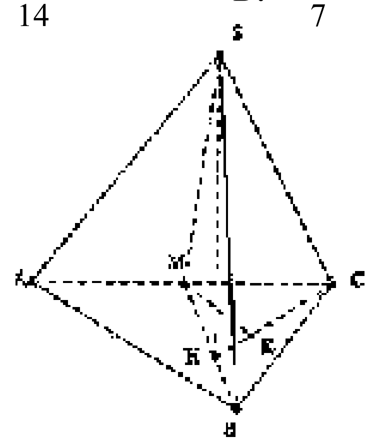
Mặt khác $AH \perp SG \Rightarrow AH \perp (SDG) \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Đặt $AB = x \Rightarrow AH = \dfrac{AD.AM}{\sqrt{AD^2 + AM^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \dfrac{25}{12}$

Câu 160. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AC. Hình chiếu của S trên mặt đáy là điểm H thuộc đoạn BM sao cho $HM = 2HB$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{7}}{14}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{14}$ **C.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$



HD. Chọn đáp án D

$d\left(A,(SCH)\right) = 2d\left(M,(SHC)\right)$.

Kẻ $MK \perp CH$

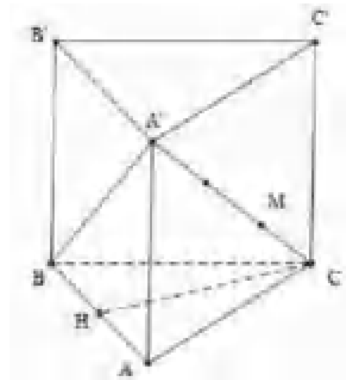
Khi đó $d\left(A,(SCH)\right) = 2MK$

Mặt khác $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; MC = \dfrac{a}{2}$

Suy ra $MK=\dfrac{MH.MC}{\sqrt{MH^2+MC^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{7}}$ do đó $d=2MK=\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$

Câu 161. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân có $AC=BC=3a$. Đường thẳng $A'C$ tạo với đáy một góc 60°. Trên cạnh $A'C$ lấy điểm M sao cho $A'M=2MC$. Biết rằng $A'B=a\sqrt{31}$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ là:

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $3a\sqrt{2}$ **D.** $2a\sqrt{2}$



HD. Chọn đáp án B

Ta có: $A'A=AC\tan 60°=3a\sqrt{3}$

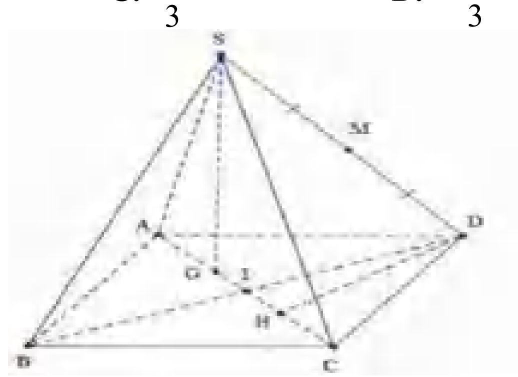
Suy ra $AB=\sqrt{A'B^2-AA'^2}=2a$

Do vậy $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=2a\sqrt{2}$

$d\left(M,\left(ABB'A'\right)\right)=\dfrac{2}{3}d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=\dfrac{2}{3}CH=\dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$

Câu 162. Cho khối chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật *ABCD* với $AB=a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác *ABD*. Biết $SC=2a\sqrt{2}$ và tạo với đáy một góc 45°. Khoảng cách từ trung điểm của *SD* đến mặt phẳng (SAC) là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{2a}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}a}{3}$



HD. Chọn đáp án A

Ta có $SC=2a\sqrt{2}\Rightarrow GC=2a\Rightarrow AC=3a$

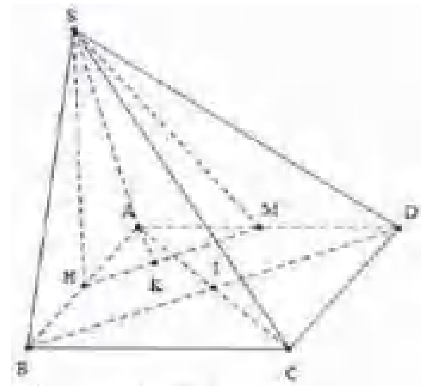
Khi đó $CD=2a\sqrt{2}$ suy ra $DH=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$

Do vậy $d\left(M,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{1}{2}DH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 163. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật *ABCD* có $AD=a\sqrt{3}$. Tam giác *SAB* là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M* là trung điểm của *AD*, *H* là trung điểm của *AB*. Biết rằng $SD=2a$. Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng $\left(SHM\right)$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án B



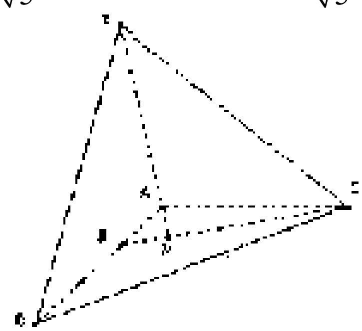
Ta có: $SA=\sqrt{SD^2-AD^2}=a=AB$.

Khi đó $AK=\dfrac{AH.AM}{\sqrt{AH^2+AM^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 164. Cho khối chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *A* có $AC=a$. Tam giác *SAB* vuông tại *S* và hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt đáy là điểm *H* thuộc cạnh *AB* sao cho $HB=2HA$. Biết $SH=2a\sqrt{2}$, khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng (SHC) là:

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

HD. Chọn đáp án C



Ta có: $SH^2=HA.HB=2HA^2$

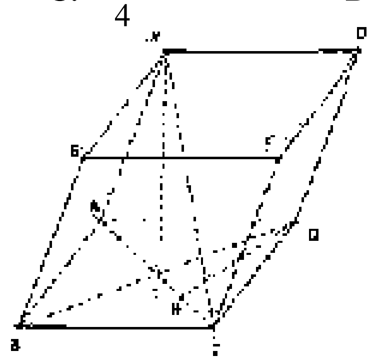
Suy ra $8a^2=2HA^2\Rightarrow HA=2a$

Do vậy $AM=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow d_C=2AM=\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$

Câu 165. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AD=a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(A'ACC')$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án D



Ta có

$AC=A'A\sqrt{2}=2a\Rightarrow CD=a$

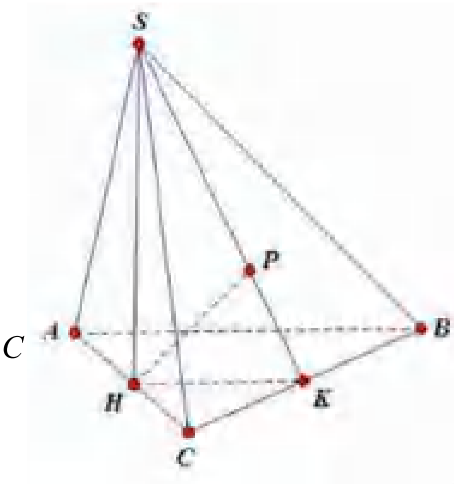
$\Rightarrow d\left(D,(A'AC)\right)=DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

(Do $DD'//AA'$)

Câu 166. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt đáy là trung điểm *H* của cạnh *AC*. Biết $SB=a\sqrt{2}$. Tính theo *a* khoảng cách từ điểm *H* đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

HD. Chọn đáp án C



+) Kẻ $HK \perp BC, HP \perp SK \Rightarrow d\left(H,(SBC)\right) = HP$.

Từ $\begin{cases} HK \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK // AB$.

$\Rightarrow \frac{HK}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow HK = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

+) ΔABC vuông tại B có H là trung điểm của cạnh AC

$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

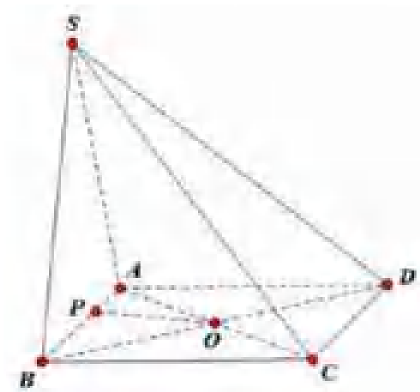
$\Rightarrow HS = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$

$\Rightarrow \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow HP = \frac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d\left(H,(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Câu 167. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, cạnh $AB = 2a, BC = 2a\sqrt{2}$, $OD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách d từ điểm O đến mặt phẳng (SAB).

A. $d = a$ **B.** $d = a\sqrt{2}$ **C.** $d = a\sqrt{3}$ **D.** $d = 2a$

HD. Chọn đáp án B



+) Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$,

kẻ $OP \perp (SAB) \Rightarrow d\left(O,(SAB)\right) = OP$.

+) $\begin{cases} AB = 2a \\ BC = 2a\sqrt{2} \\ OD = a\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow AB^2 + AD^2 = 4a^2 + 8a^2 = 12a^2 = (2OD)^2 = BD^2$

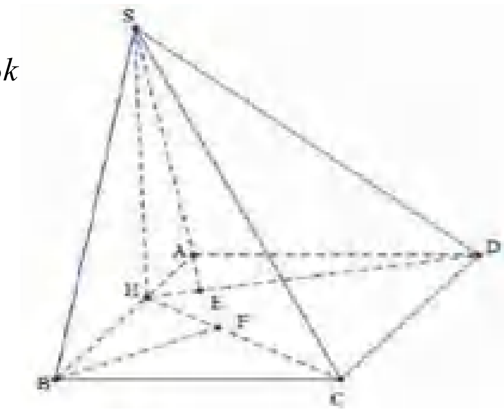
$\Rightarrow \Delta BAD$ vuông tại A, trên $(ABCD)$, ta có $\begin{cases} OP \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow OP // AD$.

Mà O là trung điểm của BD $\Rightarrow OP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}.2a\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow d\left(O,(SAB)\right) = a\sqrt{2}$

Câu 168. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = k.AB$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt đáy là H thỏa mãn $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Tỷ số khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDH) và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) là:

A. $\sqrt{\dfrac{4+9k^2}{1+9k^2}}$ **B.** $\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{4+9k^2}{1+9k^2}}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2k}$

HD. Chọn đáp án B



Không mất tính tổng quát. Đặt $AB = 3 \Rightarrow AD = 3k$

Kẻ $AE \perp DH$, lại có $AE \perp SH \Rightarrow AE \perp (SDH)$

Do đó $d\left(A,(SDH)\right) = AE = \dfrac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = d_1$

Tương tự dựng $BF \perp HC$ ta có:

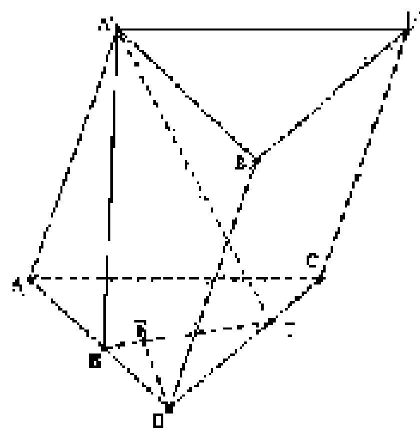
$d\left(B,(SHC)\right) = BF = \dfrac{BH.BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = d_2$

Do vậy $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{AH}{BH}.\dfrac{\sqrt{BH^2+BC^2}}{\sqrt{AH^2+AD^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4+9k^2}{1+9k^2}}$

Câu 169. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, điểm E thuộc BC sao cho $BC = 3EC$. Biết hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của AB. Cạnh bên $AA' = 2a$ và tạo với đáy một góc 60°. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'HE)$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$ **B.** $\dfrac{3a}{5}$ **C.** $\dfrac{3a}{4}$ **D.** $\dfrac{4a}{5}$

HD. Chọn đáp án D



Ta có AA' tạo với đáy một góc 60° nên $\widehat{A'AH} = 60°$.

Khi đó $AH = A'A.\cos 60° = a \Rightarrow AB = BC = 2a$.

Do vậy $BH = a; BE = \dfrac{4a}{3}$

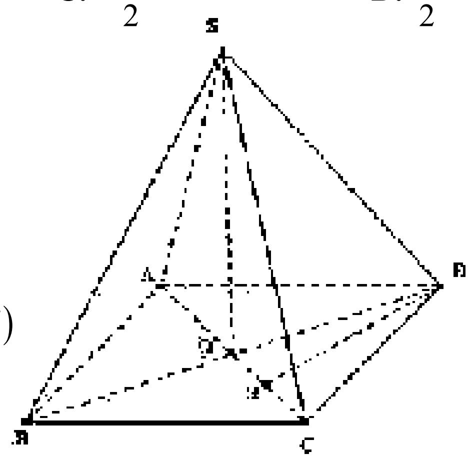
Dựng $BK \perp HE$, lại có $BK \perp A'H \Rightarrow BK \perp (A'HE)$

Do đó $d\left(B,(A'HE)\right) = BK = \dfrac{BH.BE}{\sqrt{BH^2+BE^2}} = \dfrac{4a}{5}$

Câu 170. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O. Tam giác SAC đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $SA = 2AB = 2a$, khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) là:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

HD. Chọn đáp án B



Ta có: $SO \perp AC$, mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$

Suy ra $SO \perp (ABCD)$. Lại có $SA = AC = SC = 2a$

Do đó $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$

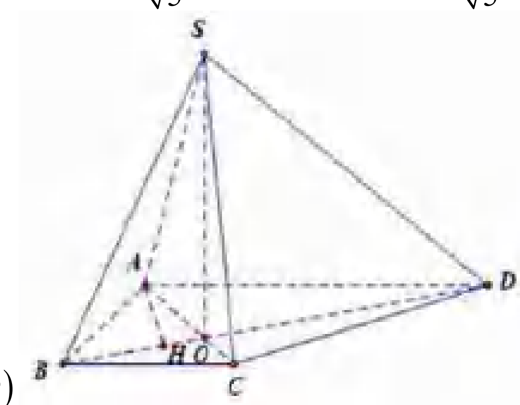
Dựng $DH \perp AC$, lại có $DH \perp SO \Rightarrow DH \perp (SAC)$

Do vậy $d\left(D,(SAC)\right) = DH = \frac{AD.CD}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 171. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{4a}{\sqrt{5}}$

HD. Chọn đáp án B



Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases}$

và $(SAC) \cap (SBD) = SO$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ với $O = AC \cap BD$

Kẻ $AH \perp BD$ ta có $\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp SO \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD)$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow d\left(A,(SBD)\right) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Câu 172. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Biết SC tạo với đáy một góc $45°$ và cạnh bên $SA = 2a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

HD. Chọn đáp án C

Ta có $\widehat{\left(SC,(ABC)\right)} = \widehat{SCH} = 45°$. Giả sử $AB = BC = CA = 3x$

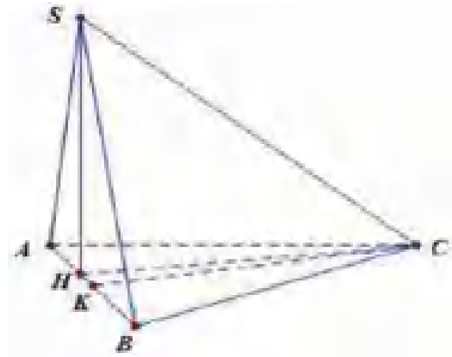
Ta có $CH = \sqrt{AH^2 + AC^2 - 2AH.AC.\cos 60^\circ} = x\sqrt{7}$

Ta lại có $SA^2 = SH^2 + AH^2 \Leftrightarrow 8a^2 = 8x^2 \Leftrightarrow x = a$

$\Rightarrow AB = BC = CA = 3a$

Kẻ $CK \perp AB$ ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB)$

Mà $CK = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d\left(C,(SAB)\right) = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$



Câu 173. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$, ΔSAB là tam giác vuông cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ trung điểm H của AB đến mặt phẳng (SBD) là?

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** a **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

HD. Chọn đáp án A

Vì ΔSAB là tam giác vuông cân tại S nên $SH \perp (ABCD)$.

Từ H kẻ $HI \perp BD$, từ H kẻ $HK \perp SI$ với $I \in BD, K \in SI$.

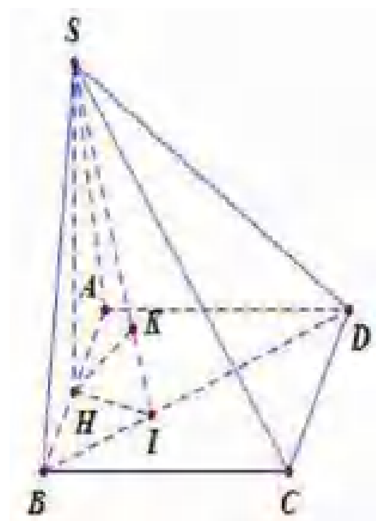
Ta có

$\begin{cases} SH \perp BD \\ HI \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI) \Rightarrow BD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBD)$.

Do đó $d\left(H,(SBD)\right) = HK$. Mặt khác $\dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{HK^2}$.

Mà $HI = \dfrac{1}{2}d(A,BD) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $SH = \dfrac{AB}{2} = a$.

Nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$



Câu 174. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$, $ABC = 120^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC)?

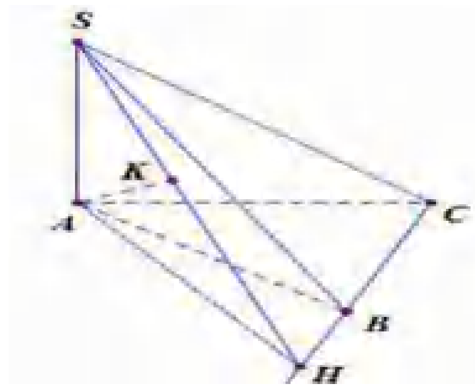
A. $2a$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** a **D.** $\dfrac{3a}{2}$

HD. Chọn đáp án D

Từ A kẻ $AH \perp BC$, kẻ $AK \perp SH$ với $H \in BC, K \in SH$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBC)$

Do đó $d\left(A,(SBC)\right) = AK$ thỏa mãn



$\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AK^2}$.

Mà $SA = 3a$

và $AH = \sin 60°.AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a = a\sqrt{3}$

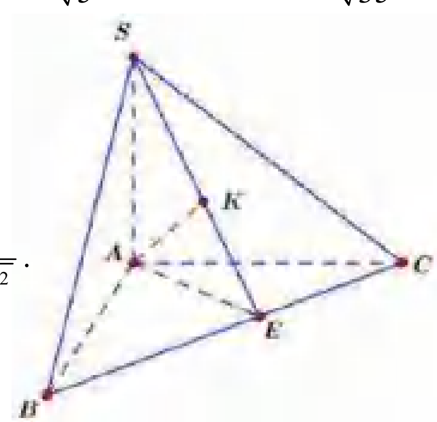
Nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{9a^2}$

$\Rightarrow AK = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{3a}{2}$

Câu 175. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $AC = a\sqrt{3}, ABC = 30°$, góc giữa *SC* và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Cạnh bên *S* vuông góc với đáy. Khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$ **C.** $\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$

HD. Chọn đáp án C



Kẻ $AE \perp BC, AK \perp SE \left(E \in BC, K \in SE\right)$.

Chứng minh $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d\left(A,(SBC)\right)$.

Xét tam giác *SAE* vuông tại *A* ta có: $AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}}$.

Tính *SA, AE*:

Xét hai tam giác vuông *ABC* và *SAC*: $AB = SA = 3a$.

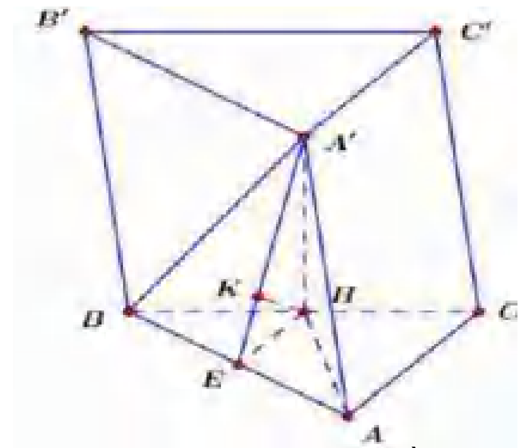
Xét tam giác vuông *ABC*: $AE = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = HK = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Câu 176. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = a\sqrt{3}, ABC = 30°, ACB = 60°$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt đáy là trung điểm của *BC*. Thể tích khối chóp $A'ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{6}$. Khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng $(A'AB)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$

HD. Chọn đáp án B

Gọi E là trung điểm của AB.



Ta có $AC = AB.\tan 30° = a \Rightarrow HE = \frac{a}{2}$.

$V_{A'ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{a^3}{6} \Rightarrow A'H = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Kẻ $HK \perp A'E \Rightarrow HK = d\left(H,\left(A'AB\right)\right) = \frac{a}{\sqrt{7}}$

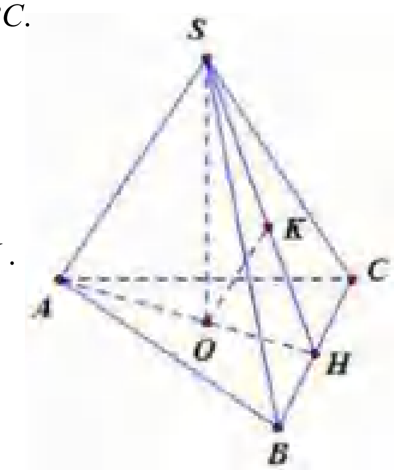
$\Rightarrow d\left(C,\left(A'AB\right)\right) = 2d\left(H,\left(A'AB\right)\right) = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

Câu 177. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính $\frac{4d}{a}$, biết d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 9

HD. Chọn đáp án A

Gọi O là tâm của tam giác ABC và H là trung điểm của BC.



Có $\begin{cases} SO \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow \widehat{\left((SBC),(ABC)\right)} = \widehat{(SH,AH)} = \widehat{SHA}$

Kẻ $OK \perp SH$ suy ra $OK \perp (SBC) \Rightarrow d\left(O,(SBC)\right) = OK$.

Xét ΔOKH vuông tại K, có

$OK = \sin 60°.OH = \frac{\sqrt{3}}{2}.OH = \frac{\sqrt{3}}{6}.AH = \frac{a}{4}$

Do đó $d\left(A,(SBC)\right) = 3d\left(H,(SBC)\right) = \frac{3a}{4} = d \Leftrightarrow \frac{4d}{a} = 3$.

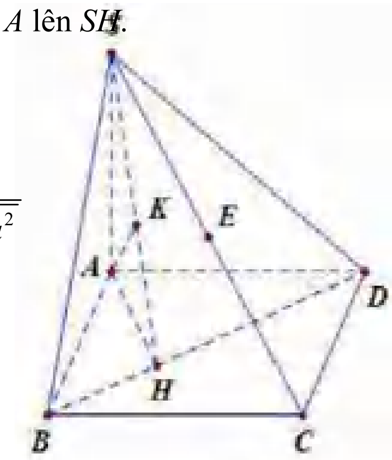
Câu 178. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = a$ và $AD = x.a$. Gọi E là trung điểm cạnh SC. Tìm x, biết khoảng cách từ điểm E đến mặt phẳng (SBD) là $d = \frac{a}{3}$.

A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 3$ **D.** $x = 4$

HD. Chọn đáp án B

Ta có $d\left(E,(SBD)\right) = \frac{1}{2}d\left(A,(SBD)\right) = \frac{a}{3} \Rightarrow d\left(A,(SBD)\right) = \frac{2a}{3}$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BD. Và K là hình chiếu của A lên SH.



Ta được $AK \perp (SBD) \Rightarrow AK = d\left(A,(SBD)\right) = \dfrac{2a}{3}$.

Mà $AH.BD = AB.AD \Leftrightarrow AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + BD^2}} = \dfrac{x.a^2}{\sqrt{a^2 + x^2a^2}}$

Do đó $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \dfrac{9}{4a^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{a^2 + x^2a^2}{x^2a^4}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{4} = \dfrac{1+x^2}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ vì $x > 0$.

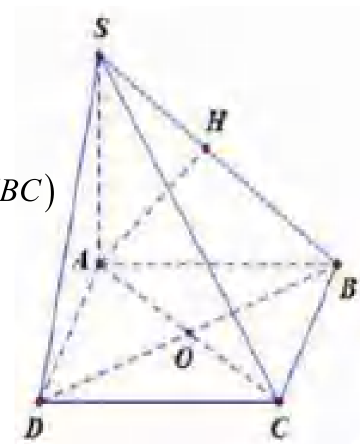
Câu 179. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{8}$

HD. Chọn đáp án B

Ta có $d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(O,(SBC)\right)$

Gọi H là hình chiếu của A lên SB.



Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $d\left(O,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 180. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi F là trung điểm cạnh CD. Tính $\dfrac{33d}{a}$, biết d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBF).

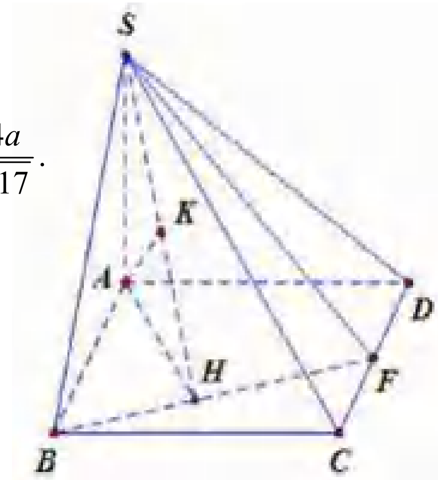
A. $2\sqrt{33}$ **B.** $4\sqrt{33}$ **C.** $2\sqrt{11}$ **D.** $4\sqrt{11}$

HD. Chọn đáp án B

Gọi H là hình chiếu của A lên BF. Và K là hình chiếu của A lên SH.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BF \\ AH \perp BF \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SAH) \Rightarrow BF \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBF)$.

Do đó $d = d\left(A,(SBF)\right) = AK$.



Mà $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Nên $AH.BF=AD.AB \Leftrightarrow AH=\dfrac{AB.AD}{BF}=\dfrac{2a^2}{\dfrac{a\sqrt{17}}{2}}=\dfrac{4a}{\sqrt{17}}$.

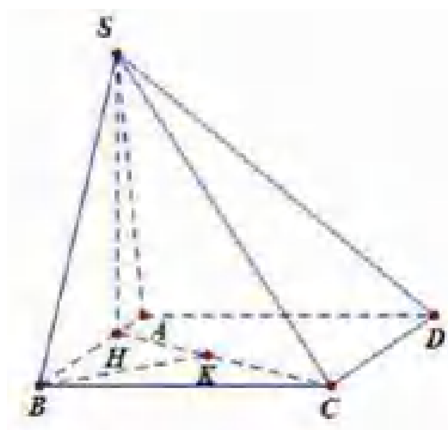
Khi đó $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{17}{16a^2}=\dfrac{33}{16a^2}$

$\Leftrightarrow AK=\dfrac{4a}{\sqrt{33}}$. Vậy $\dfrac{33d}{a}=\dfrac{33.\dfrac{4a}{\sqrt{33}}}{a}=4\sqrt{33}$

Câu 181. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=0$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC).

A. $\dfrac{5a}{12}$ **B.** $\dfrac{5a}{6}$ **C.** $\dfrac{12a}{5}$ **D.** $\dfrac{6a}{5}$

HD. Chọn đáp án C



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SHC)\perp(ABCD)\end{cases}$ mà $(SAB)\cap(SHC)=SH$

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Kẻ $BK\perp CH$ ta có $\begin{cases}BK\perp CH\\BK\perp SH\end{cases}\Rightarrow BK\perp(SHC)$

Ta có $\dfrac{1}{BK^2}=\dfrac{1}{BH^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{25}{144a^2}\Rightarrow BK=\dfrac{12a}{5}$

$\Rightarrow d\big(B,(SHC)\big)=\dfrac{12a}{5}$

Câu 182. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SOM)

A. a **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a}{4}$ **D.** $\dfrac{a}{8}$

HD. Chọn đáp án B

Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$

Ta có $\begin{cases}CM\perp OM\\CM\perp SO\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SOM)$. Mà $CM=\dfrac{a}{2}\Rightarrow d\big(C,(SOM)\big)=\dfrac{a}{2}$

Câu 183. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tính khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng (SHC) biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

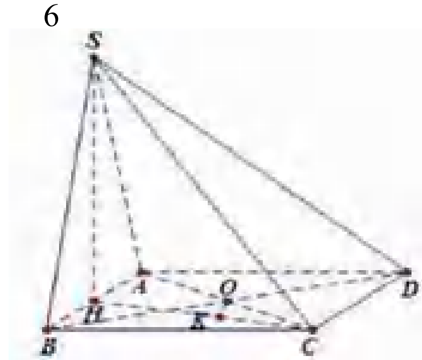
A. $\frac{a}{\sqrt{17}}$ **B.** $\frac{2a}{\sqrt{17}}$ **C.** $\frac{a}{\sqrt{27}}$ **D.** $\frac{2a}{\sqrt{27}}$

HD. Chọn đáp án A

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.BC = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.BC = \frac{a^2\sqrt{3}.BC}{6}$$

Mà $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.BC = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow BC = 2a$



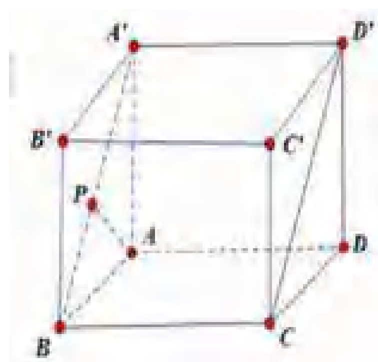
Kẻ $OK \perp CH$ ta có $\begin{cases} OK \perp CH \\ OK \perp SH \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SCH)$

Ta tính được $OK = \frac{a}{\sqrt{17}} \Rightarrow d(O,(SCH)) = \frac{a}{\sqrt{17}}$

Câu 184. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A, cạnh $A'C = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án B



+) Kẻ $AP \perp A'B \Rightarrow d(A,(BCD')) = d(A,(A'BC)) = AP$

+) $\Delta A'AC$ vuông cân tại A

$\Rightarrow A'A = AC = \frac{A'C}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(A,(BCD')) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

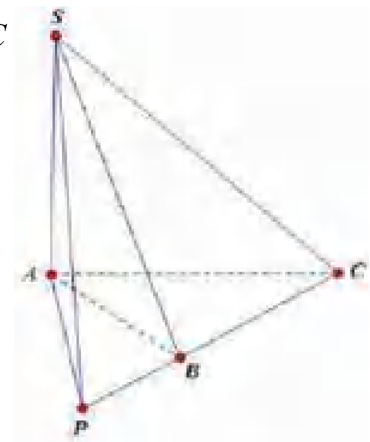
Câu 185. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Giả sử $AB = BC = 2a$, góc $ABC = 120°$. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)?

A. $\frac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $2a$

HD. Chọn đáp án C

+) Trên mặt phẳng đáy, qua A kẻ một đường thẳng vuông góc với AC, đường thẳng này cắt BC tại P.

Đặt $d\left(A,(SBC)\right) = d\left(A,(SPC)\right) = h$, tứ diện vuông $S.APC$



$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AP^2}.$$

+) ΔABP đều

$$\Rightarrow \begin{cases} AP = BA = 2a \\ \tan 60° = \frac{AC}{AP} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP = 2a \\ AC = 2a\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow h = \frac{3a}{2}$$

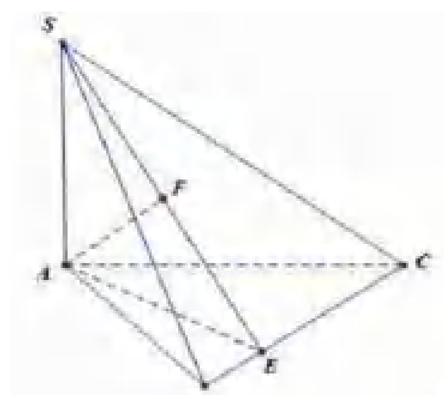
Câu 186. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a, AC = 2a, BAC = 120°$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là:

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$ **B.** $\frac{3\sqrt{7}a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}a}{3}$

HD. Chọn đáp án A

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120°} = a\sqrt{7}$

Dựng $AE \perp BC; AF \perp SE$ khi đó $d\left(A,(SBC)\right) = AF$



Ta có: $AE = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{AB.AC\sin\widehat{BAC}}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Mặt khác $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow \widehat{SEA} = 60°$

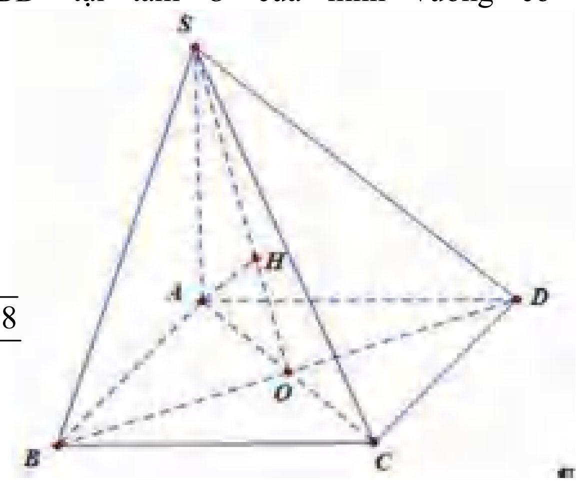
Suy ra $d = AF = AE\sin 60° = \frac{a\sqrt{21}}{7}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$

Câu 187. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cạnh SC hợp với đáy một góc 60°. Gọi h là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD). Tỉ số $\frac{h}{a}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{18}}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{78}}{13}$ **C.** $\frac{\sqrt{58}}{13}$ **D.** $\frac{\sqrt{38}}{13}$

HD. Chọn đáp án B

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$ tại tâm O của hình vuông có $AC = a\sqrt{2}; OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SAC} = 60°$

$\Rightarrow SA = AC\tan 60° = a\sqrt{6}$

$AH \perp SO$

$\Rightarrow d(A,(SBD)) = AH = \frac{SA.AO}{\sqrt{SA^2 + OA^2}} = \frac{a\sqrt{78}}{13}$

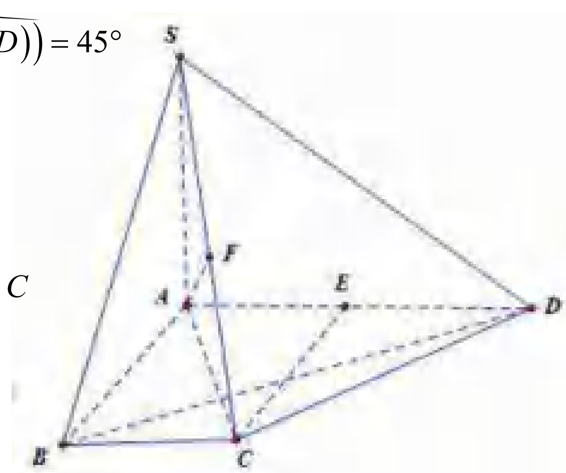
Do đó $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{78}}{13}$

Câu 188. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AD = 2AB = 2BC$; $BC = a$; $SA \perp (ABCD)$ và SB hợp với mặt phẳng đáy một góc 45°. Tính $\frac{d(A,(SDC))}{a}$

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

HD. Chọn đáp án D

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{SBA} = (SB,(ABCD)) = 45°$



Khi đó $SA = AB\tan 45° = a$.

Gọi E là trung điểm của AD

Khi đó $ABCE$ là hình vuông cạnh a.

Do $CE = \frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C

Suy ra $AC \perp CD$, dựng $AF \perp SC$

Ta có:

$AC = a\sqrt{2}, d\left(A,(SCD)\right) = AF = \dfrac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Do đó $\dfrac{d\left(A,(SCD)\right)}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

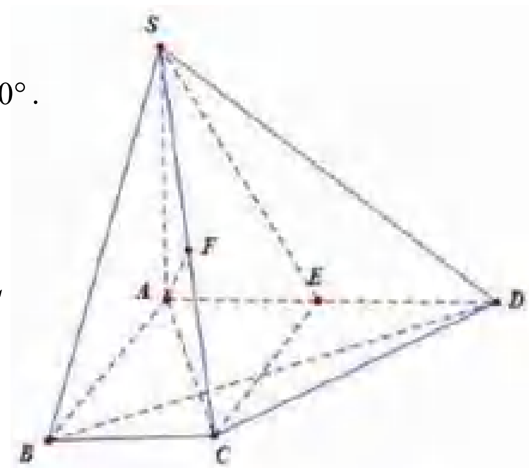
Câu 189. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $ABC = BAD = 90°$, $BA = BC = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng 30°. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$

HD. Chọn đáp án A

Gọi E là trung điểm của AD khi đó $ABCE$ là hình vuông cạnh a

Suy ra $CE \perp AD$, lại có $CE \perp SA$



Do đó $CE \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{CSE} = \widehat{\left(SC,(SAD)\right)} = 30°$.

Lại có: $SC\sin 30° = CE = a \Rightarrow SC = 2a$

$\Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Do $CE = \dfrac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C

suy ra $AC \perp CD$, dựng $AF \perp SC$.

Ta có: $d\left(A,(SCD)\right) = AF = \dfrac{SA.SC}{SC} = a$.

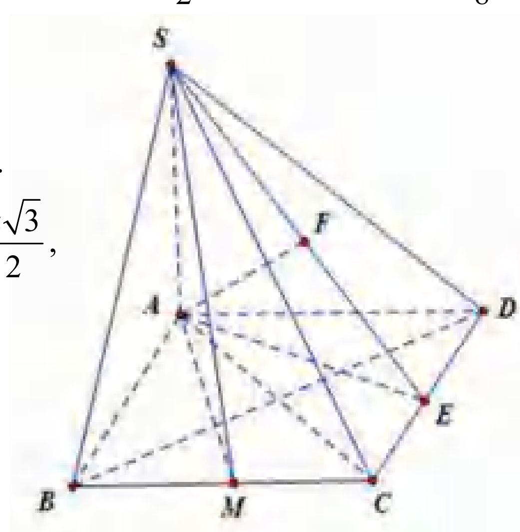
Câu 190. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $BAD = 120°$. Cho $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC; biết $SMA = 45°$. Tính $d\left(B,(SDC)\right)$?

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$

HD. Chọn đáp án A

Do $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120°$

Nên tam giác ABC và ACD là các tam giác đều.



Khi đó $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, dựng $AE \perp CD \Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

dựng $AF \perp SE$ suy ra $d\left(A,(SCD)\right) = AF$.

Do $\widehat{SMA} = 45° \Rightarrow SA = AM\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

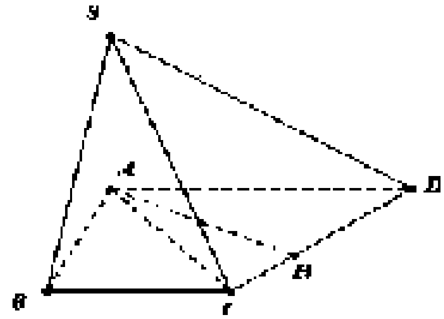
Mặt khác

$$AB//CD \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right) = AF = \frac{SA.SE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Câu 191. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A, B*. Biết $AB = a, BC = a$, $AD = 3a$, $SA = a\sqrt{2}$. Khi $SA \perp (ABCD)$, khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA, CD* là:

A. $\frac{a}{5}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{3a}{\sqrt{5}}$

HD. Chọn đáp án D



Kẻ $AH \perp CD$ mà $SA \perp AH \Rightarrow AH = d(SA, CD)$

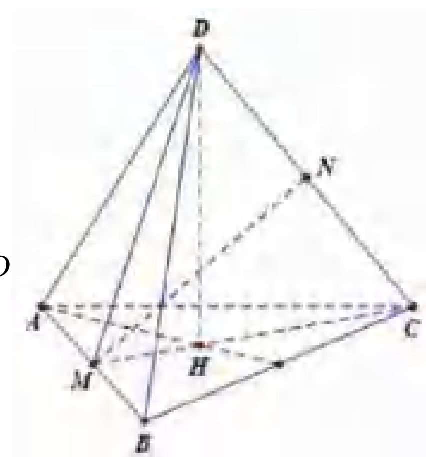
Ta có $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{2}AH.CD$.

$$\Rightarrow AH = \frac{AB.AD}{CD} = \frac{a.3a}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} \Rightarrow d(SA, CD) = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

Câu 192. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh $a\sqrt{3}$. Độ dài khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *CD* là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

HD. Chọn đáp án B



Ta có $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDM)$

Kẻ $MN \perp CD \Rightarrow AB \perp MN$ do $AB \perp (CDM)$

$\Rightarrow MN$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*

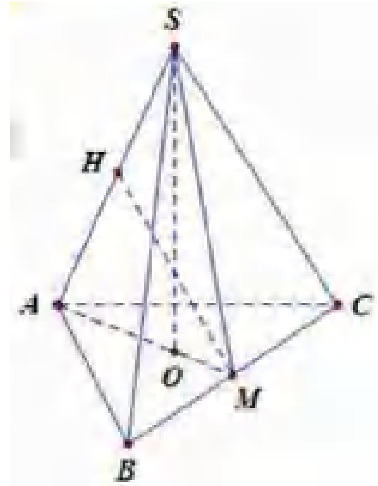
Ta có $CM = \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$ và $CN = \frac{1}{2}CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow MN = \sqrt{CM^2 - NC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Câu 193. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *BC* bằng $\frac{3a}{4}$. Tính *b* theo *a*.

A. $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$ **B.** $b = a$ **C.** $b = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ **D.** $b = \frac{2a}{3}$

HD. Chọn đáp án C



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BC$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SAM)$, kẻ $MH \perp SA$

nên MH là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Suy ra $d(SA;BC) = MH = \dfrac{3a}{4}$.

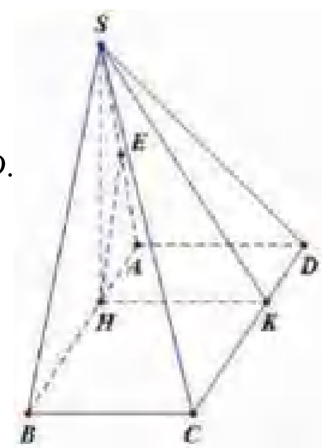
Ta có $\sin\widehat{MAH} = \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{3a}{4} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MAH} = 60°$.

Mà $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\widehat{SAO} = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 194. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3AD$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm $H \in AB$ sao cho $BH = 2AH$. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAD) bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $SH = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SH và CD.

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

HD. Chọn đáp án A



Kẻ $HK \perp CD, K \in CD$ và $HE \perp SA, E \in SA$.

Có $\begin{cases} SH \perp HK \\ CD \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của SH và CD.

Ta có $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp HE \Rightarrow HE \perp (SAD)$.

Suy ra $d(H;(SAD)) = HE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

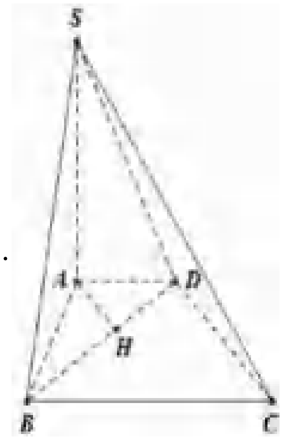
Mà $\dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = 1 \Rightarrow AH = 1$.

Mặt khác $AB = 3AH = 3AD \Rightarrow AH = AD$ nên tứ giác $AHKD$ là hình vuông, do đó $HK = 1 = d(SH;CD)$.

Câu 195. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, đáy lớn BC. Hai mặt bên $(SAB),(SAD)$ vuông góc với đáy. Cạnh $SA = AB = a$, góc giữa đường thẳng SD và $(ABCD)$ bằng 30°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $d=a\sqrt{3}$ **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án D



$\begin{cases}\{(SAB),(SAD)\}\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD$.

Suy ra $\widehat{(SD;(ABCD))}=\widehat{(SD;AD)}=\widehat{SDA}=30°$.

Xét ΔSAD vuông tại A, có $\tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{AD}\Rightarrow AD=\dfrac{SA}{\tan 30°}=a\sqrt{3}$.

Từ A kẻ $AH\perp BD, H\in BD$ mà $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AH$.

Do đó AH là đoạn vuông góc chung của SA, BD.

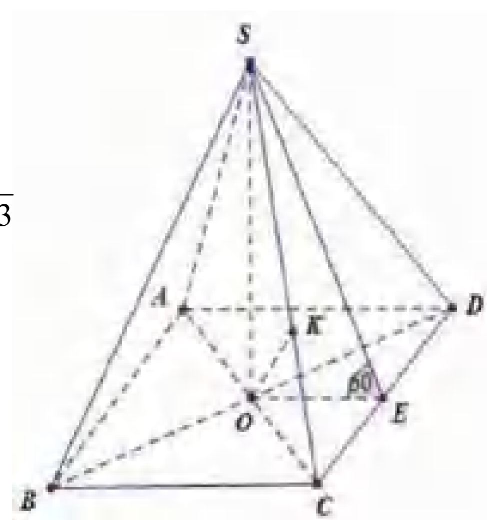
Xét ΔBAD vuông tại A, có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}$.

$\Rightarrow d(SA;BD)=AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 196. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bên $SA=a\sqrt{5}$, mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60°. Khoảng cách giữa BD và SC là:

A. $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

HD. Chọn đáp án A



Ta có: $OE\perp CD\Rightarrow CD\perp(SOE)\Rightarrow\widehat{SEO}=60°$

+) Đặt $AB=2x\Rightarrow OA=x\sqrt{2}, OE=x$

+) $\tan 60°=\dfrac{SO}{OE}=\dfrac{\sqrt{SA^2-OA^2}}{OE}=\dfrac{\sqrt{5a^2-2x^2}}{x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 5a^2=5x^2\Rightarrow x=a\Rightarrow AB=2a, SO=a\sqrt{3}$

Ta có: $BD\perp(SAD)$.

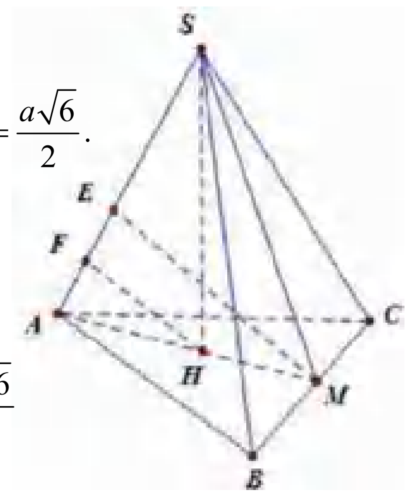
Dựng $OK\perp SC\Rightarrow d(BD;SC)=OK$

Ta có: $OK=\dfrac{SO.OC}{\sqrt{SO^2+OC^2}}=a\sqrt{\dfrac{6}{5}}=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Câu 197. Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy là tam giác vuông cân tại *A* có $AB = AC = 2a$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* xuống đáy là trung điểm của *AM*. Biết *SA* tạo với đáy góc 60°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng *BC* và *SA* là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án B



Gọi *H* là trung điểm của *AM* khi đó $BC = 2a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow HA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SH = HA\tan 60° = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Dựng $ME \perp SA$. Do $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp ME$

Do đó *ME* là đường vuông góc chung của *BC* và *SA*.

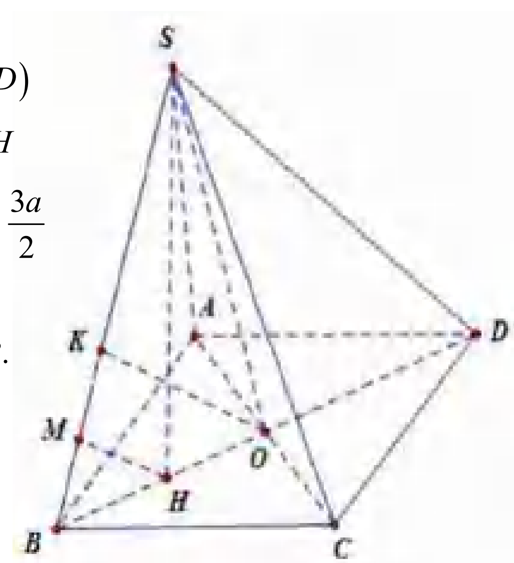
<u>Cách 1:</u> $ME.SA = SH.AM \Rightarrow ME = \frac{SH.AM}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

<u>Cách 2:</u> Dựng $HF \perp SA$ suy ra $ME = 2HF = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 198. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi có $AC = 2a, BD = 2a\sqrt{3}$ tâm *O*. Hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* xuống mặt đáy trùng với trung điểm của *OB*. Biết tam giác *SBD* vuông tại *S*. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng *AC* và *SB* là:

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{8}$ **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án C



Gọi *H* là trung điểm của *OB* khi đó $SH \perp (ABCD)$

Ta có tam giác *SBD* vuông tại *S* có đường cao *SH*

nên $SH^2 = HB.HD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2}$

Dựng $OK \perp SB$

$\Rightarrow OK$ là đường vuông góc chung của *AC* và *SB*.

Dựng $HM \perp SB \Rightarrow HM = \frac{SH.HB}{\sqrt{SH^2 + HB^2}} = \frac{3a}{4}$

Do đó $d(AC;SB) = OK = 2MH = \frac{3a}{2}$.

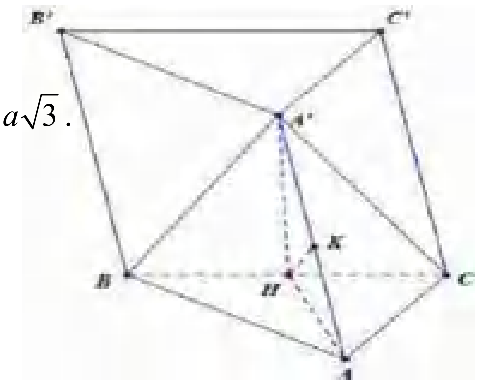
Câu 199. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 2a$; $BAC = 120°$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC theo a.

A. $\frac{3a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án D

Gọi H là trung điểm của BC ta có $\Delta A'BC$ vuông cân tại A' nên ta có: $A'H \perp BC$.

Mặt khác $(A'BC) \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.



Dễ thấy $\widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow HB = AB\sin 60° = a\sqrt{3}$.

Do vậy $BC = 2a\sqrt{3} \Rightarrow A'H = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{3}$.

Do $\begin{cases} AH \perp BC \\ A'H \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH)$.

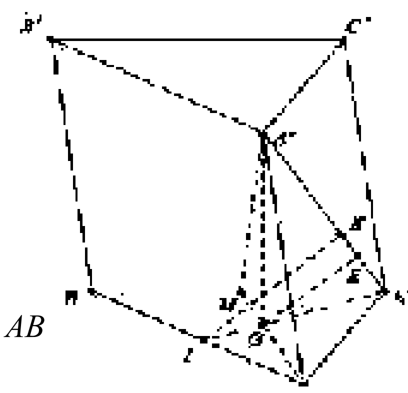
Dựng $HK \perp A'A$ khi đó HK là đường vuông góc chung của BC và $A'A$.

Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 200. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết cạnh bên của khối lăng trụ tạo với đáy góc 60°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $A'C$ là:

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án A



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

Khi đó $A'G \perp (ABC); AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $A'G = GA\tan 60° = a$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} CI \perp AB \\ A'G \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'CI) \perp AB$

Dựng $IK \perp A'C$ do đó IK là đường vuông góc chung của AB và $A'C$.

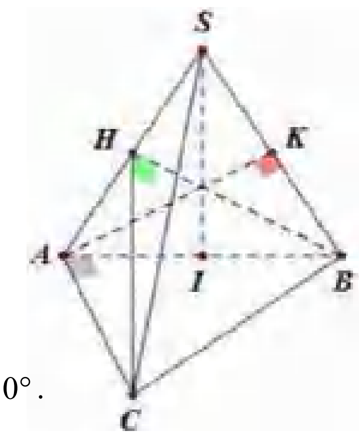
Dựng $GE \perp A'C$. Suy ra $GE = \frac{A'G.GC}{\sqrt{A'G^2 + GC^2}} \frac{a}{2} \Rightarrow IK = \frac{3}{2}GE = \frac{3a}{4}$.

Câu 201. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Tam giác (SAB) đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (SAC) góc 30°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

A. $BC = a\sqrt{2}$ **B.** $BC = 2a$ **C.** $BC = a\sqrt{3}$ **D.** $BC = 3a$

HD. Chọn đáp án C

I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp AC$.



Mà $AC \perp AB \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SB$.

Gọi K là trung điểm của $SB \Rightarrow AK \perp SB$

$\Rightarrow AK$ là đoạn vuông góc chung của AC, SB

nên $d(SB;AC) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = a$.

Gọi H là trung điểm của $SA \Rightarrow BH \perp SA$. Mà $AC \perp BH$.

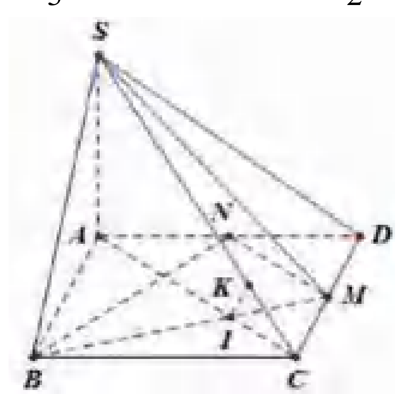
Suy ra $BH \perp (SAC) \Rightarrow \widehat{(BC;(SAC))} = \widehat{(BC;HC)} = \widehat{BCH} = 30°$.

Ta có $\sin\widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 30°} = a\sqrt{3}$.

Câu 202. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh a, $AB = a\sqrt{2}, BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = BC$. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BM.

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án B



Gọi N là trung điểm của AD suy ra $MN // AC$.

Ta có $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $BN = \frac{3a}{2}$

suy ra ΔBMN vuông.

Do đó $BM \perp MN \Rightarrow BM \perp AC \Rightarrow BM \perp (SAC)$.

Gọi I là giao điểm của AC và BM. Từ I kẻ $IK \perp SC$.

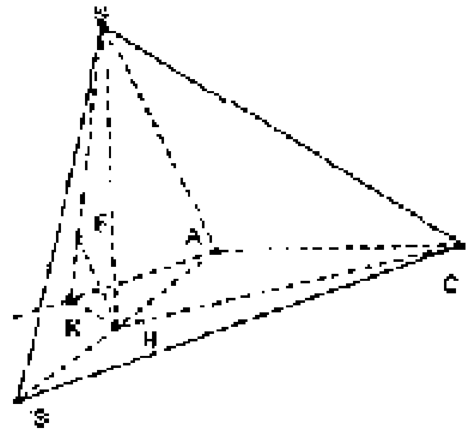
Nên IK là đoạn vuông góc chung SC, $BM \Rightarrow d(SC;BM) = IK$.

Ta có $\Delta SAC \sim \Delta IKC \Rightarrow IK = IC.\frac{SA}{SC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Vậy $d(SC;BM) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 203. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết $SH = a$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BC là:

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ **B.** $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

HD. Chọn đáp án A



+) Dựng $Ax//BC \Rightarrow d(SA,BC) = d(B;SAx)$

+) Dựng $HK \perp Ax \Rightarrow (SHK) \perp Ax$

+) Dựng $HE \perp SK \Rightarrow d(B,SAx) = 2d(H,SAx)$

Ta có: $HK = AH\sin\widehat{HAK} = a\sin 56° = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$d(H,SAx) = HE = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

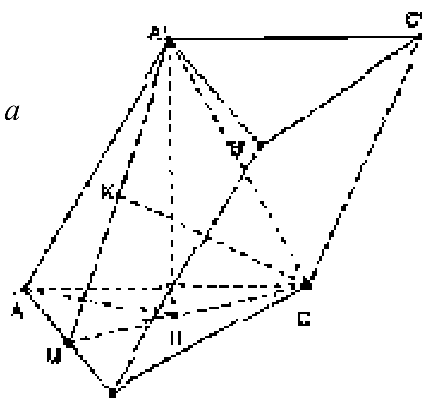
+) Do đó $d(SA,BC) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Câu 204. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh *a*, gọi *M* là trung điểm của *AB*, tam giác $(A'CM)$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích lăng trụ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng *AB* và CC'.

A. $\dfrac{2a\sqrt{57}}{5}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{3}$

HD. Chọn đáp án B

+) Ta có: $\Delta A'CM$ cân tại A'. Dựng $A'H \perp CM \Rightarrow H$ là trung điểm của CM và $A'H \perp (ABC)$.



Khi đó $V = A'H.S_{ABC} = A'H.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = a$

+) $d(AB,CC') = d(CC',A'AB) = d(C,A'AB) = CK$

Vậy $CK = \dfrac{A'H.CM}{A'M} = \dfrac{A'H.CM}{\sqrt{A'H^2 + MH^2}} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$

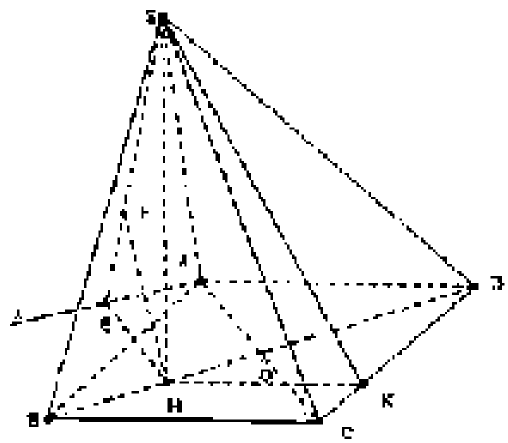
Hoặc có thể tính như sau:

$$d(C',(A'AB)) = 2d(H,(A'AB)) = \frac{2.A'H.MH}{\sqrt{A'H^2 + MH^2}}$$

Câu 205. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 45°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BD là:

A. $\dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{51}}{13}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{38}}{17}$

HD. Chọn đáp án A



+) Dựng $HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK)$

do vậy $\widehat{(SCD, ABCD)} = \widehat{SKH} = 45°$.

Ta có: ΔHKD vuông cân tại K do vậy

$HK = KD = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SH = HK\tan 45° = \dfrac{3a}{2}$.

+) Dựng $Ax // BD$ ta có:

$d(SA, BD) = d(BD, (SAx)) = d(H, (SAx))$

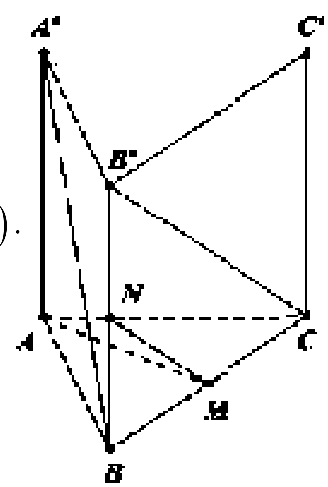
Dựng $HE \perp Ax \Rightarrow HE = OA = a\sqrt{2}$

Dựng $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAx)$. Ta có: $HF = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$

Câu 206. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$ biết $AA' = a\sqrt{2}$.

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$ **D.** $2a$

HD. Chọn đáp án C



Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN // B'C$.

Do đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Mà M là trung điểm của BC nên $d(B, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có BA, BM, BN đôi một vuông góc với nhau.

Nên $\dfrac{1}{d^2(B, (AMN))} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BM^2} + \dfrac{1}{BN^2}$.

Mặt khác $BM = \dfrac{BC}{2} = a, AB = a\sqrt{3}, BN = \dfrac{1}{2}BB' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

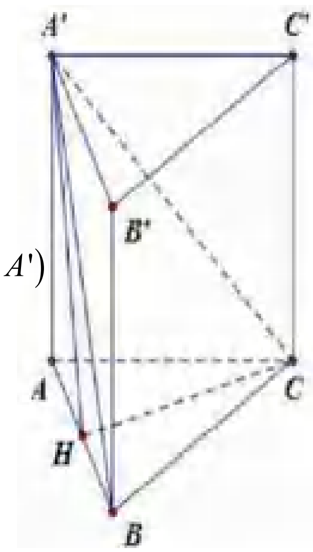
Suy ra $\dfrac{1}{d^2\left(B,\left(AMN\right)\right)}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{10}{3a^2}$.

$\Rightarrow d\left(B,\left(AMN\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}\Rightarrow d\left(AM,B'C\right)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Câu 207. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC=a, BC=2a, ACB=120°$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ góc 30°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B, CC'$.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$

HD. Chọn đáp án B



Kẻ $CH\perp AB\left(H\in AB\right)\Rightarrow CH\perp\left(ABB'A'\right)$.

Nên $A'H$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $\left(ABB'A'\right)$.

Do đó $\widehat{\left(A'C,\left(ABB'A'\right)\right)}=\widehat{CA'H}=30°$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $CC'//AA'\Rightarrow CC'//\left(ABB'A'\right)$

$\Rightarrow d\left(A'B,CC'\right)=d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=CH$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\widehat{BCA}=7a^2\Rightarrow AB=a\sqrt{7}$

$\Rightarrow CH=\dfrac{2.S_{\Delta ABC}}{AB}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}\Rightarrow d\left(A'B,CC'\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

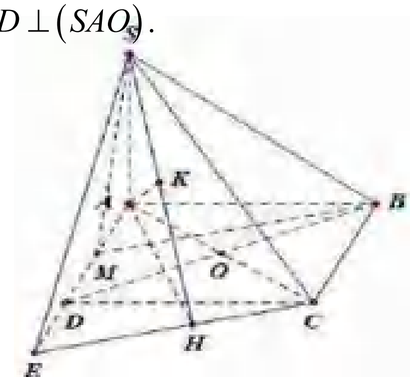
Câu 208. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng $\left(SBD\right)$ tạo với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ một góc bằng 60°. Gọi *M* là trung điểm của *AD*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SC* và *BM*.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{11}}$ **B.** $\dfrac{6a}{\sqrt{11}}$ **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{11}}$ **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{11}}$

HD. Chọn đáp án A

Gọi *O* là tâm của hình vuông *ABCD* $\Rightarrow AO\perp BD\Rightarrow BD\perp\left(SAO\right)$.

Do đó $\widehat{\left(\left(SBD\right),\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SOA}=60°\Rightarrow SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Qua *C* vẽ đường thẳng song song với *BM* cắt *AD* tại *E*.

Khi đó $BM//(SCE) \Rightarrow d(BM,SC) = d(M,(SCE))$

Mà $ME = \frac{2}{3}AE \Rightarrow d(M,(SCE)) = \frac{2}{3}d(A,(SCE))$

Kẻ $AH \perp CE$ tại *H* suy ra $CE \perp (SAH)$ và $AH.CE = CD.AE$.

Kẻ $AK \perp SH$ tại *K* suy ra $AK \perp (SCE) \Rightarrow d(A,(SCE)) = AK$.

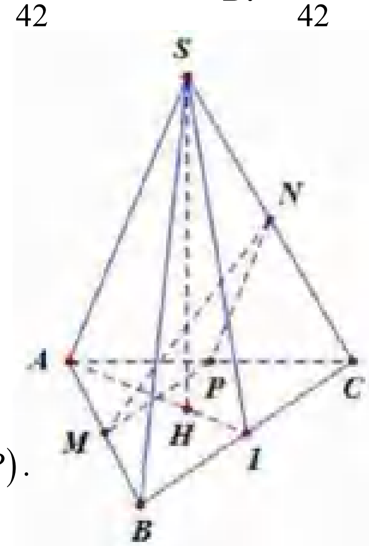
Mà $AH = \frac{3a}{\sqrt{5}}$ nên $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AK = \frac{3a}{\sqrt{11}}$.

Do đó $d(BM,SC) = \frac{2}{3}\frac{3a}{\sqrt{11}} = \frac{2a}{\sqrt{11}}$

Câu 209. Cho hình chóp đều *S.ABC* có độ dài đường cao từ đỉnh *S* đến mặt phẳng đáy (ABC) bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Góc tạo bởi mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60°. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, SC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA, MN*.

A. $\frac{9a\sqrt{3}}{42}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{3}}{42}$ **C.** $\frac{6a\sqrt{3}}{42}$ **D.** $\frac{12a\sqrt{3}}{42}$

HD. Chọn đáp án A



Gọi *H* là tâm của tam giác *ABC*, *I* là trung điểm của *BC*.

Suy ra $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SI,AI)} = \widehat{SIA} = 60°$.

Đặt $AB = x \Rightarrow HI = \frac{1}{3}AI = \frac{x\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \tan 60°.HI = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{7}$.

Gọi *P* là trung điểm của *AC* suy ra $NP//SA \Rightarrow SA//(MNP)$.

$\Rightarrow d(SA,MN) = d(SA,(MNP)) = d(A,(MNP)) = \frac{3V_{A.MNP}}{S_{\Delta MNP}}$.

• $3V_{A.MNP} = d(N,(ABC)) = S_{\Delta AMP} = \frac{9a^3\sqrt{7}}{392}$

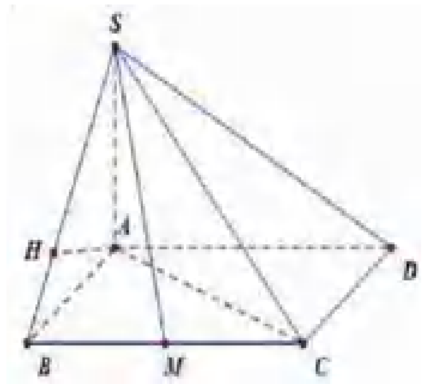
• $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MP.NP = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{7}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{21}}{28}$.

Do đó $d(A,(MNP)) = \frac{9a\sqrt{3}}{42} \Rightarrow d(SA,MN) = \frac{9a\sqrt{3}}{42}$

Câu 210. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SM=\dfrac{3a}{2}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SM và AD là:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **D.** $a\sqrt{2}$

HD. Chọn đáp án C



Lấy H là hình chiếu của A lên SB.

$AB\perp BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

$AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AH$

Ta có: Vì $AD//(SBC)$ chứa SM

$\Rightarrow d(AD,SM)=d\left(AD,(SAB)\right)=d\left(A,(SAB)\right)=AH$

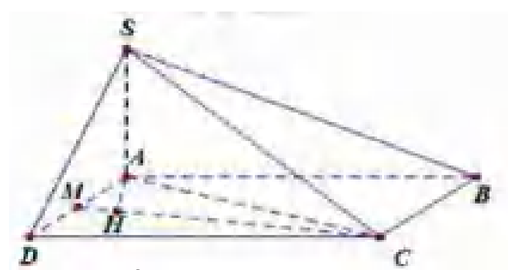
Tính: $AM=\sqrt{BA^2+BM^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow SA=\sqrt{SM^2-AM^2}=a$

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 211. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3a, AD=2a$, $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng CM và SA là:

A. $\dfrac{6a}{\sqrt{13}}$ **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{10}}$ **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{6a}{\sqrt{10}}$

HD. Chọn đáp án B



Lấy H là hình chiếu của A lên MC.

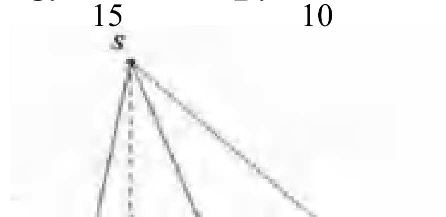
$MC\perp AH\perp SA\Rightarrow d(SA,CM)=AH$

Tính: $CM=\sqrt{DM^2+DC^2}=a\sqrt{10}$

$AH.MC=AM.AC.\sin\widehat{MAC}=AM.AC.\dfrac{CD}{AC}\Rightarrow AH=\dfrac{3a}{\sqrt{10}}$.

Câu 212. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC.

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{20}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{15}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$



HD. Chọn đáp án D

+) Dựng $Bx//AC, AE \perp Bx \Rightarrow (SAE) \perp Bx$

+) Dựng $AF \perp SE \Rightarrow d(AC, SB) = AF$

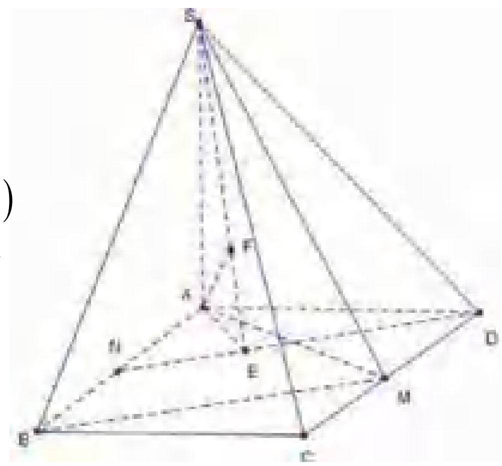
Dựng $BH \perp AC$ dễ thấy $AE = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $AF = \dfrac{AE.SA}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Câu 213. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, biết $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SD và BM là:

A. $\dfrac{2a\sqrt{39}}{3}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{145}}{15}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{145}}{29}$

HD. Chọn đáp án D



Dựng $DN//BM \Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Khi đó $d(SD, BM) = d(BM, (SDN))$

$$= d(B, (SDN)) = d(A, (SDN))$$

Dựng $AE \perp DN \Rightarrow DN \perp (SAE)$, dựng $AF \perp SE$

khi đó $\begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp DN \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SDN)$

Do vậy $d(B, (SDN)) = d(A, (SDN))$

$$= AF = \frac{AE.SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = 2a\sqrt{\frac{5}{29}} = \frac{2a\sqrt{145}}{29}$$

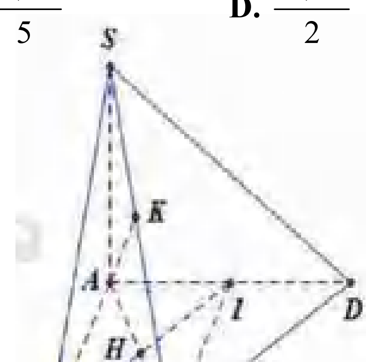
Với $AE = \dfrac{AN.AD}{\sqrt{AN^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 214. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AD, các đường thẳng SA, AC và CD đôi một vuông góc với nhau; $SA = AC = CD = a\sqrt{2}$ và $AD = 2BC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

HD. Chọn đáp án C

Ta có $SA \perp AC, SA \perp CD \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.



Gọi *I* là trung điểm của $AD \Rightarrow AI = BC, AI // BC$ và $CI \perp AD$.

Do đó *ABCI* là hình vuông suy ra $AB \perp AD$.

Có $CD // BI \Rightarrow CD // (SBI) \Rightarrow d(SB, CD) = d(C, (SBI))$

Gọi $H = AC \cap BI$ và $AK \perp SH$ tại *K*.

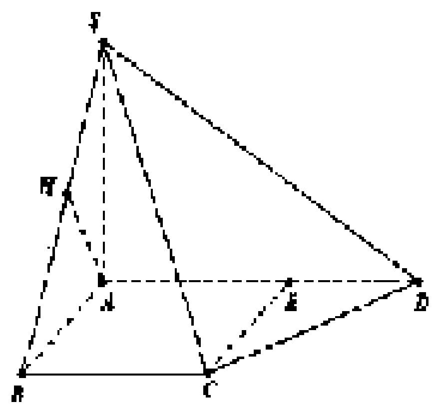
Ta có $AK \perp (SBI) \Rightarrow d(C, (SBI)) = d(A, (SBI)) = AK$.

Nên $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d(C, (SBI)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 215. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B* có $AB = a$, $BC = a$, $CD = a\sqrt{6}$, $SA = a\sqrt{2}$. Khi $SA \perp (ABCD)$ thì khoảng cách giữa *AD* và *SC* là?

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

HD. Chọn đáp án C



Do $AD // BC$

$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$

Kẻ $AH \perp SB$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(AD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 216. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy tam giác đều *ABC* cạnh là *a*, cạnh bên $SA = a$, $SA \perp (ABC)$, *I* là trung điểm của *BC*. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *SI* và *AB* là?

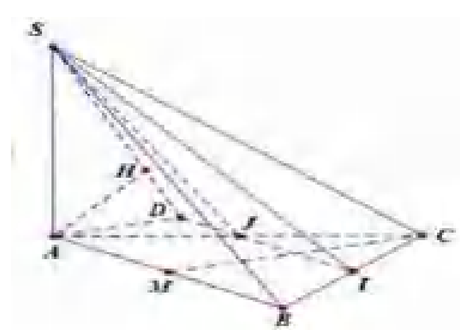
A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$ **C.** $\frac{a\sqrt{23}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{7}$

HD. Chọn đáp án B

Kẻ $IJ // AB \Rightarrow d(SI, AB) = d(AB, (SIJ)) = d(A, (SIJ))$

Kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH = d(A, (SIJ))$

Ta có $AD = \frac{1}{2}MC = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{19}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{57}}{19}$

$\Rightarrow d\left(SI,AB\right)=\frac{a\sqrt{57}}{19}$

Câu 217. Hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *C*. Có $CA=a$, $CB=b$, cạnh $SA=h$ vuông góc với đáy. Gọi *D* là trung điểm cạnh *AB*. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *AC* và *SD* là?

A. $\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$ **B.** $\frac{bh}{\sqrt{b^2+4h^2}}$ **C.** $\frac{ah}{\sqrt{b^2+4h^2}}$ **D.** $\frac{ah}{\sqrt{b^2+2h^2}}$

HD. Chọn đáp án B

Dựng hình bình hành $ACKD\Rightarrow d\left(AC,SD\right)=d\left(AC,\left(SDK\right)\right)=d\left(A,\left(SDK\right)\right)=d$.

+) Kẻ $AP\perp DK\Rightarrow\frac{1}{d^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AP^2}$.

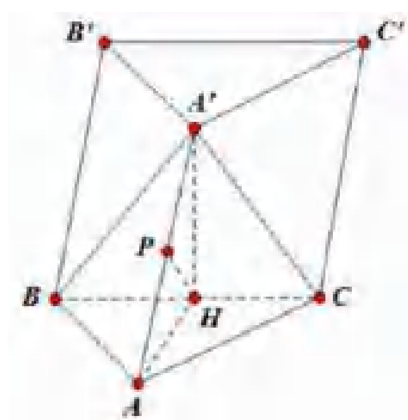
+) Gọi $M=BC\cap DK\Rightarrow ACMP$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AP=CM=\frac{b}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{d^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{4}{b^2}\Rightarrow d=\frac{bh}{\sqrt{b^2+4h^2}}$

Câu 218. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có $AB=AC=2a$; $BC=2a\sqrt{3}$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $\left(ABC\right)$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC là:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

HD. Chọn đáp án D



+) Gọi *H* là trung điểm của cạnh *BC*

$\Rightarrow A'H\perp\left(ABC\right)\Rightarrow A'H\perp HC\Rightarrow HC\perp HA'$.

+) ΔABC cân tại $A\Rightarrow AH\perp HC\Rightarrow\begin{cases}HC\perp HA\\HC\perp HA'\end{cases}$

$\Rightarrow HC\perp\left(A'AH\right)\Rightarrow BC\perp\left(A'AH\right)$

+) Kẻ $HP\perp A'A\left(P\in A'A\right)\Rightarrow BC\perp HP$

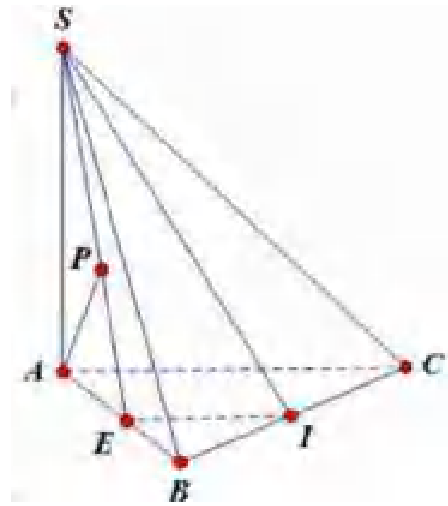
$\Rightarrow HP$ là đường vuông góc chung của $A'A$ và $BC\Rightarrow d\left(A'A,BC\right)=HP$.

+) $\Delta A'BC$ vuông cân tại $A'\Rightarrow A'H=\frac{BC}{2}=a\sqrt{3}$.

+) Cạnh $HA=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$

Câu 219. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A* và *SA* vuông góc với mặt phẳng (ABC). $AB=AC=SA=2a$. Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Tính theo *a* khoảng cách giữa hai đường thẳng *SI, AC*.

A. $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$



HD. Chọn đáp án B

+) Gọi *E* là trung điểm của cạnh

$AB\Rightarrow AC//IE\Rightarrow AC//(SEI)$

$\Rightarrow d(AC,SI)=d(AC,(SEI))=d(A,(SEI))$

+) $\begin{cases}AC//IE\\AC\perp AE\end{cases}\Rightarrow IE\perp AE$,

kẻ $AP\perp SE\,(P\in SE)$

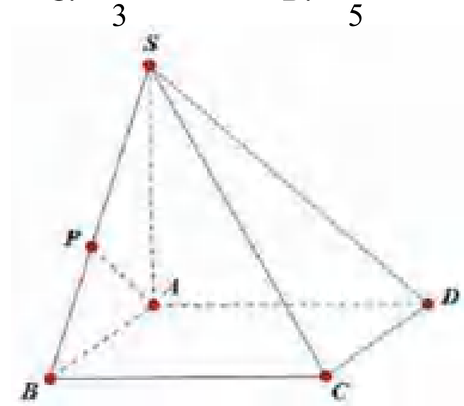
$\Rightarrow d(A,(SEI))=AP\Rightarrow d(AC,SI)=AP$

Ta có

$$\frac{1}{AP^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow AP=\frac{2a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow d(AC,SI)=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Câu 220. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng *SB* và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo *a* khoảng cách giữa hai đường thẳng *SB, AD*.

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$



HD. Chọn đáp án B

+) $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$

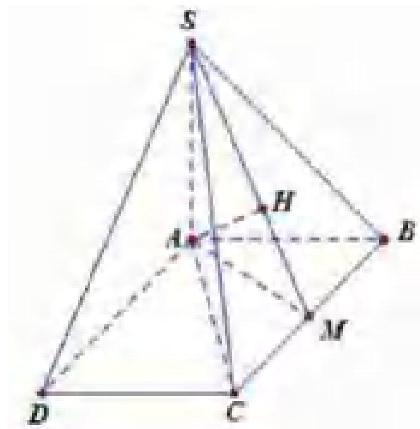
$\Rightarrow\widehat{(SB,(ABCD))}=\widehat{SBA}=60°$

+) $AD//BC\Rightarrow AD//(SBC)\Rightarrow d(AD,SB)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$

+) Ta có $AB\perp BC$, kẻ $AP\perp SB\,(P\in SB)\Rightarrow d(A,(SBC))=AP\Rightarrow d(AD,SB)=AP$.

Câu 221. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ tâm O tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$, $SA \perp (ABCD)$. Đường thẳng SD tạo với đáy một góc 45°. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AD và SB là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{10}$ **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$



HD. Chọn đáp án D

Lấy M là trung điểm BC, H là hình chiếu của A lên SM.

Xác định được $\widehat{(AD,(ABCD))} = \widehat{SDA} = 45°$

$SA \perp BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

$AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$

Vì $AD//(SBC)$ chứa BC nên:

$d(SB,AD) = d(AD,(SBC)) = d(A,(SBC)) = AH$

Tính: $SA = AD = a\sqrt{2}, AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

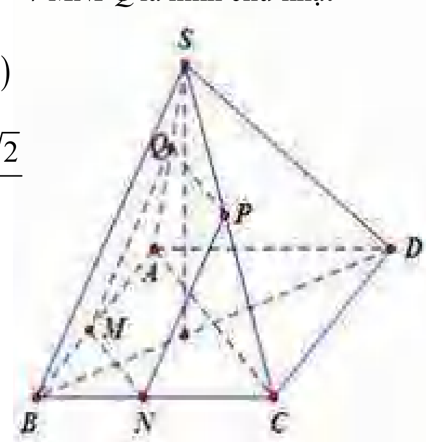
Câu 222. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M song song với AC và SB cắt BC, SC, SA, lần lượt tại N, P, Q. Xác định x để lớn S_{MNPQ} nhất.

A. a **B.** $\frac{a}{4}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

HD. Đáp án C

$\frac{QM}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{NP}{SB} \Rightarrow QM = NP$ và $QM//NP \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có: $SA = SC \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SB \Rightarrow MN \perp NP \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật



Ta có: $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Leftrightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \Leftrightarrow MN = \sqrt{2}(a-x)$

$\frac{MQ}{SB} = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow MQ = \frac{bx}{a} \Rightarrow S_{MNPQ} = MQ.MN = \frac{bx(a-x)\sqrt{2}}{a}$

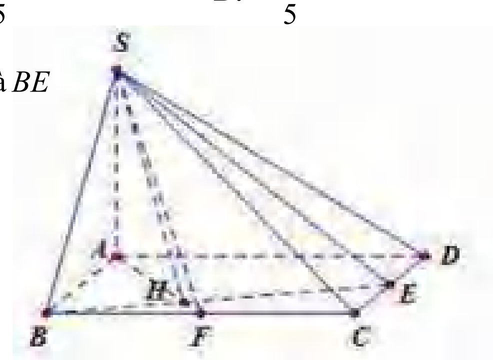
$S_{MNPQ} = \frac{bx(a-x)\sqrt{2}}{a} \le \frac{b\sqrt{2}}{a} \times \frac{(x+a-x)^2}{4} = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Câu 223. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$) và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Đáp án D



Gọi F là trung điểm BC, gọi H là giao điểm của FA và BE

Ta chứng minh được $AF \perp BE$

Lại có $BE \perp SA \Rightarrow BE \perp (AFS) \Rightarrow BE \perp SH$

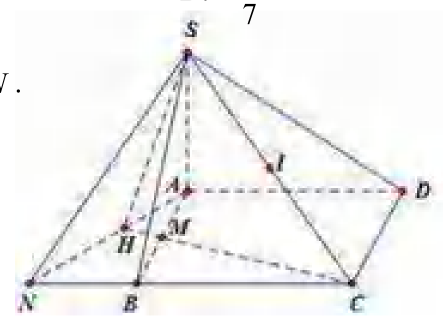
Tính $AF = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, AH.AF = AB^2$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 + HA^2} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Câu 224. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD,) SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{17}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$

Đáp án C



Kẻ đường thẳng A vuông góc với CM tại H, cắt BC tại N.

Ta có: $NB.NC = NH.NA = (NA - HA)NA = NA^2 - AH.AN$

$\Leftrightarrow NB.(NB + BC) = NA^2 - AM.AB$

$\Leftrightarrow AM.AB + NB.BC = NA^2 - NB^2$

$\Leftrightarrow AB\left(\dfrac{AB}{2} + NB\right) = AB^2 \Leftrightarrow NB = \dfrac{AB}{2}$

Vì $SA \perp CH \perp AN \Rightarrow CH \perp (SAN) \Rightarrow CH \perp SH \Rightarrow d(S, CM) = SH$

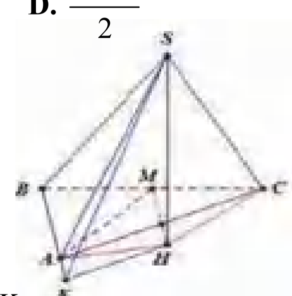
Tính $AH.AN = AM.AB \Leftrightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

Mà $SC = 2IC \Rightarrow d(S, CM) = 2d(I, CM) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Câu 225. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, BC = 2a, ABC = 60°$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$. Khoảng cách từ S đến cạnh AB là:

A. $\dfrac{a\sqrt{17}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$

Đáp án B



+) vì $SA = SC = SM$ nên hình chiếu H của S lên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ H kẻ đường thẳng vuông góc AB tại K.

Vì $AC // HK$ và $MH // BK$ nên $HK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

+) Vì $SH \perp BK \perp HK \Rightarrow BK \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK \Rightarrow d(S, (AB)) = SK$

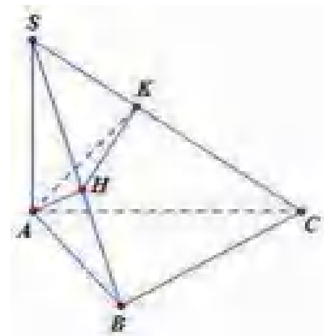
+) Vì $\widehat{AMH} = \widehat{BAM} = 60° \Rightarrow \Delta AMH$ đều $AH = AM = \dfrac{BC}{2} = a$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a \Rightarrow SK = \sqrt{SH^2 - KH^2} = \dfrac{a\sqrt{19}}{2}$

Câu 226. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BA = a$, $BC = 2a, SA = 2a, SA \perp (ABC)$. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB,SC*. Tính khoảng cách từ điểm *K* đến mặt phẳng (*SAB*)

A. $\dfrac{8a}{9}$ **B.** $\dfrac{a}{9}$ **C.** $\dfrac{2a}{9}$ **D.** $\dfrac{5a}{9}$

Đáp án A



$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 3a$

$\dfrac{S_{SAH}}{S_{SBA}} = \left(\dfrac{SA}{SB}\right)^2 = \dfrac{4}{5} \Rightarrow S_{SAH} = \dfrac{4S_{SBA}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4a^2}{5}$

$SH.SB = SK.SC = SA^2 \Rightarrow SH = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}, SK = \dfrac{4a}{3}$

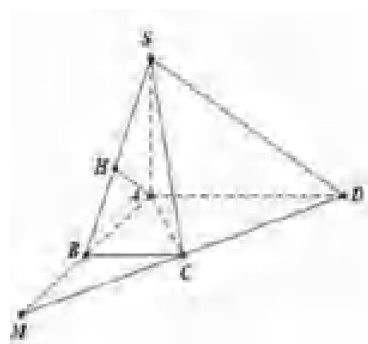
$\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SC} = \dfrac{16}{45}$

$\Rightarrow V_{S.AHK} = \dfrac{16V_{S.ABC}}{45} = \dfrac{32a^3}{135} = \dfrac{d\left(K,(SAB)\right)S_{SAH}}{3} \Rightarrow d\left(K,(SAB)\right) = \dfrac{8a}{9}$

Câu 227. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90°$, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên *SB*. Tính (theo *a*) khoảng cách từ *H* đến mặt phẳng (*SCD*)

A. $\dfrac{5a}{3}$ **B.** $\dfrac{4a}{3}$ **C.** $\dfrac{2a}{3}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Đáp án D



Gọi *M* là giao điểm của *CD* và *AB*.

Ta có $AD = 2a, AC = CD = a\sqrt{2} \Rightarrow AC \perp DC$

Lại có $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC)$ với $d = d\left(A,(SCD)\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow d = a$

Vì $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a}{2}$

Từ $SH.SB = SA^2 \Rightarrow SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{HS}{BS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{2d\left(B,(SCD)\right)}{3} = \dfrac{a}{3}$

Câu 228. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác *ABC* vuông tại $A, AB = AC = a$, *I* là trung điểm của *SC*, hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (*ABC*) là trung điểm *H* của *BC*, mặt phẳng (*SAB*) tạo với đáy một góc bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm *I* đến mặt phẳng (*SAB*) theo *a*.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{a}{4}$

Đáp án C

Gọi M là trung điểm AB và K là hình chiếu của H lên SM

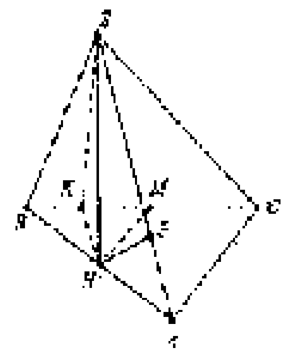
Ta xác định $\left(\widehat{(SAB)(ABC)}\right) = \widehat{SMH} = 60°$ nên từ $MH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{MH\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có $HI // SB \subset (SAB) \Rightarrow d(I,(SAB)) = d(H,(SAB)) = HK$

Câu 229. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 2a, AC = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $30°$. Tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh BC đến mặt phẳng (SAC)

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{3a}{5}$

Đáp án C



Ta có $d(A;BC) = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = a\sqrt{3}$

Dựng $HK \perp BC$. Khi đó $d(H;BC) = HK = \dfrac{1}{2}d(A;BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $\begin{cases} HK \perp BC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SKH) \Rightarrow \widehat{SKH} = \left(\widehat{SBC;ABC}\right) = 30°$

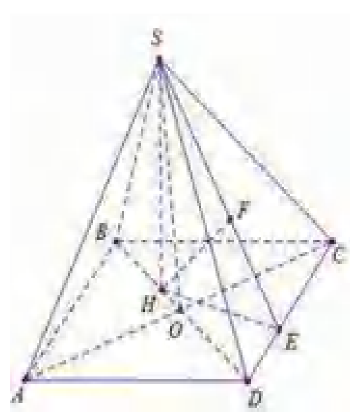
Suy ra $SH = HK\tan 30° = \dfrac{a}{2}$. Dựng $HE \perp SA$ khi đó $HE \perp (SAC)$

Do $HM // AC \Rightarrow d(M(SAC)) = d_H = HE = \dfrac{SH.HA}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Câu 230. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc BAC bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ($ABCD$) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 2DB$. Đường thẳng SO tạo với mặt phẳng ($ABCD$) góc $60°$ với O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. $\dfrac{3a\sqrt{7}}{15}$ **B.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{11}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{7}}{15}$

Đáp án B



Dễ thấy tam giác ABC đều và H là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Mặc khác $\widehat{SOH} = 60°$

Suy ra $SH = OH\tan 60° = \dfrac{a}{2}$. Do $BD = \dfrac{3}{2}BH \Rightarrow d_B = \dfrac{3}{2}d_H$

Dựng $HE \perp CD; HF \perp SE$ khi đó $d_H = HF$

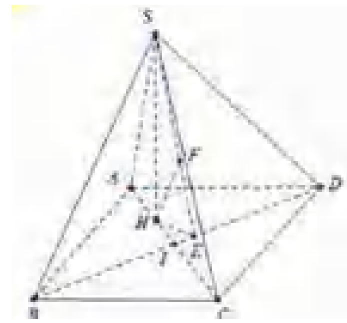
Lại có $HD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HE = HD\sin\widehat{BDC} = HD\sin 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $d_B = \dfrac{3}{2}.HE = \dfrac{3}{2}.\dfrac{HE.SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$

Câu 231. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật tâm I, có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm AI. Biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAC vuông tại S. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD)

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{11}}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{13}}$ **C.** $\dfrac{3a}{\sqrt{15}}$ **D.** $\dfrac{5a}{\sqrt{17}}$

Đáp án C



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

Khi đó $HA = \dfrac{a}{4}; HC = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow SH^2 = HA.HC \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Do $CI = 2HI \Rightarrow d_C = 2d_H$

Dựng $HE \perp BD; HF \perp SE$

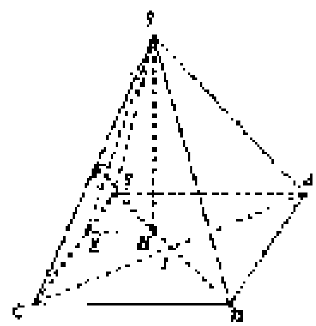
khi đó $d_C = 2d_H = 2HF = 2.\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}}$

Mặc khác $HE = d\left(H;BD\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A;BD\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $d_C = \dfrac{3a}{\sqrt{15}}$

Câu 232. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu của *S* lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác *ABC*. Góc giữa đường thẳng *SB* và mặt phẳng (*ABCD*) bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (*SBC*)

A. $\dfrac{3a\sqrt{7}}{15}$ **B.** **C.** **D.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$

Đáp án D



Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 3a$ suy ra $HB = \dfrac{BD}{3} = a$

Do $SH \perp \left(ABC\right) \Rightarrow \left(\widehat{SB;\left(ABC\right)}\right) = \widehat{SBH} = 60°$

Suy ra $SH = HB\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng $HE \perp BC; HF \perp SE$ khi đó

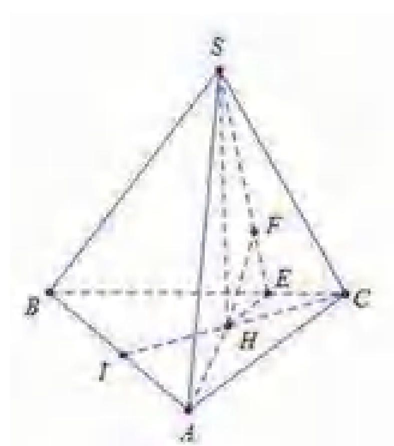
Do $AD // BC \Rightarrow d_A = d_B = 3d_H = 3HF$

Mặc khác $HE = \dfrac{CD}{3} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow d_A = 3HF = 3.\dfrac{HE.SH}{\sqrt{HE^2 + SH^2}} = \dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$

Câu 233. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC, BC = a\sqrt{3}, BAC = 120°$. Gọi *I* là trung điểm cạnh *AB*. Hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt phẳng đáy là trung điểm *H* của *CI*, góc giữa đường thẳng *SA* và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (*SBC*)

A. $\dfrac{4a\sqrt{37}}{37}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{37}}$ **C.** $\dfrac{3a\sqrt{37}}{37}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{37}}{37}$

Đáp án C



Đặt $AB = AC = x \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120°}$

Do đó $BC = x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = x$.

Dựng $HE \perp BC; HF \perp SE$ khi đó $d\left(HI\left(SBC\right)\right) = HF$.

Mặt khác $d_A = 2d_I = 4d_H = 4HF$

Lại có: $HE = \dfrac{1}{4}d\left(A;BC\right)\dfrac{1}{4}.AB\sin 30° = \dfrac{a}{8}$.

Mặc khác $CI = \sqrt{AI^2 + AC^2 = 2IA.AC.\cos 120} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

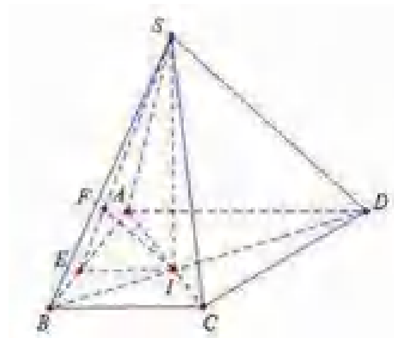
Do đó $AH^2 = \dfrac{AI^2 + AC^2}{2} - \dfrac{IC^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{4}$

Do đó $d_A = 4HE - 4.\dfrac{HE.SH}{\sqrt{HE^2.SH^2}} = \dfrac{3a\sqrt{37}}{37}$

Câu 234. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu của S lên mặt phẳng ($ABCD$) trung với giao điểm I của AC và BC. Mặt bên (SAB) hợp với đáy một góc $60°$. Biết rằng $AB = BC = a, AD = 3a.$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) theo a.

A. $\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\dfrac{3a}{4}$ **C.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{7}$ **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$

Đáp án D



Theo Talet ta có: $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{3}$

Khi đó $\dfrac{IE}{AD} = \dfrac{IB}{BD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow IE = \dfrac{3a}{4}$.

Dựng $HE \perp AB; HF \perp SE$

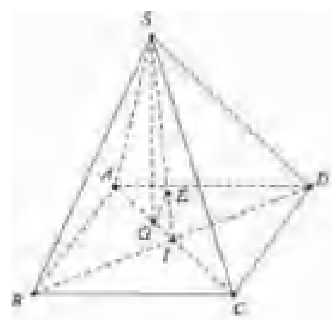
Suy ra $d\left(I,(SAB)\right) = HF = IE\sin 60° = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$

Lại có $d_D = 4d_I = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$

Câu 235. Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a, $ABC = 120°$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G, lấy điểm S sao cho $ASC = 90°$. Tính khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{17}}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{37}}$

Đáp án B



Do $\widehat{ABC} = 120°$ nên dễ dàng suy ra $30°$ là tam giác đều

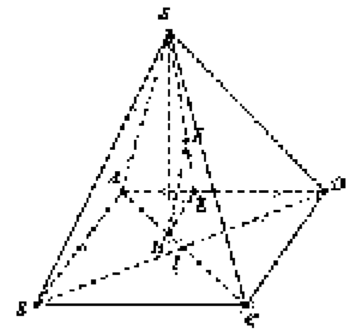
Khi đó $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; GC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $SG = \sqrt{GA.GC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Do $AC \perp BD$ nên ta cần dựng

$GE \perp SI$ suy ra $d\left(G,(SBD)\right) = GE = \dfrac{GI.SG}{\sqrt{GI^2.SG^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{9}$

Câu 236. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$ **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$



Đáp án C

Ta có $AC = BD = 2a; SC^2 = AC.HC \Rightarrow HC = \frac{3a}{2} \Rightarrow HA = \frac{a}{2}$

Suy ra $SH = \sqrt{HA.HC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặc khác $BC//AD \Rightarrow d\left(B,\left(SAD\right)\right) = d\left(C,\left(SAD\right)\right)$

Lại có $CA = 3HA \Rightarrow d_C = 4d_H$. Dựng $HE \perp AD; HF \perp SE$.

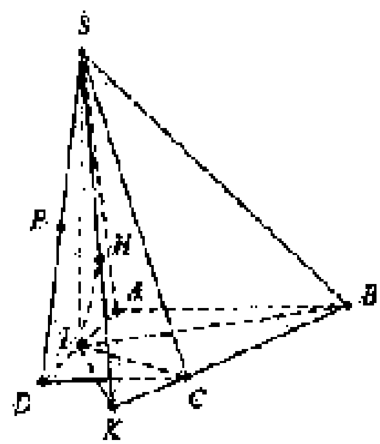
Có $HE = HA\sin 45° = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

Khi đó $d_C = 4d_H = 4\frac{HE.SH}{\sqrt{HE^2.SH^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 237. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a, AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính theo khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{a\sqrt{17}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{20}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{19}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$

Đáp án B



Ta có $\begin{cases}\left(SBI\right) \perp \left(ABCD\right)\\ \left(SCI\right) \perp \left(ABCD\right)\\ \left(SBI\right) \perp \left(SCI\right) = SI\end{cases} \Rightarrow SI \perp \left(ABCD\right)$

Gọi P là trung điểm của cạnh SD

$d\left(P,\left(SBC\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(D,\left(SBC\right)\right) = \frac{1}{2}.\frac{3V_{D.SBC}}{S_{SBC}}$ (1)

Kẻ $IK \perp BC$ tại $K \Rightarrow \left(\widehat{\left(SBC\right);\left(ABCD\right)}\right) = \widehat{SKI} = 60°$

$\tan 60° = \frac{SI}{IK} = \sqrt{3} \Rightarrow SI = IK\sqrt{3}$

Ta có $S_{IBC} = \frac{1}{2}IK.BC = S_{ABCD} - S_{IAB} - S_{ICD} = \frac{1}{2}a\left(a+3a\right) - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.3a - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a = a^2 \Rightarrow IK = \frac{2a^2}{BC}$

Mà $BC^2 = AD^2 + \left(AB - CD\right)^2 = a^2 + \left(3a - a\right)^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Mà $S_{BCD} = S_{ABCD} = S_{ABD} = \frac{1}{2}a\left(a+3a\right) = \frac{1}{2}a.3a = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{D.SBC} = V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{\sqrt{15}}$

Ta có $\cos 60° = \frac{IK}{SK} = \frac{1}{2} \Rightarrow SK = 2IK = \frac{4a}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2}SK.BC = \frac{1}{2}.\frac{4a}{\sqrt{5}}.a\sqrt{5} = 2a^2$

Thế vào $\left(1\right) \Rightarrow d\left(P;\left(SBC\right)\right) = \frac{3}{2}\frac{\frac{a^3}{\sqrt{15}}}{2a^2} = \frac{3a}{4\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{20}$

Câu 238. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ($ABCD$), biết $SD = 2a\sqrt{5}$,

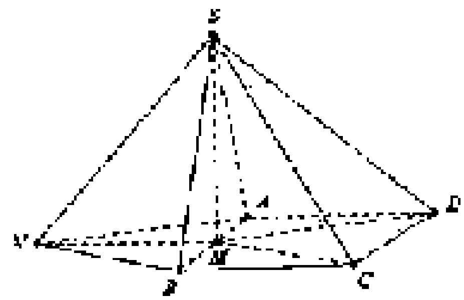
SC tạo với mặt đáy ($ABCD$) một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SA.

A. $\frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{79}}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{79}}$

Đáp án C

Đặt $AB = BC = CD = DA = 2x > 0$.

Ta có ngay $SM \perp (ABCD)$



$\Rightarrow \widehat{SCM} = 60° \Rightarrow \tan 60° = \frac{SM}{MC} = \sqrt{3}$

Cạnh $CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5}$

$\Rightarrow SM = x\sqrt{15}$

Canh $MD = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5}$

Từ $SD^2 = SM^2 + MD^2$

$\Rightarrow 15x^2 + 5x^2 = 20x^2 \Rightarrow x = a$

Dựng hình hình hành $ADMN$ như hình vẽ $DM // (SAN) \Rightarrow d(DM;SA) = d(M;(SAN)) = h$

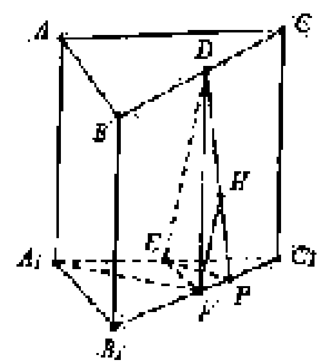
Tứ diện vuông $\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{MS^2} + \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MN^2} = \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow h = a\sqrt{\frac{60}{79}} = 2a\sqrt{\frac{15}{79}}$

Câu 239. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có các mặt bên là các hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A_1C_1, B_1C_1. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và A_1F.

A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{17}}$ **C.** $\frac{a\sqrt{17}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{2}$

Đáp án B

Ta có $\begin{cases} BB_1 \perp A_1B_1 \\ BB_1 \perp B_1C_1 \end{cases} \Rightarrow BB_1 \perp (A_1B_1C_1)$



Kẻ $EP // A_1F \left(P \in B_1C_1\right) \Rightarrow A_1F // (DEP)$

$\Rightarrow d(A_1F; DE) = d(F;(DEP)) = h$

Bài ra D và F lần lược là trung điểm của các cạnh BC và B_1C_1

$\Rightarrow DF // BB_1 \Rightarrow DF \perp (A_1B_1C_1)$

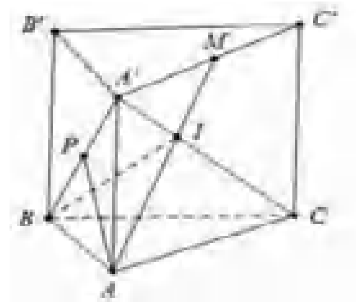
Tam giác PEF vuông tại P, kẻ $FH \perp DP$ tại $H \Rightarrow h = FH$

$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{DF^2} + \frac{1}{FP^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{17}}$

Câu 240. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a.$ Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C', I$ là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC)

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$

Đáp án D



Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C' \Rightarrow A'A \perp (ABC)$

Ta có $d = d(A;(IBC)) = d(A;A'BC)$

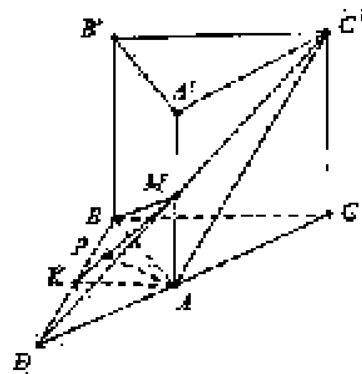
Kẻ $AP \perp A'B (P \in A'B) \Rightarrow d(A;A'BC) = AP \Rightarrow d = AP$

$\Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Câu 241. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *M* trung điểm của cạnh *AA'*, biết $BM \perp AC'$. Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (*BMC'*).

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Đáp án B



Lăng trụ tam giác đều $A'A \perp (ABC)$

Gọi $D = C'M \cap CA \Rightarrow d = d(C;(BMC')) = d(C;(MBD))$

Ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{AM}{CC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow CD = 2AD$

$\Rightarrow d(C;(MBD)) = 2d(A;(MBD)) \Rightarrow d = 2d(A;(MBD))$

Kẻ $AK \perp BD (K \in BD), AP \perp MK (P \in MK) \Rightarrow d = 2AP$

Tam giác ABD cân tại $A \Rightarrow \cos 60° = \frac{AK}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AK = \frac{a}{2}$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A'A} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC'} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A'A}\right) = -\frac{1}{2}A'A^2 + AB.AC\cos 60° = \frac{a^2}{2} - \frac{A'A^2}{2}.$

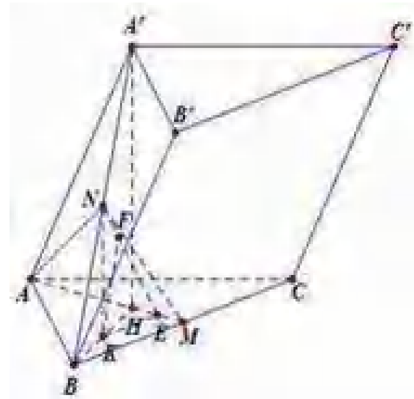
Bài ra $MB \perp AC' \Rightarrow \overrightarrow{MB}\overrightarrow{AC'} = 0 \Rightarrow A'A = a \Rightarrow AM = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow AP = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Câu 242. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C', \Delta ABC$ đều có cạnh bằng $a, AA' = a$ và đỉnh *A'* cách đều *A, B, C*. Gọi *M N* , lần lượt là trung điểm của cạnh *BC* và *A'B* . Tính theo *a* khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (*AMN*).

A. $\frac{a\sqrt{5}}{23}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{33}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{22}$ **D.** $\frac{a\sqrt{22}}{11}$

Đáp án D



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ta có $\begin{cases} A'A = A'B - A'C \\ HA = HB = HC \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

Qua N kẻ đường thẳng song song với $A'H$ cắt AM tại K

$NK \perp (ABC)$ Kẻ $KE \perp AM.FK \perp NE$

Ta có $d(C;(AMN)) = d(\mathrm{B};(AMN)) = 2d(\mathrm{K};(AMN))$

Ta có $\begin{cases} AM \perp KE \\ AM \perp NK \end{cases} \Rightarrow AM \perp (NKE) \Rightarrow AM \perp KF$

Mà $KF \perp NE \Rightarrow KF \perp (AMN) \Rightarrow KF \perp d(\mathrm{K};(AMN))$

Ta có $AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 = AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

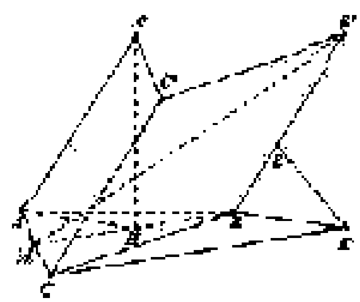
$\Rightarrow NK = \dfrac{1}{2}A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ Ta có $KE = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{4}BC = \dfrac{a}{4}$. Xét ΔKEN ta có $\dfrac{1}{KF^2} = \dfrac{1}{KE^2} + \dfrac{1}{KN^2}$

$\Rightarrow KF = \dfrac{a\sqrt{22}}{22} \Rightarrow d(\mathrm{K};(AMN)) = \dfrac{a\sqrt{22}}{22} \Rightarrow d(\mathrm{C};(AMN)) = 2d(\mathrm{K};(AMN)) = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$

Câu 243. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, ACB = 30°; M$ là trung điểm cạnh *AC*. Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy của lăng trụ bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh *A′* lên mặt phẳng (*ABC*) là trung điểm *H* của *BM*. Tính theo *a* khoảng cách từ *C′* đến mặt phẳng (*BMB′*).

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{3a}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Đáp án C



Ta có $AA' \cap (ABC) = \{A\}$ và $A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow \left(\widehat{AA',(ABC)}\right) = \left(\widehat{AA',AH}\right) = \widehat{A'HA} = 60°$

Do $AB = a, \widehat{ACB} = 30° \Rightarrow BC = a\sqrt{3}, AC = 2a, AH = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\tan\widehat{A'AH} = \dfrac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = \dfrac{3a}{2}$

Qua B kẻ $Bx // A'H$, qua H kẻ đường thẳng song song với $A'B'$ cắt Bx tại $K \Rightarrow BK \perp (ABC)$

Do $C'C // B'B \Rightarrow d(C';(BMB')) = d(C;(BMB'))$

Mà $MB // CK \Rightarrow d(C;(BMB')) = d(\mathrm{K};(BMB'))$

Kẻ $KE \perp BB'$ta có $\begin{cases} BM \perp BK \\ BM \perp B'K \end{cases} \Rightarrow BM \perp (BKB') \Rightarrow BM \perp EK,$

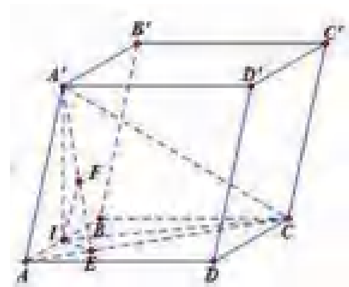
Mà $EK \perp BB' \Rightarrow EK \perp (BMB')$. Ta có $BK = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, B'K = A'H = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có $\dfrac{1}{KE^2} = \dfrac{1}{KB^2} + \dfrac{1}{KB'^2} \Rightarrow KE = \dfrac{3a}{4} = d(C';(BMB'))$

Câu 244. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng *a*. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $ABCD$ là trung điểm *I* của cạnh *AB*. Biết *A'C* tạo với mặt phẳng đáy một góc α với $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Tính theo *a* khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng $(A'AC)$.

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** $\dfrac{2a}{3}$ **C.** $\dfrac{3a}{4}$ **D.** $\dfrac{5a}{2}$

Đáp án B



Ta có $AC' \cap (ABCD) = \{C\}$ và $A'I \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \left(\widehat{A'C,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{A'C,IC}\right) = \widehat{A'CI} = \alpha$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{A'I}{IC} \Rightarrow A'I = IC.\tan\alpha = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}.\dfrac{2}{\sqrt{5}} = a$

Ta có $d(B;(A'AC)) = 2d(\mathrm{I};(A'AC))$ Kẻ $IE \perp AC, IF \perp A'E$

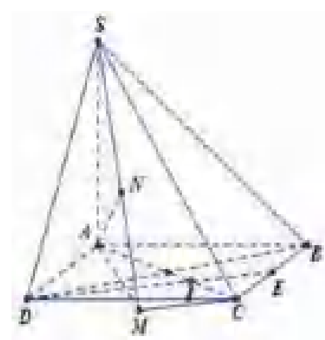
Ta có $\begin{cases} AC \perp IE \\ AC \perp A'I \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'IE) \Rightarrow AC \perp IF$, mà $IF \perp A'E \Rightarrow IF \perp (A'AC)$

Ta có $IE = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Ta có $\dfrac{1}{IF^2} = \dfrac{1}{IE^2} + \dfrac{1}{IA'^2} = \dfrac{9}{a^2} \Rightarrow IF = \dfrac{a}{3} \Rightarrow d(\mathrm{B};(A'AC)) = \dfrac{2a}{3}$

Câu 245. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông *ABCD* cạnh *a* và cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa *SC* và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Gọi *E* là trung điểm *BC*. Tính khoảng cách của hai đường thẳng *DE* và *SC* theo *a*

A. $\dfrac{a}{19}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{38}}{9}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{38}}{9}$

Đáp án C



Ta có $SC \cap (ABCD) = \{C\}$ và $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = 45°$

Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

Qua C kẻ $Cx // DE \Rightarrow d(DE, SC) = d(DE,(SCx)) = d(I,(SCx))$,

Mà $\dfrac{IC}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow d(I,(SCx)) = \dfrac{1}{3}d(\mathrm{A},(SCx))$

Kẻ $AM \perp Cx, AN \perp SM$

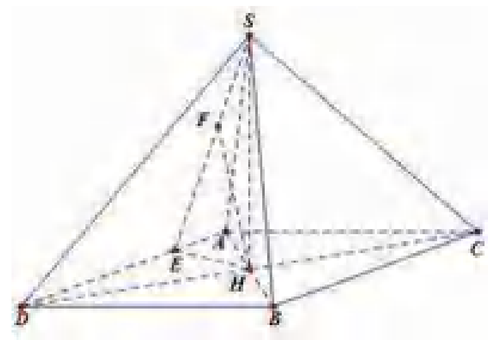
Ta có $\begin{cases} CM \perp AM \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAM) \Rightarrow CM \perp AN$, mà $AN \perp SM \Rightarrow AN \perp (SCx)$

Ta có $AM = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{19}{18a^2} \Rightarrow AN = \dfrac{3a\sqrt{38}}{19} \Rightarrow d(DE;SC) = \dfrac{a\sqrt{38}}{19}$

Câu 246. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác *SAB* đều cạnh *a*, tam giác *ABC* cân tại *C*. Hình chiếu của *S* trên mặt phẳng (*ABC*) là trung điểm của cạnh *AB*, góc hợp bởi *SC* và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Tính khoảng cách của hai đường thẳng *SA* và *BC*.

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$ **B.** $\dfrac{3a}{13}$ **C.** $\dfrac{a}{13}$ **D.** $\dfrac{2a}{13}$

Đáp án A



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Ta có $SC \cap (ABC) = \{C\}$ và $SH \perp (ABC)$

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{CH} = \dfrac{SH}{\tan 30^\circ} = \dfrac{3a}{2}$

Dựng hình hình hành $ABCD \Rightarrow AD // BC$

$\Rightarrow d(SA;BC) = d(BC;(SAD))$

$= d(B;(SAD)) = 2d(\text{H};(SAD))$

Kẻ $HE \perp AD, HF \perp SE$

Ta có $\begin{cases} AD \perp HE \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SHE) \Rightarrow AD \perp HF$, mà $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAD)$

Ta có $\dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{HA^2} + \dfrac{1}{HD^2} = \dfrac{40}{9a^2} \Rightarrow HE = \dfrac{3a}{2\sqrt{10}}$,

Ta lại có $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{HE^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{52}{9a^2} \Rightarrow HF = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$

$\Rightarrow d(H;(SAD)) = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow d(SA;BC) = 2d(H;(SAD)) = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

Câu 247. Cho hình chóp $S.ABCD$ tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, hai đáy là BC và AD. Biết $SA = a\sqrt{2}, AD = 2a, AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ($ABCD$) trùng với trung điểm cạnh AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

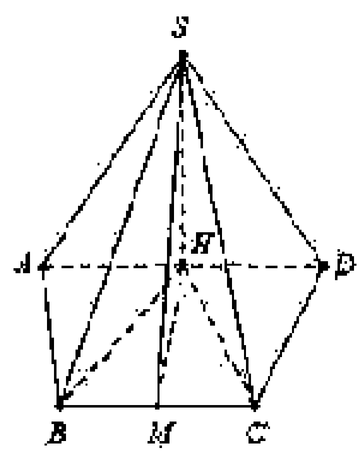
A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\dfrac{a}{7}$ **D.** $\dfrac{3a}{7}$

Đáp án B

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Gọi M là giao điểm của $BC \Rightarrow HM \perp BC$ vì ΔHBC cân tại H

$AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(AD;SB) = d(AD;(SBC)) = d(H;(SBC))$



Ta có $\begin{cases} SH \perp BC \\ HM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM)$,

kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SBC)$

Xét ΔSHM vuông tại H, có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2}$,

Mà $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$

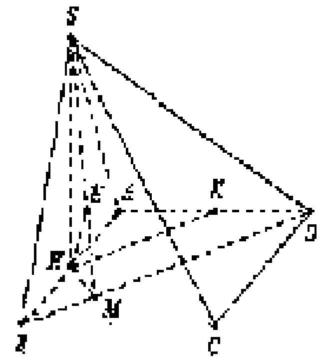
$HM = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d(SB;AD) = d(H;(SBC)) = HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 248. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SD = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$ hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ($ABCD$) là trung điểm H của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{25}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{45}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

Đáp án D



Kẻ $HM \perp BD$ với $M \in BD \Rightarrow BD \perp (SHM)$

Kẻ $HE \perp SM\left(E \in SM\right)$ mà $BD \perp HE \subset (SHM) \Rightarrow HE \perp (SBD)$

+) ΔSHM vuông, có $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow HE = \frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2.HM^2}}$

Mà $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = a\sqrt{3}$ và $HM = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$HE = \left(a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}\right):\sqrt{\frac{25.a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{3}}{5} \Rightarrow d\left(H;(SBD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{5}$

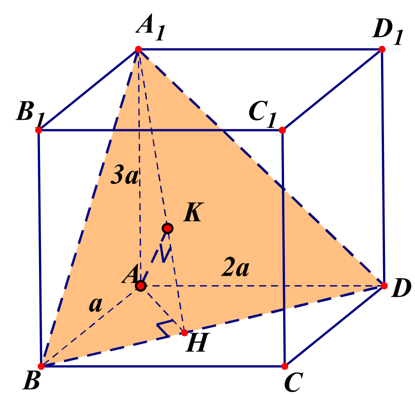
Mặc khác $HK//BD \Rightarrow HK//(SBD) = d(HK;SD) = d\left(H;(SBD)\right)$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng HK, SD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

Câu 249. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = 2a$, $AA_1 = 3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BD) bằng bao nhiêu?

A. a. **B.** $\frac{7}{6}a$. **C.** $\frac{5}{7}a$. **D.** $\frac{6}{7}a$.

Chọn D.



* Trong $(ABCD)$ dựng $AH \perp BD$,
ta chứng minh được $BD \perp (A_1AH)$.
Trong (A_1AH) dựng $AK \perp A_1H$
ta chứng minh được $AK \perp (A_1BD) \Rightarrow d\left(A,(A_1BD)\right) = AK$

* Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A_1A^2}$

mà $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$

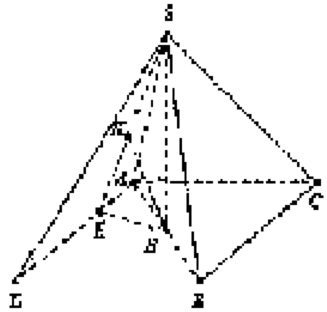
do đó $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{A_1A^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{49}{36a^2} \Rightarrow AK = \frac{6}{7}a$

Câu 250. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = \frac{a\sqrt{70}}{5}$ đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = 2a, AC = a$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA.

A. $\frac{3a}{5}$ **B.** $\frac{4a}{5}$ **C.** $\frac{a}{5}$ **D.** $\frac{2a}{5}$

Đáp án B

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$



+) $HC = \sqrt{AH^2 + AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

+) $d(H;BC) = \dfrac{1}{2} d(A;BC) = \dfrac{1}{2} \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2.AC^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

Từ A kẻ đường thẳng AD song song với BC (như hình vẽ).

Ta có $AD//BC \Rightarrow BC//(SAD) \Rightarrow d(SA;BC) = d(BC;(SAD))$

$= d(\text{B};(SAD)) = 2d(H;(SAD)) \Rightarrow d(SA;BC) = 2.d(H;(SAD))$

Kẻ $HE \perp AD \Rightarrow AD \perp (SHE)$ kẻ $HK \perp SE \Rightarrow HK \perp (SAD)$

Mà $HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2.HE^2}} = \dfrac{2a}{5} \Rightarrow d(SA;BC) = \dfrac{4a}{5}$

Câu 251. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, với $AB = BC = a$, $AD = 2a\,(a > 0)$. Các mặt bên (SAC) và SBD cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và ($ABCD$) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

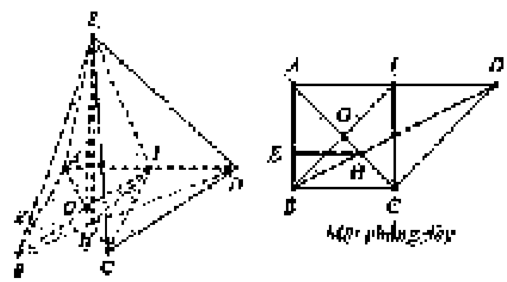
A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$ **D.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{5}$

Đáp án A

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow BI//CD \Rightarrow d(SB;CD) = d(CD;(SBI)) = d(C;(SBI))$

Gọi O là trung điểm của $AC \Rightarrow BI \cap AC = O$

Dễ thấy $ABCI$ là hình vuông $\Rightarrow OH \perp BI$



Kẻ $HK \perp SO\,(K \in SO) \Rightarrow HK \perp (SBI)$

Kẻ $HE \perp AB\,(E \in AB) \Rightarrow AB \perp (SHE)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SE,HE}\right) = \widehat{SEH} = 60°$

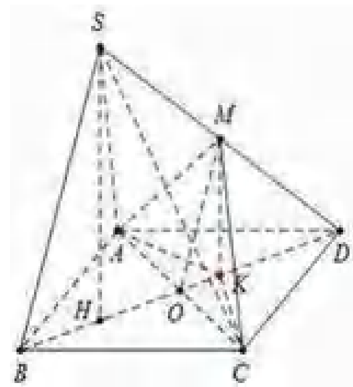
$\Delta BHC \sim \Delta DHA \Rightarrow \dfrac{HC}{HA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow HA = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow HE = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$ (vì ΔAHE vuông cân tại E) , $SH = \tan 60°.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Mặc khác $HO = OC - HC = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ suy ra $HK = \dfrac{SH.HO}{\sqrt{SH^2.HO^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$

Câu 252. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, ABC = 60°, SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ($ABCD$) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{40}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{8}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$



Đáp án B

Gọi K là trung điểm của $HD \Rightarrow MK \perp SH \Rightarrow MK \perp (ABCD)$

Kẻ $KE \perp MO$ tại $E \Rightarrow KE \perp (MAC) \Rightarrow d(K;(MAC)) = KE$

+) $BD = a\sqrt{3} \Rightarrow HD = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow KD = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow MK = \dfrac{a\sqrt{5}}{8}$

+) $OK = OD - KD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3a\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$

+) ΔSHM vuông tại K, có $KE = \dfrac{MK.KO}{\sqrt{MK^2.KO^2}} = a\dfrac{\sqrt{30}}{32}$

Ta có $SB//MO \Rightarrow d(SB;CM) = d(B;(MAC)) = 2d(H;(MAC))$

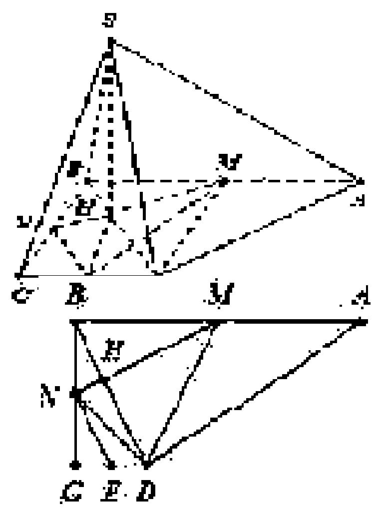
Mặc khác $d(H;(MAC)) = 2d(K;(MAC)) \Rightarrow d(SB'CM) = 4.KE$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB bằng $\dfrac{a\sqrt{30}}{8}$.

Câu 253. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD\,ABCD$ là hình thang vuông tại B và C, $AB = 2BC = 4CD = 2a$, giả sử M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Hai mặt phẳng (SMN) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SB hợp với ($ABCD$) một góc $60°$. Tính khoảng cách giữa SN và BD.

A. $a\sqrt{\dfrac{3}{15}}$ **B.** $a\sqrt{\dfrac{3}{65}}$ **C.** $a\sqrt{\dfrac{3}{55}}$ **D.** $a\sqrt{\dfrac{3}{35}}$

Đáp án B



Dễ dàng chứng minh được $MN \perp BD$

"Biết $BD, AB, AD \Rightarrow \cos\widehat{DBA}$ và $\sin\widehat{BMN} = \dfrac{BN}{MN}$

$\rightarrow \cos\widehat{DBA} = \sin\widehat{BMN} \Rightarrow \Delta BHM$ vuông tại $H \Rightarrow BH \perp H$"

Gọi E là trung điểm của $CD \Rightarrow BD//NE \Rightarrow HN \perp NE$

Kẻ $HK \perp SN, K \in SN \Rightarrow HK \perp (SNE) \Rightarrow d(BD;SN) = HK$

+) $\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SB,BH}\right) = \widehat{SBH} = 60° \Rightarrow SH = \tan 60° BH$

Mà $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BM^2} + \dfrac{1}{BN^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a}{\sqrt{5}} \Rightarrow SH = \sqrt{3}.\dfrac{a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

+) ΔBHN vuông tại H, $\Rightarrow HN = \sqrt{BN^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$

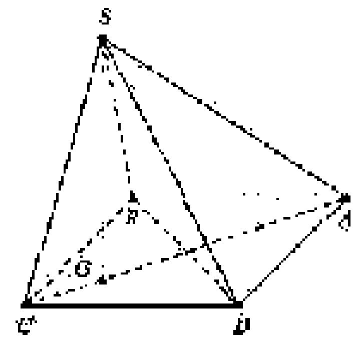
+) ΔSHN vuông tại H, có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HN^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\dfrac{3}{65}}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SN và BD bằng $a\sqrt{\dfrac{3}{65}}$

Câu 254. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành thỏa mãn $AB = 2a, BC = a\sqrt{2}, BD = a\sqrt{6}$.. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng ($ABCD$) là trọng tâm của tam giác BCD. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng a.

A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\frac{5\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Đáp án A



Ta có $\begin{cases} AB = 2a \\ AD = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $d(B, AC) = \frac{AB.BC}{\sqrt{AB^2.BC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.

Từ B kẻ đường thẳng $d // AC$, kẻ $GH \perp d \Rightarrow d \perp (SGH)$

Kẻ $GK \perp SH$ mà $d \perp GK \subset (SGH) \Rightarrow GK \perp (SBH)$

Khi đó $d(AC;SB) = d(AC,(SBH)) = d(G,(SBH)) = a$

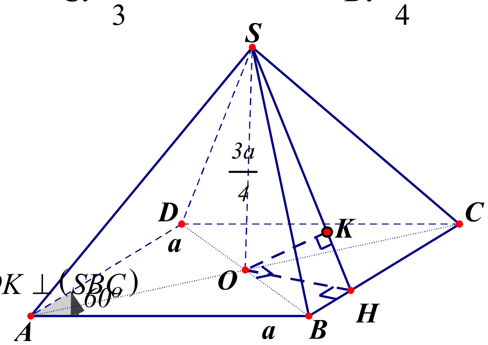
Mà $GH = d(G;d) = d(B;AC) = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, suy ra $\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GH^2} \Rightarrow SG = \frac{GK.GH}{\sqrt{GH^2 - GK^2}} = 2a$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}.SG.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2a.2a.a\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 255. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{3a}{2}$ **C.** $\frac{2a}{3}$ **D.** $\frac{3a}{4}$

Chọn D.



* Ta có ΔABD và ΔBCD đều cạnh a.

AC cắt (SBC) tại C, O là trung điểm AC

$\Rightarrow$ khoảng cách $d(A,(SBC)) = \frac{1}{2}d(O,(SBC))$

* Trong $(ABCD)$ dựng $OH \perp BC$,

trong (SOH) dựng $OK \perp SH$ ta chứng minh được $OK \perp (SBC)$

$\Rightarrow$ khoảng cách $d(O,(SBC)) = OK$

ΔOBC vuông tại O có OH đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$, ΔSOH vuông tại O có OK đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow$

$OK = \frac{3a}{8}$. Vậy $d(A,(SBC)) = \frac{1}{2}OK = \frac{3a}{4}$

Câu 256. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = AC = AD = 3$. Tính diện tích S của tam giác BCD.

A. $S = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ **B.** $S = 27$. **C.** $S = \frac{27}{2}$. **D.** $S = \frac{9\sqrt{2}}{3}$.

Câu 257. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S tới mặt phẳng đáy (ABC).

A. $h = a$. **B.** $h = a\sqrt{6}$. **C.** $h = \frac{3}{2}a$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Câu 258. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.

B. Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Câu 259. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^0$ và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc $\widehat{xOy}$. Biết $MO = 6$. Khoảng cách từ M đến Ox và Oy bằng nhau và bằng $2\sqrt{5}$. Tính khoảng cách h từ điểm M đến mặt phẳng (Ox, Oy).

A. $h = 2\sqrt{3}$ **B.** $h = 2$. **C.** $h = 2\sqrt{2}$ **D.** $h = 4$.

Câu 260. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{a}{3}$.

B. Khoảng cách từ AB đến B_1D bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (CDC_1D_1) bằng $a\sqrt{2}$.

D. $AC_1 = a\sqrt{2}$.

Câu 261. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a. Tính khoảng cách h từ AD đến mp (SBC) bằng bao nhiêu?

A. $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $h = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **C.** $h = \frac{3a}{2}$. **D.** $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 262. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.có độ dài cạnh bên $AA_1 = 21$. Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 42$. Tính khoảng cách h từ A đến (A_1BC).

A. $h = 7\sqrt{2}$. **B.** $h = \frac{21\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = 42$. **D.** $h = \frac{21\sqrt{2}}{2}$.

Câu 263. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng BB' và AC.

A. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $h = \frac{a}{2}$. **C.** $h = \frac{a}{3}$. **D.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 264. Cho tứ diện $ABCD$, kí hiệu h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ mỗi đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đối diện với đỉnh đó của hình tứ diện. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

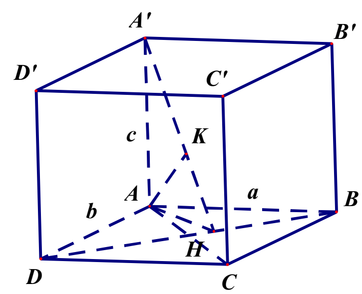
A. $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ chỉ xảy ra khi tứ diện đó là tứ diện đều.
B. Có tứ diện mà một trong bốn khoảng cách bằng độ dài một cạnh của tứ diện.
C. Có tứ diện mà hai trong bốn khoảng cách bằng độ dài hai cạnh của tứ diện.
D. $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ khi các mặt của tứ diện đồng dạng.

Câu 265. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a, BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách h từ S đến mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 266. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $DA = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau kết quả nào **sai**?

A. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$.
B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và DD' bằng $\sqrt{a^2+b^2}$.
C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' bằng b.
D. Độ dài đường chéo BD' bằng $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



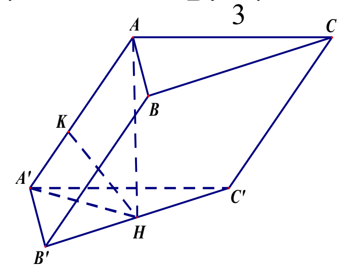
Chọn A.
Dựng $AH \perp BD, AK \perp A'H$, $d\left(A;(A'BD)\right) = AK$, với

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$AK = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Câu 267. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.



Chọn A.
H là trung điểm $B'C'$. Dựng $HK \perp AA'$, $d\left(AA';B'C'\right) = HK$,

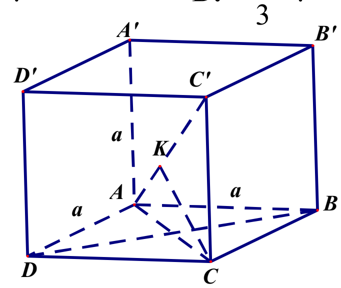
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a.\sin 30^0\right)^2} = \frac{16}{3a^2};\ HK = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Câu 268. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?
A. Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường phẳng vuông góc với một đường phẳng cho trước.
B. Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một.
C. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.
D. Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
Chọn C.

Câu 269. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách từ C đến AC' là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn D.



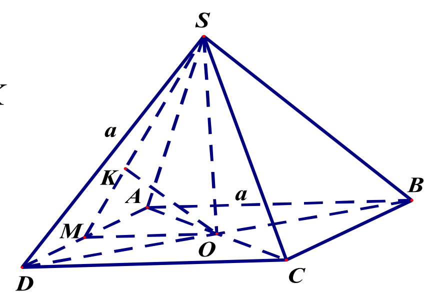
$d\left(C;AC'\right)=CK$, $CK\perp AC'$ tại K

$$\frac{1}{CK^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{CC'^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow CK=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 270. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy có tâm O và cạnh bằng a, cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ O đến $\left(SAD\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **D.** a.

Chọn C.



Gọi M là trung điểm AD, $OK\perp SM$, $d\left(O;\left(SAD\right)\right)=OK$

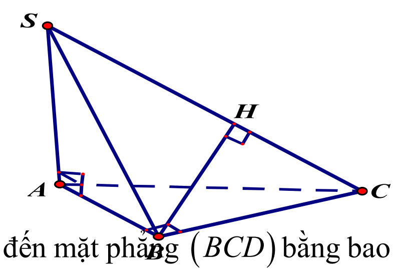
$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{SO^2}$$

$$SO^2=SA^2-AO^2=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}\ ,\quad OK=\frac{a}{\sqrt{6}}$$

Câu 271. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=3a$, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Chọn D.



$SA\perp\left(ABC\right)$, ΔSBC vuông tại B; $BH\perp SC$ tại H

$\Rightarrow d\left(B,SC\right)=BH$

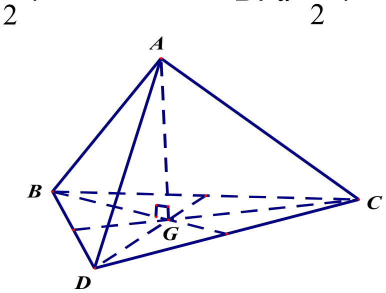
Ta có: $BH.SC=SB.BC$; $SC=3\sqrt{2}a, SB=2\sqrt{3}a$,

suy ra $BH=2a$.

Câu 272. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(BCD\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $2a$. **B.** $a\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{3a}{2}$. **D.** $a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn B.



G là trọng tâm ΔBCD

$$d\left(A;\left(BCD\right)\right)=AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 273. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

B. Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia

C. Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a và b chéo nhau, Khi đó, đường vuông góc chung của a và b luôn vuông góc với (P).

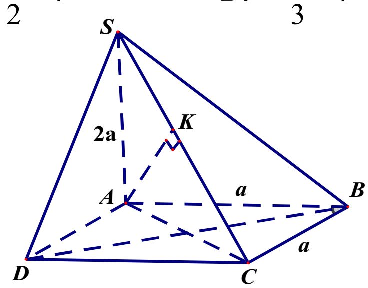
D. Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với cả a và b.

Chọn C.

Câu 274. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{B} = 60^0$. Biết $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến SC là:

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn B.



ΔABC đều, $AC = a$

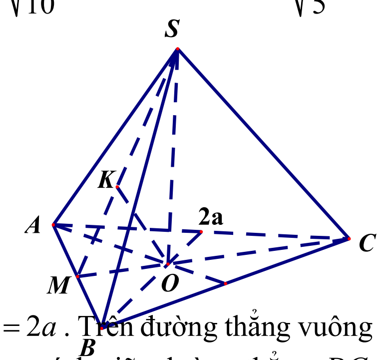
Dựng $AK \perp SC$, $AK = d(A;SC)$.

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2}, \quad AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Câu 275. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{10}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Chọn C.



Gọi M là trung điểm AB, dựng $OK \perp SM$

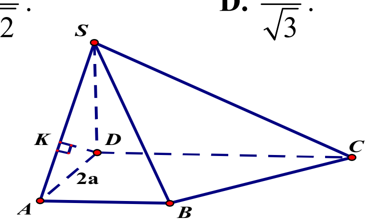
$d(O;(SAB)) = OK$

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow OK = a\sqrt{\frac{3}{10}}$$

Câu 276. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông ở A và D, $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng DC và (SAB).

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Chọn D.



Dựng $DK \perp SA$, $d(DC,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DK$

$$\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow DK = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Câu 277. Cho tứ diện $OABC$, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Khoảng cách giữa OA và BC bằng bao nhiêu?

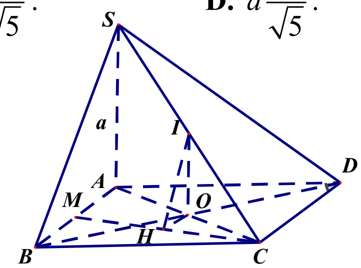
A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Chọn A.

Gọi K là trung điểm BC, $OK \perp BC$, $d\left(OA, BC\right) = OK = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 278. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC, M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ I đến CM bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. **D.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.



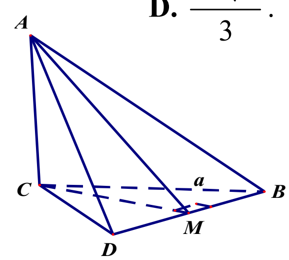
Chọn B.

Dựng $OH \perp CM$, khi đó $d\left(I; CM\right) = IH$

$IH^2 = OI^2 + OH^2$, $OI = \dfrac{a}{2}, OH = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}a \Rightarrow IH = a\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

Câu 279. Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp \left(BCD\right)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn A.

$d\left(A, BD\right) = AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = a\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 280. Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a$, $SB = a$, $SC = 2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:

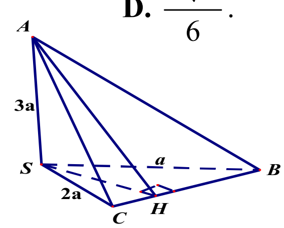
A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{7a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{8a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{6}$.

Chọn B.

Dựng $AH \perp BC$, $d\left(A, BC\right) = AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{9a^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}a\right)^2} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}a^2$

Câu 281. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{3}$. Khỏang cách từ A đến $\left(SBC\right)$ bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.



Chọn A.

Dựng $AH \perp SB$, $d\left(A, \left(SBC\right)\right) = AH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

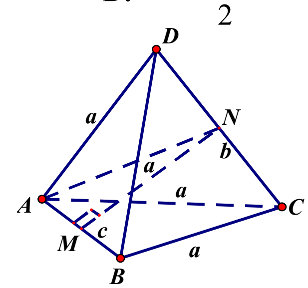
Câu 282. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường vuông góc chung luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với a và chứa đường thẳng b.
B. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau là một đường thẳng vừa vuông góc với a vừa vuông góc với b.
C. Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không có điểm chung.
D. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kỳ lần lượt thuộc hai đường thẳng ấy.
Chọn D.

Câu 283. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC = AD = BD = a$, $CD = b$, $AB = c$. Khoảng cách giữa AB và CD là?

A. $\dfrac{\sqrt{3a^2 - b^2 - c^2}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2 - c^2}}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2a^2 - b^2 - c^2}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{2}$

Chọn B.



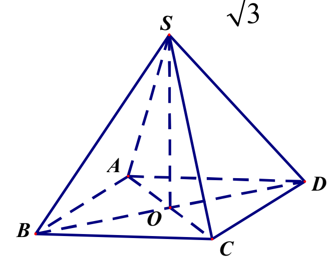
Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD,

$$d(AB, CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2}$$
$$= \sqrt{AD^2 - \frac{CD^2}{4} - \frac{AB^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2 - c^2}}{2}$$

Câu 284. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy và cạnh bên bằng a. Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Chọn A.

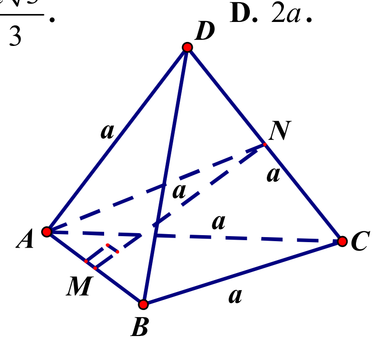


$$d(S, (ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Câu 285. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a$.

Chọn B.



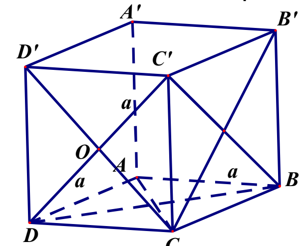
Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD,

$$d(AB, CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{AD^2 - \frac{CD^2}{4} - \frac{AB^2}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{4a^2 - a^2 - a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 286. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là:

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn C.



Gọi O là tâm hình vuông $CDD'C'$. $d\left(BC',CD'\right)=C'O=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 287. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?
A. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường vuông góc chung luôn luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với a và chứa đường thẳng b.
B. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau là một đường thẳng d vừa vuông góc với a và vừa vuông góc với b.
C. Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không song song với nhau.
D. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.
Chọn D.

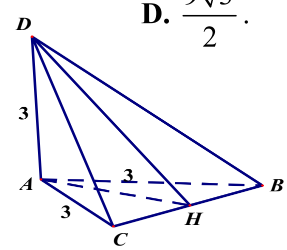
Câu 288. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là **sai**?

Cho tứ diện đều $ABCD$. Khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng (ABC) là:
A. Độ dài DG trong đó G là trọng tâm của ΔABC.
B. Độ dài đoạn DI trong đó I là trung điểm của đoạn AM với M là trung điểm của đoạn BC.
C. Độ dài đoạn DH trong đó H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (ABC).
D. Độ dài đoạn DK trong đó K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
Chọn B.

Câu 289. Hình tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB=AC=AD=3$. Diện tích tam giác BCD bằng.

A. 27. **B.** $\dfrac{27}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Chọn D.

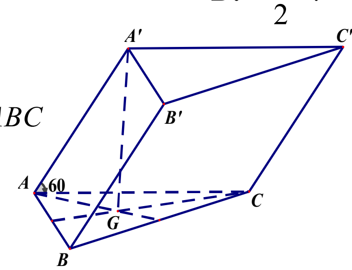


ΔBCD đều cạnh $3\sqrt{2}$, $S_{\Delta BCD}=\left(3\sqrt{2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 290. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng 60^0, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và A' cách đều A, B, C. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn A.



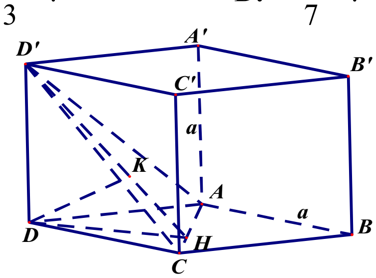
Khoảng cách giữa hai đáy bằng đường cao $A'H$ của tứ diện $A'.ABC$

$\tan 60^0=\dfrac{A'H}{A'G}\Rightarrow A'H=a$, G là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 291. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AA'=a$, $AC=2a$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD') là:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn D.



Dựng $DH \perp AC, DK \perp D'H$

$d\left(D,\left(ACD'\right)\right) = DK$, $\dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{DD'^2} + \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{7}{3a^2}$

Câu 292. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

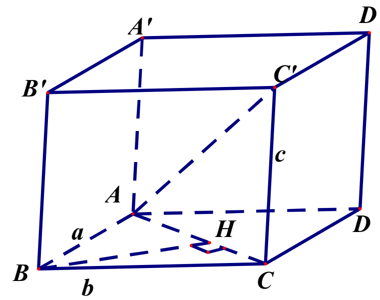
Chọn A.

$d(O,SC) = \dfrac{1}{2}d(A,SC) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}a$

Câu 293. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = b, CC' = c$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' là?

A. $\dfrac{4ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **B.** $\dfrac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **C.** $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **D.** $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Chọn D.



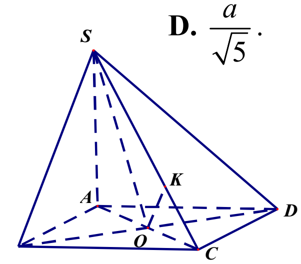
Dựng $BH \perp AC$.

$d(BB', AC') = d\left(B,\left(ACC'\right)\right) = BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu 294. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = a$. khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Chọn A.

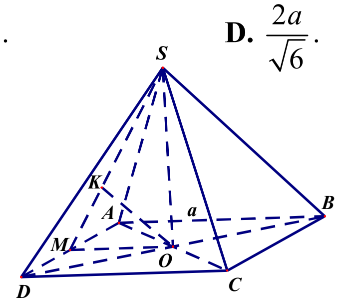


Dựng $OK \perp SC$ $, d(BD,SC) = OK$. $OK = \dfrac{SA.OC}{SC} = \dfrac{a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Câu 295. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ C đến (SAD) bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$.

Chọn D.

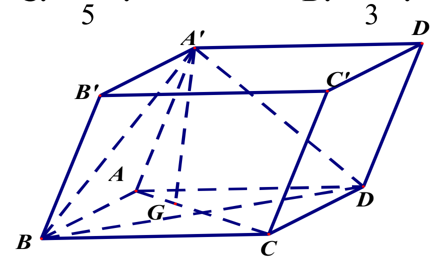


$d\left(C,\left(SAD\right)\right)=2d\left(O,\left(SAD\right)\right)=2.\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Câu 296. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD}=\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=60^0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn B.



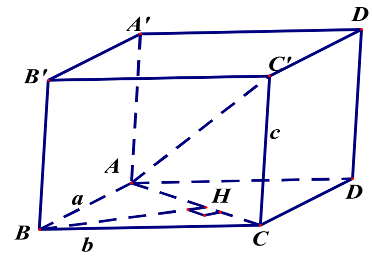
$A'.ABD$ là tứ diện đều cạnh a

Khoảng cách giữa hai đáy là đường cao $A'G$ của tứ diện $A'ABD$ và bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 297. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, BC=b, CC'=c$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ là:

A. $\dfrac{4ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **B.** $\dfrac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **C.** $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **D.** $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Chọn D.



Dựng $BH\perp AC$.

$d\left(BB',AC'\right)=d\left(B,\left(ACC'\right)\right)=BH=\dfrac{BA.BC}{AC}=\dfrac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Câu 298. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai** ?

A. Cho a,b là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Đường vuông góc chung của a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

B. Không thể có một hình chóp tứ giác $S.ABCD$ nào có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

C. Cho $\vec{u}$, $\vec{v}$ là hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) và $\vec{n}$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Điều kiện cần và đủ để $\Delta\perp(\alpha)$ là $\vec{n}.\vec{u}=0$ và $\vec{n}.\vec{v}=0$.

D. Hai đường thẳng a và b trong không gian có các véctơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Điều kiện cần và đủ để a và b chéo nhau là a và b không có điểm chung và hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương.

Chọn B.

Câu 299. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Độ dài đoạn vuông góc chung của SB và CD bằng:

A. a. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Chọn A.

Độ dài đoạn vuông góc chung bằng khoảng cách hai đường thẳng SB,CD bằng $BC=a$

Câu 300. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD bằng:

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Chọn B.

Câu 301. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD' và $B'C$ là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn C.

Ta có $BD' \perp B'C$. $d\left(BD', B'C\right) = \frac{1}{2} d\left(C'; BD'\right) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 302. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi K, H, M theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, O, D lên SC. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SC và BD là đoạn thẳng nào dưới đây?

A. BS. **B.** BK. **C.** DM. **D.** OH.

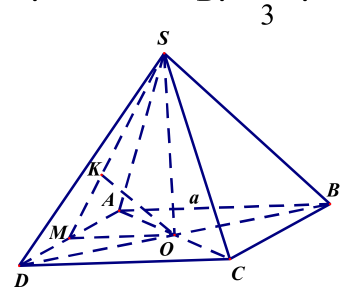
Chọn D.

Chứng minh được $OH \perp BD, OH \perp SC$

Câu 303. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn D.



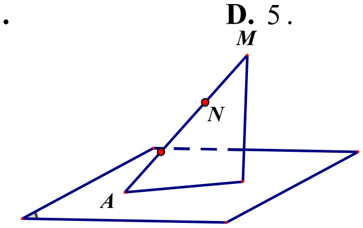
Gọi M là trung điểm CD, $OK \perp SM$

$d\left(O, (SCD)\right) = OK$. $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{2}}{3}a$

Câu 304. Cho mặt phẳng (P) và điểm M ngoài (P), khoảng cách từ M đến (P) bằng 6. Lấy A thuộc (P) và N trên AM sao cho $2MN = NA$. Khoảng cách từ N đến (P) bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Chọn A.

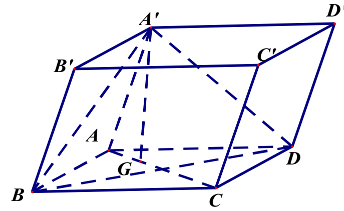


$$\frac{AN}{AM} = \frac{d\left(N,(P)\right)}{d\left(M,(P)\right)} \Rightarrow d\left(N(P)\right) = \frac{2}{3}.6 = 4$$

Câu 305. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^0$. Khi đó khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối của tứ diện $A'.ABD$ bằng

A. $\frac{3a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Chọn C.

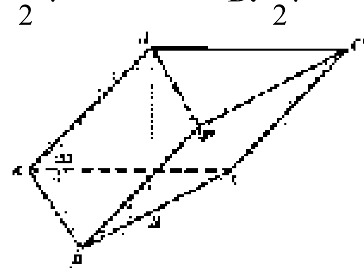


Nhận xét $A'.ABD$ là tứ diện đều cạnh a.
Khoảng cách hai cạnh đối làm như câu trên

Câu 306. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh bên bằng a. Các cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt đáy góc 60°. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $\left(A_1B_1C_1\right)$ là trung điểm của B_1C_1. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng bao nhiêu?

A. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Chọn A.



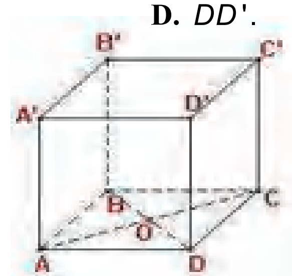
Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^o$.

$d\left(\left(A'B'C'\right),\left(ABC\right)\right) = A'H = A'A.\cos 60^\circ = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 307. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AD và $A'C'$ là :

A. AA'. **B.** BB'. **C.** DA'. **D.** DD'.

Chọn A.



$\begin{cases} AA' \perp (A'B'C'D') \\ A'C' \subset (A'B'C'D') \end{cases} \rightarrow AA' \perp A'C'$

$\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AD \subset (ABCD \end{cases} \rightarrow AA' \perp AD$

Câu 308. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là:

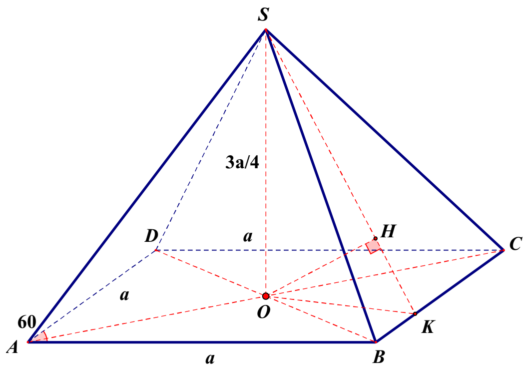
A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

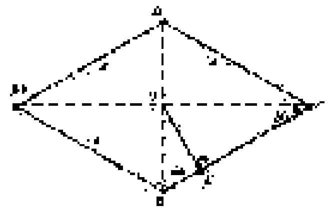
Chọn C.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: kẻ $OK \perp BC\left(K \in BC\right)$.

Mà $BC \perp SO$ nên suy ra hai mặt phẳng (SOK) và (SBC) vuông góc nhau theo giao tuyến SK. Trong mặt phẳng (SOK): kẻ $OH \perp SK\left(H \in SK\right)$.

Suy ra: $OH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(O,(SBC)\right) = OH$.





Câu 309. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

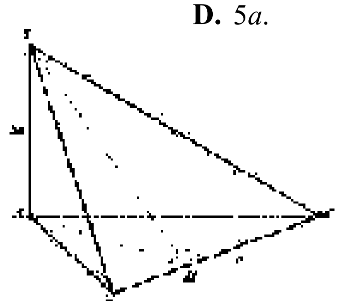
A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a$.

Chọn A.

Ta có: $d\left(CD,SB\right)=d\left(CD,\left(SAB\right)\right)=AD=a.$

Câu 310. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với SA vuông góc với $\left(ABC\right)$ và $SA = 3a$. Diện tích tam giác ABC bằng $2a^2, BC = a$. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

A. $2a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $5a$.



Chọn D.

Kẻ AH vuông góc với BC :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\rightarrow AH=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{4a^2}{a}=4a$$

Khoảng cách từ S đến BC chính là SH

Dựa vào tam giác vuông ΔSAH ta có

$$SH=\sqrt{SA^2+AH^2}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$$

Câu 311. Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Khoảng cách giữa hai điểm S và C nhận giá trị nào trong các giá trị sau ?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

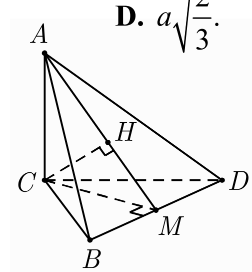
Chọn B.

Do $\begin{cases} SA\perp AB \\ SA\perp BC \end{cases}$ nên $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AC$

Như vậy $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{SA^2+(AB^2+BC^2)}=\sqrt{3}$

Câu 312. Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC\perp\left(BCD\right)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a. Biết $AC=a\sqrt{2}$, M là trung điểm BD. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng

A. $a\sqrt{\frac{7}{5}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{4}{7}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{6}{11}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.



Chọn C.

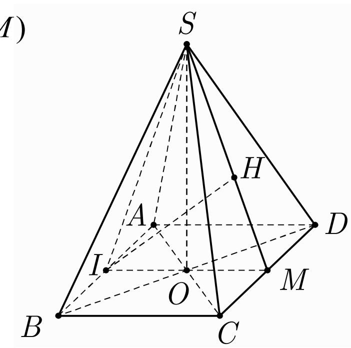
Do ΔABC đều cạnh a nên đường cao $MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$d\left(C,AM\right)=CH=\frac{AC.MC}{\sqrt{AC^2+MC^2}}=a\frac{\sqrt{66}}{11}$$

Câu 313. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=SA=2a$. Khoảng cách từ đường thẳng AB đến $\left(SCD\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** a.

Chọn B.



Gọi I,M lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD thì $CD\perp(SIM)$

Vẽ $IH\perp SM$ tại $H\in SM$ thì $IH\perp(SCD)$

$$\Rightarrow d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(I,(SCD)\right)=IH=\frac{SO.IM}{SM}$$

$\Delta\, SAB$ đều cạnh $2a\Rightarrow SI=a\sqrt{3}\Rightarrow SM=a\sqrt{3}$

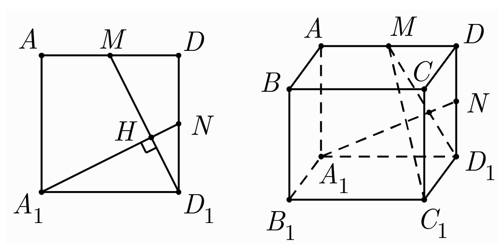
Và $OM=\frac{1}{2}IM=a\Rightarrow SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=a\sqrt{2}$

Cuối cùng $d\left(AB,(SCD)\right)=\frac{SO.IM}{SM}=\frac{a\sqrt{2}.2a}{a\sqrt{3}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Câu 314. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng $\left(C_1D_1M\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{2a}{\sqrt{6}}$ **C.** $\frac{1}{2}a$ **D.** a

Chọn A.



Gọi N là trung điểm cạnh DD_1 và $H=A_1N\cap MD_1$. Khi đó ta chứng minh được $A_1N\perp MD_1$

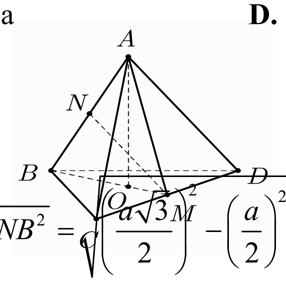
Suy ra $A_1N\perp(C_1D_1M)$

$$\Rightarrow d\left(A_1,(C_1D_1M)\right)=AH=\frac{A_1D_1^2}{A_1N}=\frac{A_1D_1^2}{\sqrt{A_1D_1^2+ND_1^2}}\ \Rightarrow d\left(A_1,(C_1D_1M)\right)=\frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Câu 315. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **C.** a **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Chọn B.



Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh CD,AB

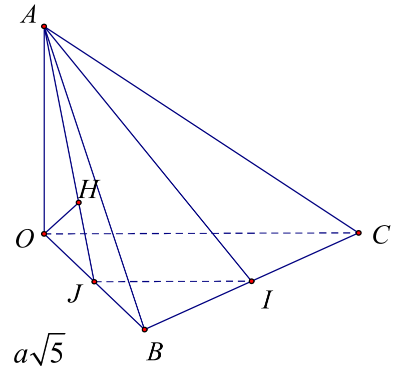
Tam giác MAB cân tại M và $\Delta\, NCD$ cân tại N

Do đó $MN\perp AB,\ MN\perp CD\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=MN=\sqrt{BM^2-NB^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 316. Cho tứ diện $OABC$ trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm BC. Khoảng cách giữa AI và OC bằng bao nhiêu?

A. a. **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Chọn B.



Gọi J là trung điểm OB. Kẻ OH vuông góc AJ tại H.

Tam giác AOJ vuông tại O, có OH là đường cao

$$OH = \frac{OA.OJ}{\sqrt{OA^2 + OJ^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ta có: $OC // IJ$ nên $OC // (AIJ)$

Do đó: $d(AI, OC) = d(OC, (AIJ)) = d(O, (AIJ)) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 317. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây?

A. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

B. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (α) chứa đường này và (α) vuông góc với đường kia.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc (α) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kì trên b.

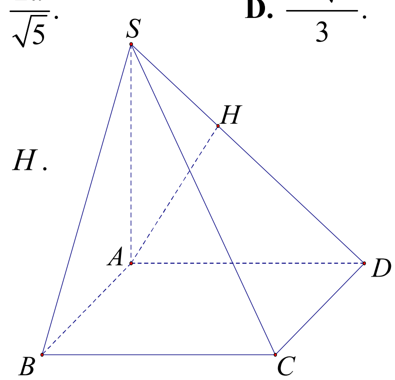
D. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α).

Chọn C.

Câu 318. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn C.



$SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$; $AD \perp CD$.

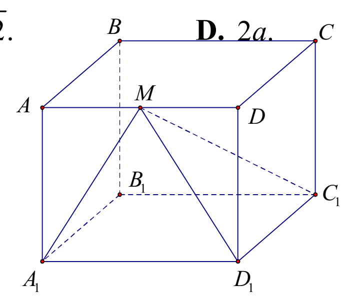
Suy ra $(SAD) \perp CD$ Trong (SAD) kẻ AH vuông góc SD tại H.

Khi đó $AH \perp (SCD)$

$$d(A, (SCD)) = AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 319. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AA_1 = 2a, AD = 4a$. Gọi M là trung điểm AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B_1 và C_1M bằng bao nhiêu?

A. $3a$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.



Ta có $A_1B_1 // C_1D_1$ suy ra

$d(A_1B_1, C_1M) = d(A_1B_1, (C_1D_1M)) = d(A_1, (C_1D_1M))$

Vì $AA_1 = 2a$, $AD = 4a$ và M là trung điểm AD

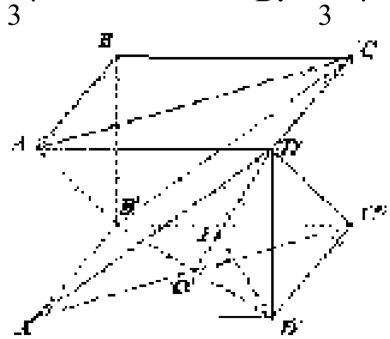
nên $A_1M \perp D_1M$, suy ra $A_1M \perp (C_1D_1M)$

$\Rightarrow d\left(A_1, (C_1D_1M)\right) = A_1M = 2a\sqrt{2}$.

Câu 320. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa $(AB'C)$ và $(A'DC')$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn D.



Có $d\left((AB'C),(A'DC')\right) = d\left(B',(A'DC')\right) = d\left(D',(A'DC')\right)$

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Gọi I là hình . Chiếu của D' trên $O'D$,

suy ra I là hình chiếu của D' trên $(A'DC')$.

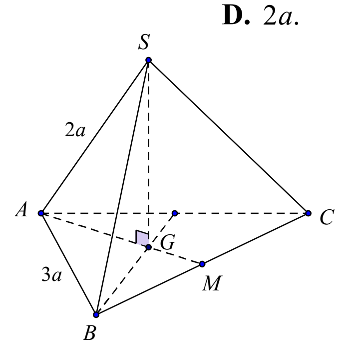
$d\left[(AB'C),(A'DC')\right] = d\left[D',(A'DC')\right]$

$$= D'I = \frac{D'O'.D'D}{\sqrt{D'O'^2 + D'D^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 321. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $4a$. **B.** $3a$. **C.** a. **D.** $2a$.

Chọn C.



• Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Do $S.ABC$ là chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

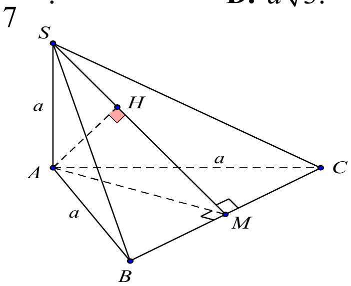
• $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3}.$

• ΔSAG vuông tại $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$

Câu 322. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S sao cho $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Chọn C.



• Gọi M là trung điểm của BC ;

H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

• Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp SA$ nên

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH.$

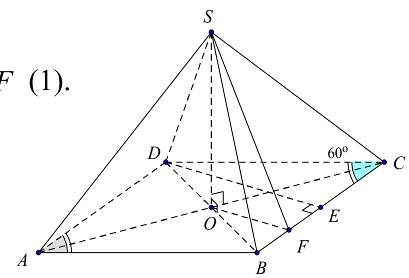
Mà $AH \perp SM$, do đó $AH \perp (SBC)$. Vậy $AH = d\left(A,(SBC)\right)$.

- $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \dfrac{AS.AM}{\sqrt{AS^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 323. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm BC và F là trung điểm BE. Góc giữa hai mặt phẳng (SOF) và (SBC) là

A. 90^o. **B.** 60^o. **C.** 30^o. **D.** 45^o.

Chọn A.



- ΔBCD đều nên $DE \perp BC$. Mặt khác $OF // DE \Rightarrow BC \perp OF$ (1).
- Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SO$ (2).
- Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (SOF) \Rightarrow (SBC) \perp (SOF)$.

Vậy, góc giữa (SOF) và (SBC) bằng 90^o.

Câu 324. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia;

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó;

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia;

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

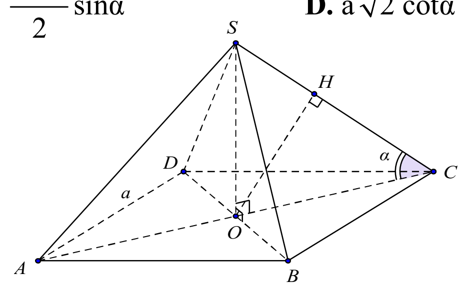
Chọn A.

- Đáp án A: Đúng
- Đáp án B: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố cắt nhau.
- Đáp án C: Sai, vì mặt phẳng đó chưa chắc đã tồn tại.
- Đáp án D: Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố vuông góc.

Câu 325. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng *a* và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ **B.** $a\sqrt{2}\tan$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ **D.** $a\sqrt{2}\cot\alpha$

Chọn C.



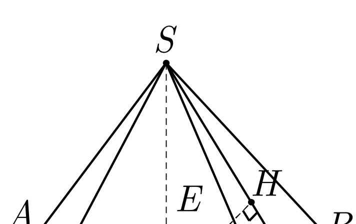
- $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
- Khoảng cách cần tìm là đoạn OH.

$OH = OC\sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$

Câu 326. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; K là điểm bất kỳ trên AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK là:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

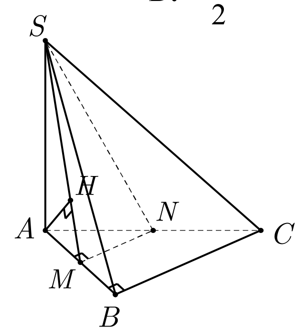
Chọn D.



Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm cạnh đáy BC.
Do $SA = SB = SC = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$
Từ đó ta chứng minh được $BC \perp (SOI)$
$\Rightarrow OH \perp (SBC)$ (với $OH \perp BC$ tại SI)
Do $\begin{cases} EF // (SBC) \\ SK \subset (SBC) \end{cases}$ nên $d\left(EF, SK\right) = d\left(EF, (SBC)\right) = OH$
Thực hiện tính toán để được $OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
Cuối cùng $d\left(EF, SK\right) = OH = \dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 327. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa SM và BC bằng bao nhiêu?

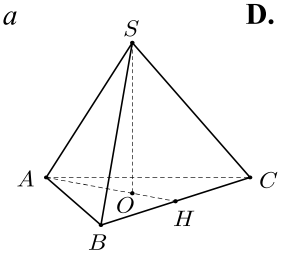
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Chọn A.
Gọi N là trung điểm của cạnh đáy AC. Khi đó $BC // (SMN)$
Nên $d\left(SM, BC\right) = d\left(B, (SMN)\right) = d\left(A, (SMN)\right)$
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đoạn SM.
Ta có thể chứng minh được $MN \perp (SAM)$, từ đó
$AH \perp (SMN) \Rightarrow d\left(A, (SMN)\right) = AH = \dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

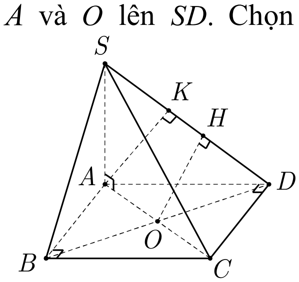
Câu 328. Hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ S đến $\left(ABC\right)$ bằng

A. $2a$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** a **D.** $a\sqrt{5}$



Chọn C.
Gọi O là chân đường cao của hình chóp.
Ta có $AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.3a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$
$d\left(O, (ABC)\right) = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$

Câu 329. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy $\left(ABCD\right)$. Gọi K, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và O lên SD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?



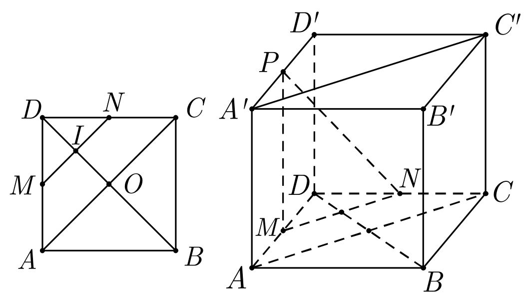
A. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là AK.
B. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là CD.
C. Đoạn vuông góc chung của AC và SD là OH.
D. Các khẳng định trên đều sai.
Chọn D.
Nếu $AK \perp AC$, do $AK \perp AB \Rightarrow AK \perp (ABC)$
$\Rightarrow AK \equiv SA$ (vì $SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow SA \perp SD \Rightarrow \Delta SAD$ có 2 góc vuông (vô lý).
Theo tính chất của hình vuông $CD \not\perp AC$.

Nếu $AC \perp OH$, do $AC \perp BD \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO \Rightarrow \Delta SOA$ có 2 góc vuông (vô lý)
Như vậy $AC \not\perp AK,\ AC \not\perp CD,\ AC \not\perp OH$

Câu 330. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AD, DC, A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Chọn B.



Nhận xét $(ACC') \equiv (ACC'A')$. Gọi $O = AC \cap BD,\ I = MN \cap BD$
Khi đó, $OI \perp AC,\ OI \perp AA' \Rightarrow OI \perp (ACC'A')$

Suy ra $d\left((MNP),(ACC')\right) = OI = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 331. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn D.

Ta có : $AA'//BB' \Rightarrow AA'//(\text{DBB'D'}) \Rightarrow d(AA') = \text{d}\left(A,(DBB'D')\right) = AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 332. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Tính khỏang cách giữa đường thẳng IJ và (SAD).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Chọn B.

$IJ // \text{AD} \Rightarrow IJ // (SAD) \Rightarrow d\left(IJ,(\text{SAD})\right) = d\left(I,(SAD)\right) = IA = \frac{a}{2}$.

Câu 333. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B không nằm trong (P), Đặt $d_1 = d\left(A,(P)\right)$ và $d_2 = d\left(B,(P)\right)$. Trong các kết luận sau kết luận nào đúng?

A. Nếu $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ thì đoạn thẳng AB cắt (P)

B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P)

C. Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\frac{IA}{IB}=\frac{d_1}{d_2}$

D. $\frac{d_1}{d_2}=1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng $AB//(P)$

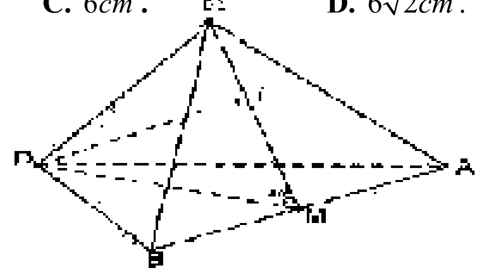
Chọn C.

A sai "đoạn thẳng".
B sai "đoạn thẳng".
C đúng.
D sai "hai điểm có thể nằm khác phía so với (P)" do đó có thể đường thẳng AB cắt (P).

Câu 334. Cho hai tam giác ABC và ABD nằm trong hai mặt phẳng hợp với nhau một góc 60^o, ΔABC cân ở C, ΔABD cân ở D. Đường cao DK của ΔABD bằng $12cm$. Khoảng cách từ D đến $\left(ABC\right)$ bằng

A. $3\sqrt{3}cm$. **B.** $6\sqrt{3}cm$. **C.** $6cm$. **D.** $6\sqrt{2}cm$.

Chọn B.

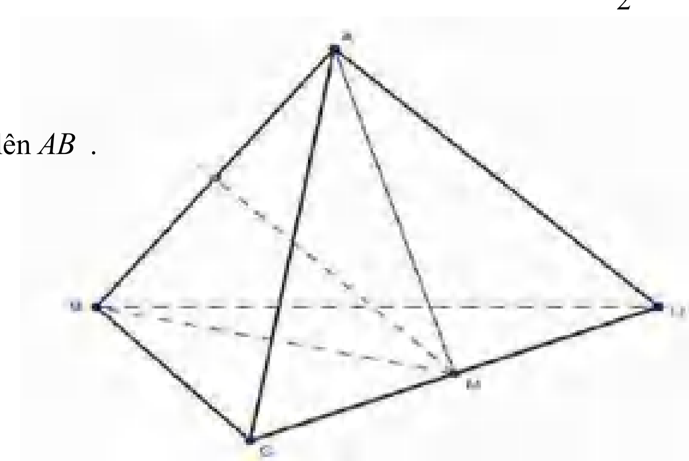


Gọi M là trung điểm AB suy ra:
Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên CM
$\Rightarrow DH=d(\mathrm{D},(\mathrm{ABC}))$
$DH=\sin 60^0.DM=6\sqrt{3}$

Câu 335. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a là :

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn D.



Gọi M là trung điểm DC,

H là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

Ta có: $\begin{cases} BM\perp CD \\ AM\perp CD \end{cases}\Rightarrow CD\perp(\mathrm{ABM})$

$\begin{cases} CD\perp MH \\ AB\perp MH \end{cases}\Rightarrow MH=d(\mathrm{AB},\mathrm{CD})$

$MH=\frac{2S_{ABM}}{AB}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 336. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước AB = a, AD = b, AA_1 = c. Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai** ?

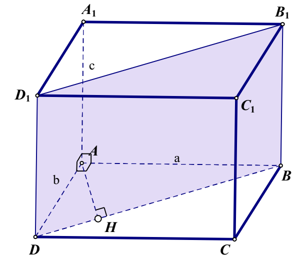
A. khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC_1 bằng b.

B. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

D. $BD_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Chọn C.



☑ $d\left(AB, CC_1\right) = BC = b \Rightarrow$ Câu A đúng.

☑ $d\left(A,\left(B_1BD\right)\right) = AH; \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{(ab)^2} \Rightarrow AH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu B đúng.

☑ Suy ra câu C sai.

☑ Suy ra câu D đúng, đường chéo hình chữ nhật bằng $BD_1 = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 337. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau thì đường thẳng vuông góc chung của chúng nằm trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kỳ thuộc a tới mp(P).

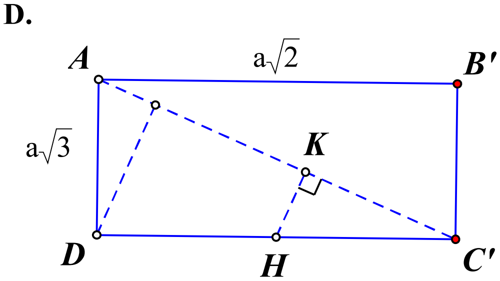
C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là khoảng cách từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) chứa a và song song với b đến một điểm N bất kỳ trên b.

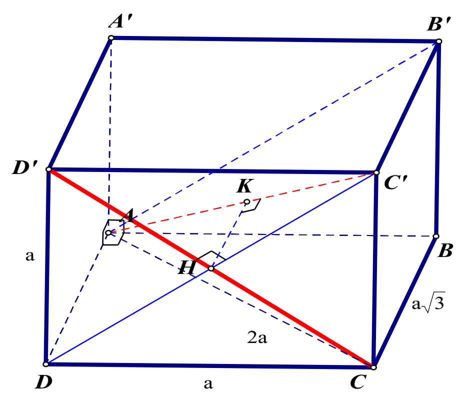
D. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Câu 338. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC = 2a$. Tính khoảng cách giữa AC' và CD':

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Chọn D.





☑ Ta có hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $\left(DCC'D'\right)$ là $DC' \perp D'C$ nên $AC' \perp D'C \Rightarrow \left(ADC'B'\right) \perp D'C$ tại điểm H là trung điểm CD'. Từ H ta kẻ $HK \perp AC' \Rightarrow d\left(AC', D'C\right) = HK$.

☑ Ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{5a^2}{6a^4} \Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{6}{5}}a = \dfrac{\sqrt{30}}{5}a \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{30}}{10}a$

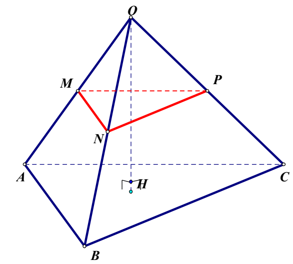
Câu 339. Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tính khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Chọn A.

Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC):

$d\left(MN,(ABC)\right) = d\left((MNP),(ABC)\right) = \dfrac{OH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

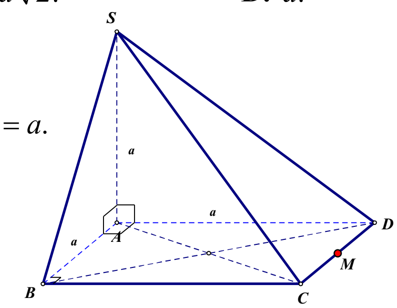


Câu 340. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Chọn D.

Khoảng cách từ M đến (SAB): $d\left(M,(SAB)\right) = d\left(D,(SAB)\right) = a.$

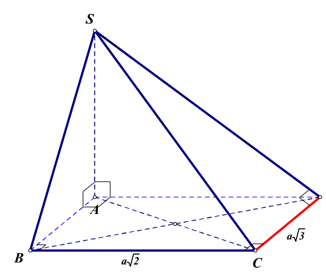


Câu 341. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$, $BC = a\sqrt{2}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Chọn D.

Khoảng cách giữa SD và BC: $d\left(BC,SD\right) = CD = a\sqrt{3}.$



Câu 342. Cho hình tứ diện $OABC$ với OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC. Gọi I là trung điểm của BC, J là trung điểm AI, Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên AI và của J lên OC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. Đoạn vuông góc chung của AI và OC là JLQ

B. Đoạn vuông góc chung của AI và OC là IC

C. Đoạn vuông góc chung của AI và OC là OK

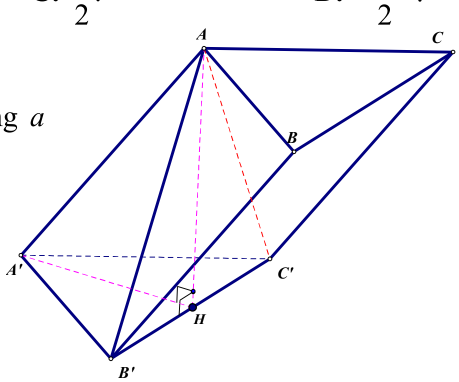
D. Các khẳng định trên đều sai.

Chọn D.

Câu 343. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là:

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.



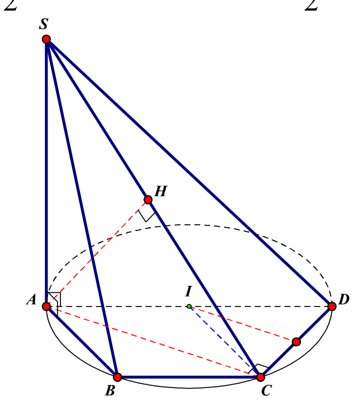
Do hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a suy ra

$AB' = AC' \Rightarrow B'H = HC' \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

Câu 344. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD) lần lượt là:

A. $a\sqrt{2}$; $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$; $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$; $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$; $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn A.



☑ $d\left(A,(SCD)\right) = AH; \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{6a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

☑ $d\left(B,(SCD)\right) = d\left(I,(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}.d\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 345. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Các cạnh bên $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là:

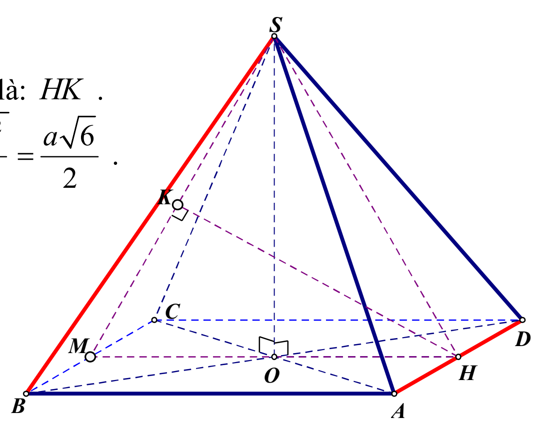
A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Chọn C.

☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB là: HK .

☑ $SH = SM = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}; SO = \sqrt{\dfrac{7a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

☑ Có : $HK = \dfrac{SO.MH}{SM} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{6}}{2}.a}{a\dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

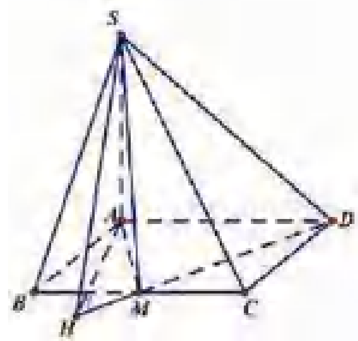


§6. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ GÓC

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = AB = a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm BC. Tính côsin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SDM)

A. $\frac{5}{7}$ **B.** $\frac{6}{7}$ **C.** $\frac{3}{7}$ **D.** $\frac{1}{7}$

Hướng dẫn giải



Kẻ $SH \perp MD, H \in MD$,

mà $SA \perp MD \Rightarrow (SAH) \perp MD \Rightarrow AH \perp MD$

Do đó $((SMD),(ABCD)) = (SH, AH) = SHA = \varphi$

Ta lại có: $S_{AMD} = \frac{1}{2}.3a.a = \frac{3a^2}{2}, MD = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow AH = \frac{2S_{AMD}}{DM} = \frac{6a\sqrt{13}}{13} \Rightarrow SH = \frac{7a\sqrt{13}}{13}$

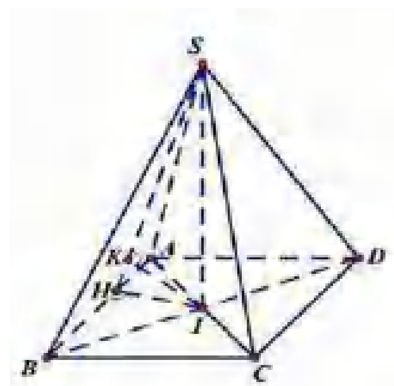
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{AH}{SH} = \frac{6}{7}$. Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$ bằng $\frac{6}{7}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $BAD = 120°$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Hướng dẫn giải



Ta có $BAD = 120° \Rightarrow BAI = 60°$

Suy ra: $\begin{cases} \sin 60° = \frac{BI}{AB} \\ \cos 60° = \frac{AI}{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BI = a\sqrt{3} \\ AI = a \end{cases}$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB. Ta có: $AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SH$

Do đó: $\varphi = (SH, IH) = SHI$

Xét tam giác vuông AIB có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow IH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

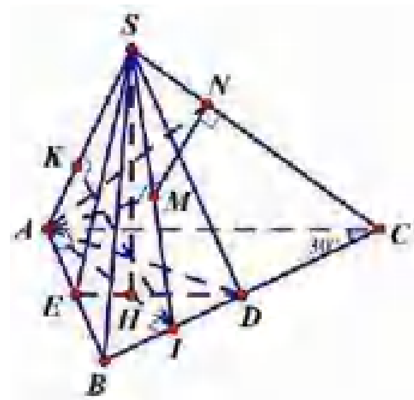
$\tan SHI = \frac{SI}{HI} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SHI = 30°$ hay $\varphi = 30°$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 3*. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, SA = SB$ và $\widehat{ACB} = 30°$, $SA \perp SB$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{3a}{4}$. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{33}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{13}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{65}}{13}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{11}$

Hướng dẫn giải



Gọi D là trung điểm của BC, suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Gọi I, E là trung điểm của BD và AB, H là giao của AI và DE. Khi đó dễ thấy H là trọng tâm tam giác ABD.

Ta có $AI \perp BC, DE \perp AB$

Vì $SA = SB \Rightarrow SE \perp AB$,

suy ra $AB \perp (SDE) \Rightarrow AB \perp SH$

Khi đó ta có $SH \perp (ABC)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên SA, khi đó IK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Do đó $IK = d(SA; BC) = \dfrac{3a}{4}$. Đặt $SH = h, AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SA = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + h^2}$

Lại có $AI.SH = IK.SA = 2S_{SAI} \Rightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{2}h = \dfrac{3a}{4}\sqrt{\dfrac{a^2}{3} + h^2} \Rightarrow h = a$

Gọi M là hình chiếu của A lên SI, khi đó $AM \perp (SBC)$. Gọi N là hình chiếu của M lên SC, khi đó $SC \perp (AMN) \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = \widehat{ANM} = \varphi$

Ta có: $HI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; SI = \dfrac{a\sqrt{39}}{6} \Rightarrow AM = \dfrac{AI.SH}{SI} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

Mặt khác $IM = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{26} < SI \Rightarrow SM = SI - IM = \dfrac{5a}{\sqrt{39}}; SC = \dfrac{a\sqrt{30}}{3}$

Ta lại có $\Delta SMN \sim \Delta SCI \Rightarrow \dfrac{MN}{CI} = \dfrac{SM}{SC} \Rightarrow MN = \dfrac{SM.CI}{SC} = \dfrac{3a\sqrt{130}}{52}$

$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{AM}{MN} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ hay $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{65}}{13}$.

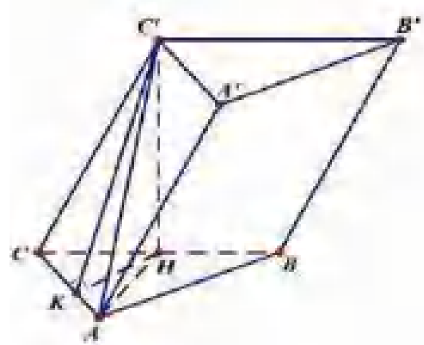
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là φ với $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{65}}{13}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AC = a, AA' = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}, \widehat{BAC} = 120°$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ACC'A')$

A. $75°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** $15°$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm BC. Từ giả thiết suy ra $C'H \perp (ABC)$. Trong đó ΔABC ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos 120° = 7a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{7} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow C'H = \sqrt{C'C^2 - CH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Hạ $HK \perp AC$. Vì $C'H \perp (ABC) \Rightarrow$ đường xiên $C'K \perp AC$

$\Rightarrow ((ABC),(ACC'A')) = C'KH$ (1) ($\Delta C'HK$ vuông tại H nên $C'KH < 90°$)

ΔHAC có $HK = \dfrac{2S_{HAC}}{AC} = \dfrac{S_{ABC}}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan C'KH = \dfrac{C'H}{HK} = 1 \Rightarrow C'KH = 45°$ (2)

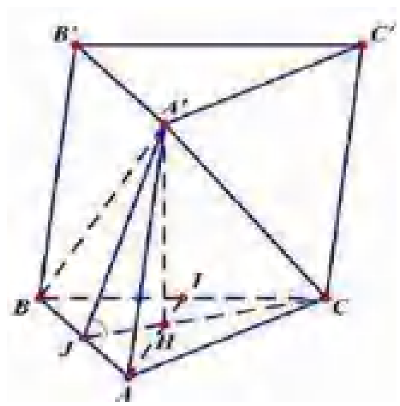
Từ (1) và (2) suy ra $((ABC),(ACC'A')) = 45°$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 5. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC)

A. $75°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của A trên (ABC)

Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $HA = HB = HC$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABC.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AB.

$A'J = \sqrt{AA'^2 - AJ^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{12} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$HJ = \dfrac{1}{3}CJ = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'H = \sqrt{A'J^2 - HJ^2} = \dfrac{a}{2}$

Vì $\begin{cases} A'J \perp AB \\ CJ \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'JC) \perp AB \Rightarrow A'JC$ chính là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC). Khi đó $\tan A'JC = \dfrac{A'H}{JH} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow A'JC = 60°$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB, $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAC) và (ABC) là:

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $HP \perp AC \Rightarrow ((SAC),(ABC)) = SPH \Rightarrow \cos((SAC),(ABC)) = \cos SPH = \dfrac{HP}{SP}$

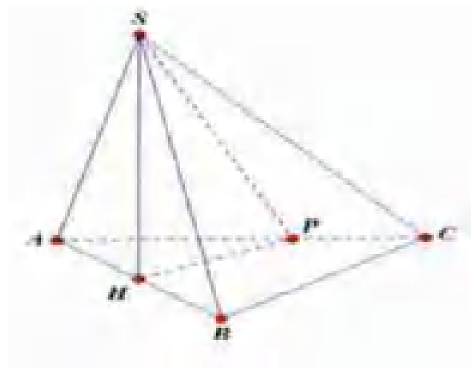
Ta có ngay $((SBC),(ABC)) = SBH \Rightarrow SBH = 60°$

$\Rightarrow \tan 60° = \dfrac{SH}{HB} = \sqrt{3} \Rightarrow SH = HB\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ΔAPH vuông cân $P \Rightarrow HP = \dfrac{AH}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow SP^2 = SH^2 + HP^2 = 12 + 2 = 14 \Rightarrow SP = \sqrt{14}$

$\Rightarrow \cos((SAC),(ABC)) = \dfrac{HP}{SP} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$



Vậy chọn đáp án D.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a. Biết $SO \perp (ABCD), AC = a$ và thể tích khối chóp là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (ABC) là:

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$ **B.** $\dfrac{3}{7}$ **C.** $\dfrac{1}{7}$ **D.** $\dfrac{2}{7}$

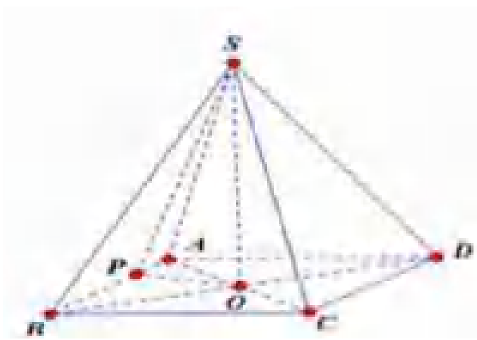
Hướng dẫn giải

Kẻ $OP \perp AB \Rightarrow ((SAB),(ABC)) = SPO$

$\Rightarrow \cos((SAB),(ABC)) = \cos SPO = \dfrac{OP}{SP}$

Cạnh $AB = BC = a$ và

$AC = a \Rightarrow AB = BC = CA = a \Rightarrow \Delta ABC$ đều



$\Rightarrow \sin 60° = \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}OA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ Ta có:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.2S_{ABC} = \dfrac{1}{3}SO.2.\dfrac{1}{2}.a.a.\sin 60° = SO.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SO = 3a \Rightarrow SP^2 = SO^2 + OP^2 = 9a^2 + \dfrac{3a^2}{16} = \dfrac{147a^2}{16}$

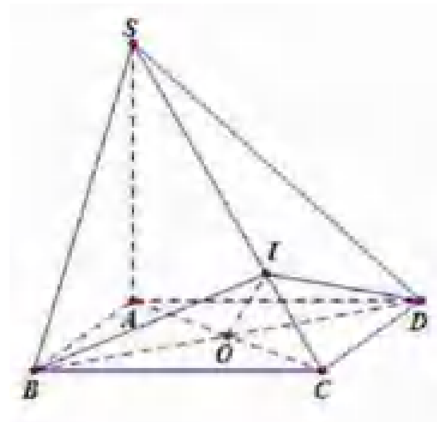
$\Rightarrow SP = \dfrac{7a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos((SAB),(ABC)) = \dfrac{OP}{SP} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{7a\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{1}{7}$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng $60°$ thì độ dài của SA

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $2a$

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$



Kẻ $BI \perp SC$ ta có $\begin{cases} SC \perp SI \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BID)$

$((SBC),(SCD)) = (BI, ID) = 60°$

Trường hợp 1: $BID = 60° \Rightarrow BIO = 30°$

Ta có $\tan BIO = \frac{BO}{IO} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý)

Trường hợp 2: $BID = 120° \Rightarrow BIO = 60°$

Ta có $\tan BIO = \frac{BO}{IO} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

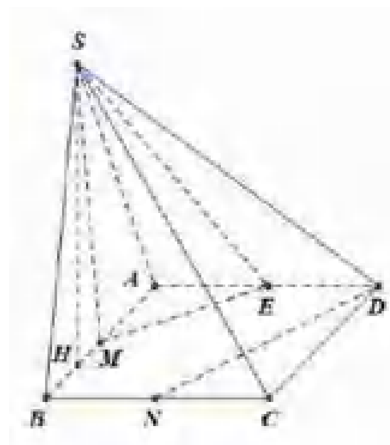
Ta có $\sin ICO = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan ICO = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC.\tan ICO = a$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = \sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc với đáy. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, BC*. Cosin của góc giữa 2 đường thẳng *SM* và *DN* là:

A. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải



Kẻ *ME* song song với *DN* với $E \in AD$ suy ra $AE = \frac{a}{2}$

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM, DN nên $(SM, ME) = \varphi$

Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên *AB*. Ta có $SH \perp (ABCD)$

Suy ra $SH \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$

Do đó $SE^2 = SA^2 + AE^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow SE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $ME = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

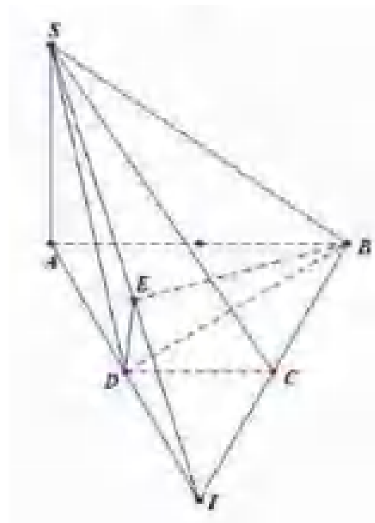
Tam giác *SME* cân tại *E*, có $\cos\alpha = \cos SME = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 10. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a, SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng *ABCD*. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của AD và BC

Ta có $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$

Kẻ $DE \perp SI$ ta có $\begin{cases} SI \perp BD \\ SI \perp DE \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE)$

$\Rightarrow ((SAD),(SBC)) = (DE, BE)$

Ta có $\sin AIS = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ mà $\sin AIS = \dfrac{DE}{DI}$

$\Rightarrow DE = DI.\sin AIS = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

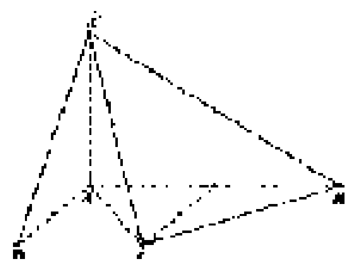
$\Rightarrow \tan DEB = \dfrac{BD}{ED} = \sqrt{7} \Rightarrow \cos DEB = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a, AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải



Ta có $((SBC),(ABCD)) = ACS$

Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan ACS = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SBC) là:

A. $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm AB. Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$

Kẻ $MN \perp SB$ ta có $\begin{cases} SB \perp MN \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMN) \Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (MN, NC) = MNC$

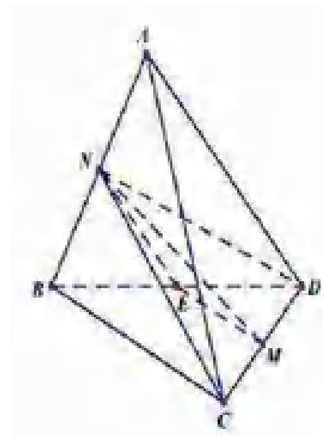
Ta có $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60°$.

Ta có $\sin SBA = \dfrac{MN}{MB} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos MNC = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt (ABC) và (ABD) là các tam giác đều cạnh a, các mặt (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Tính số đo của góc giữa hai mặt đường thẳng AD và BC

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, E lần lượt là các trung điểm của các cạnh CD, AB, BD

Ta có: $\begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp CN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCN) \Rightarrow AB \perp MN$

Do ΔACD cân tại $A \Rightarrow AM \perp CD$

$\Rightarrow AM \perp (BCD) \Rightarrow AM \perp BM \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow DM = \sqrt{ND^2 - NM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^3}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

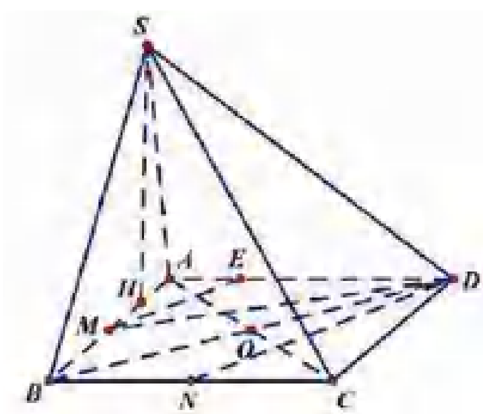
ΔMNE là tam giác đều $\Rightarrow MEN = 60°$. Do $\begin{cases} NE // AD \\ EM // BC \end{cases} \Rightarrow (AD, BC) = (NE, EM) = 60°$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

A. $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$

Do đó SH là đường cao của hình chóp $S.BMDN$

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = a$.

Kẻ $ME \parallel DN \, (E \in AD) \Rightarrow AE = \dfrac{a}{2}$

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN.

Ta có: $(SM, ME) = \varphi$. Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $SA \perp AE$

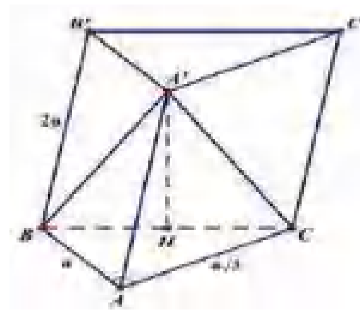
Suy ra $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

ΔSME cân tại E nên $SME = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 15. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA', B'C'$

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

Do đó: $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3}$ (đvtt)

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có $H'B = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ là cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ thì $\varphi = B'BH$

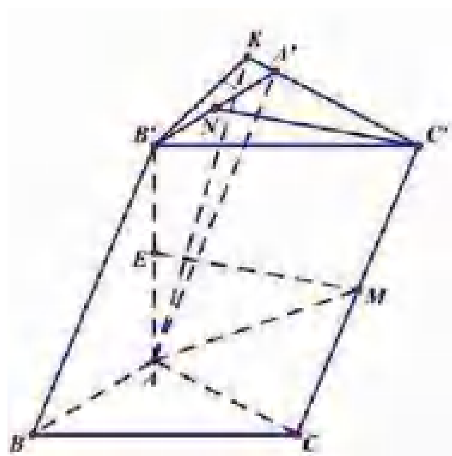
Vậy $\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 16. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a, BAC = 120°$ và AB' vuông góc với đáy $(A'B'C')$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và $A'B'$, mặt phẳng $(AA'C')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30°. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AM và $C'N$

A. $\sqrt{\frac{7}{19}}$ **B.** $2\sqrt{\frac{5}{39}}$ **C.** $2\sqrt{\frac{3}{29}}$ **D.** $2\sqrt{\frac{7}{29}}$

Hướng dẫn giải

Ta có:



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của B' lên $A'C'$, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó: $AKB' = ((A'B'C'),(AA'C')) = 30°$. Trong tam giác $A'KB'$ có $KA'B' = 60°, A'B' = a$ nên

$B'K = A'B'\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $AB'=B'K.\tan 30°=\dfrac{a}{2}$

Gọi E là trung điểm của AB', suy ra $ME\parallel C'N$ nên $\left(C'N,AM\right)=\left(EM,AM\right)$

Vì $AB'\perp C'N\Rightarrow AE\perp EM\Rightarrow\left(C'N,AM\right)=AME$

$AE=\dfrac{1}{2}AB'=\dfrac{a}{4};EM^2=C'N^2=\dfrac{2\left(C'B'^2+C'A'^2\right)-A'B'^2}{4}\Rightarrow EM=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

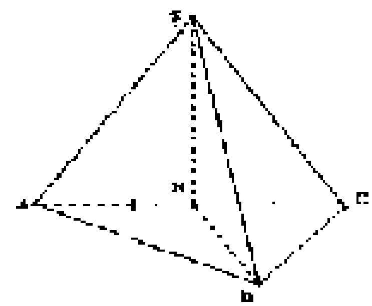
$AM^2=AE^2+EM^2=\dfrac{29a^2}{16}\Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{29}}{4}$. Vậy $\cos AME=\dfrac{ME}{MA}=2\sqrt{\dfrac{7}{29}}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a\sqrt{2},AC=2a$. Mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Cạnh bên SA hợp với mặt đáy một góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. Góc giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $SH\perp AC$

Mặt khác $\left(SAC\right)\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SH\perp\left(ABC\right)$

Mặt khác $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{2}=AB$ nên tam giác ABC vuông cân tại B do đó $BH\perp AC$.

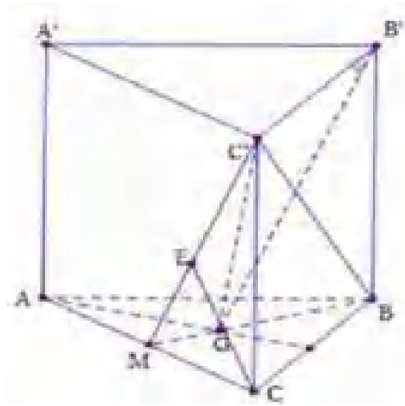
Lại có $SH\perp AC\Rightarrow AC\perp\left(SBH\right)$ do đó $SB\perp AC$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(BGC'\right)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'G$ và BC gần bằng

A. 61,28° **B.** 64,28° **C.** 68,24° **D.** 52,28°

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm của AC ta có: $BM\perp AC$

Dựng $CE\perp CC'\Rightarrow CE\perp\left(C'MB\right)$

Do đó $d\left(C,\left(BC'M\right)\right)=d\left(C,\left(BC'G\right)\right)=GE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $\dfrac{1}{CE^2}=\dfrac{1}{CM^2}+\dfrac{1}{CC'^2}\Rightarrow CC'=a\sqrt{3}$

Lại có

$BM=a\sqrt{3}\Rightarrow BG=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow B'G=\sqrt{BG^2+BB'^2}=\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$ Tương tự ta có $C'G=\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$

Do vậy $\cos C'B'G = \dfrac{C'B'^2 + GB'^2 - GC'^2}{2C'B'.GB'} = \dfrac{3}{\sqrt{39}} \Rightarrow C'B'G \approx 61,29°$

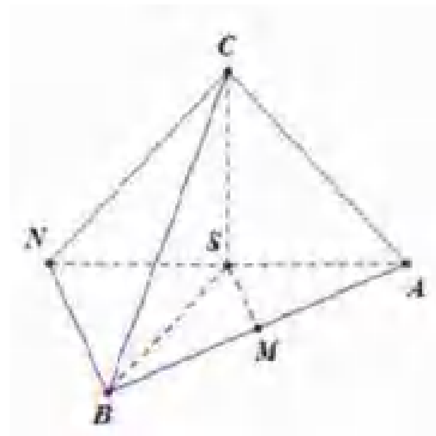
Mặt khác $B'C'//BC \Rightarrow (BC, B'G) = (B'C', B'G) = C'B'G \approx 61,29°$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 19. Cho hình chóp *S.ABCD* có *SA, SB, SC* đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Tính góc giữa hai đường thẳng *SM* và *BC* với *M* là trung điểm của *AB*

A. 30° **B.** 60° **C.** 90° **D.** 120°

Hướng dẫn giải



Qua *B* kẻ đường thẳng *d* song song với *SM*

Và cắt đường thẳng *SA* tại *N*

Do đó $(SM, BC) = (BN, BC) = NBC$

Ta có $SM \parallel BN$ và *M* là trung điểm của *AB*

Nên $SN = SA = SC = a \Rightarrow NC = a\sqrt{2}$

$NV = 2SM = a\sqrt{2}$

Mà $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta NBC$ là tam giác đều

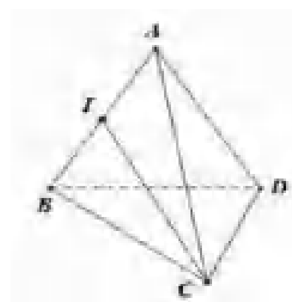
Vậy $NBC = 60° \Rightarrow (SM, BC) = 60°$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 20. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh *a*. Tính góc giữa hai đường thẳng *CI* và *AC*, với *I* là trung điểm của *AB*.

A. 10° **B.** 30° **C.** 150° **D.** 170°

Hướng dẫn giải



Ta có *I* là trung điểm của *AB* nên $(CI, CA) = ICA$

Xét tam giác *AIC* vuông tại *I*, có $AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AC}{2} \Leftrightarrow \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{1}{2}$

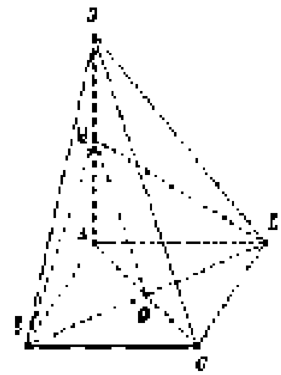
Suy ra $\sin ICA = \dfrac{IA}{CA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ICA = 30° \Rightarrow (CI, CA) = 30°$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 21. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật. Các tam giác *SAB, SAD, SAC* là các tam giác vuông tại *A*. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng *SC* và *BD* biết $SA = \sqrt{3}, AB = a, AD = 3a$.

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{4}{\sqrt{130}}$ **D.** $\dfrac{8}{\sqrt{130}}$

Hướng dẫn giải



Ta có các tam giác *SAB, SAD, SAC* là các tam giác vuông tại *A*.

Nên $SA \perp AB, SA \perp AD \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Gọi $O = AC \cap BD$. Và *M* là trung điểm của *SA*. Do đó $OM \parallel SC$

Hay $SC \parallel (MBD)$ nên $(SC, BD) = (OM, BD) = MOB$

Có

$$BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + AB^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}, MO = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

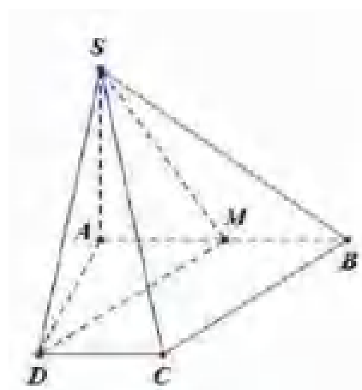
Áp dụng định lý côsin trong tam giác *MOB* ta được $BM^2 = OM^2 + OB^2 - 2OM.OB.\cos MOB$

$\Leftrightarrow \cos MOB = \dfrac{OM^2 + OB^2 - BM^2}{2OM.OB} = \dfrac{8}{\sqrt{130}}$. **Vậy chọn đáp án D.**

Câu 22. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*, *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng *SD* và *BC* biết $AD = DC = a, AB = 2a$, $SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

A. $\dfrac{1}{\sqrt{42}}$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{42}}$ **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{42}}$ **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{42}}$

Hướng dẫn giải



Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Ta có $AM = AD = DC = a$

Mà *AB* song song với *CD* nên *AMCD* là hình vuông cạnh *A*.

Do đó *DM* song song với *BC*.

Suy ra $(SD, BC) = (SD, DM) = SDM$

Lại có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Và $DM = a\sqrt{2}, SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

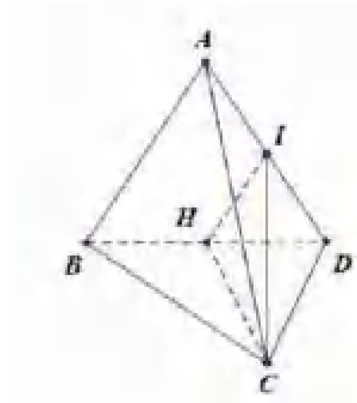
Áp dụng định lý cosin trong tam giác *SDM*, ta được $\cos SDM = \dfrac{SD^2 + DM^2 - SM^2}{2SD.SM} = \dfrac{3}{\sqrt{42}}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 23. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh *a*. Tính côsin góc giữa hai đường thẳng *AB* và *CI* với *I* là trung điểm của *AD*.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BD. Ta có $IH \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (HIC)$

Nên $(AB, CI) = (IH, IC) = HIC$.

Mà $IH = \frac{a}{2}, CH = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác HIC, ta được

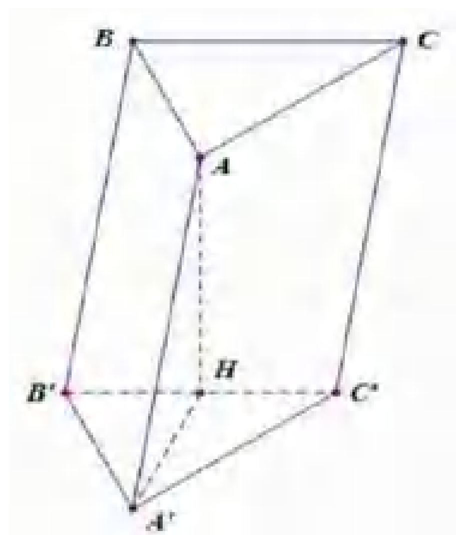
$$\cos HIC = \frac{HI^2 + CI^2 - HC^2}{2HI.CI} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\Rightarrow \cos(AB, CI) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy bằng a. Biết góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$ và H là hình chiếu của đỉnh A lên mặt phẳng $(A'B'C')$, H trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$. Góc giữa BC và AC' là α. Giá trị của $\tan\alpha$ là:

A. 3 **B.** -3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{-1}{3}$

Hướng dẫn giải



Ta có $A'H$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng đáy

Do đó $(AA', (ABC)) = (AA', A'H) = AA'H = 60°$

Lại có $A'H = \frac{a}{2} \Rightarrow AH.\tan 60°.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = B'H$ nên $AB' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Và $AA' = \frac{A'H}{\cos 60°} = a \Rightarrow AC' = a$

Mặt khác $(BC, AC') = (AC', B'C') = AC'B' = \alpha$

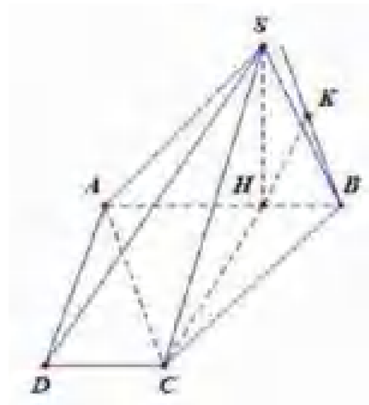
Do đó $\cos\alpha = \frac{AC'^2 + B'C'^2 - AB'^2}{2.AC'.B'C'} = \frac{1}{4}$

Suy ra $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = 3$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại AD, với $AB = 3a, AD = 2a, DC = a$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là H thuộc AB với $AH = 2HB$. Biết $SH = 2a$, cosin của góc giữa SB và AC là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{-1}{5}$

Hướng dẫn giải



Qua B kẻ đường thẳng d song song với AC và cắt CH tại K

Ta có $\left(SB, AC\right) = \left(SB, BK\right) = SBK = \varphi$

Xét hai tam giác đồng dạng ACH và BKH có $\dfrac{CH}{HK} = \dfrac{AH}{BH} = 2$

Nên

$$HK = \frac{CH}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = BK \Rightarrow \begin{cases} SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{5} \\ SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Do đó $\cos SBK = \cos\varphi = \dfrac{SB^2 + BK^2 - SK^2}{2.SB.BK} = \dfrac{1}{5}$. **Vậy chọn đáp án C.**

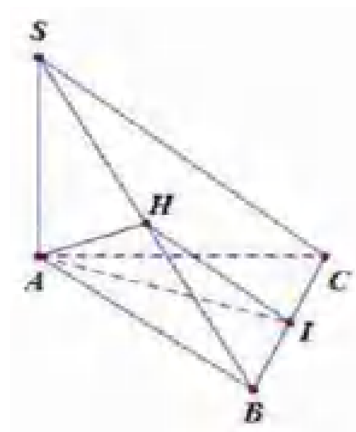
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Biết $SA = a$; $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC. Côsin của góc giữa 2 đường thẳng AI và SC là:

A. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **B.** $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của $SB \Rightarrow IH$ song song với SC.

Do đó $SC \parallel \left(AHI\right) \Rightarrow \left(AI, SC\right) = \left(AI, HI\right) = AIH$



Ta có $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

và $IH = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a$

$AH = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AS^2}{2} - \dfrac{BS^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AHI, có

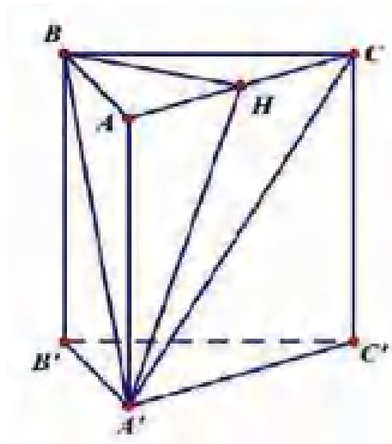
$\cos AIH = \dfrac{AI^2 + HI^2 - AH^2}{2AI.AH} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 27. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $BC = a, AA' = a\sqrt{2}$ và $\cos BA'C = \dfrac{5}{6}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Hướng dẫn giải



Đặt $AB = x$ thì $A'B^2 = A'C^2 = x^2 + 2a^2$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$$\cos BA'C = \frac{A'B^2 + A'C^2 - BC^2}{2A'B.A'C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4a^2 - a^2}{2\left(x^2 + 2a^2\right)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = a$$

Kẻ $BH \perp AC$, khi đó $BH \perp \left(AA'C'C\right)$

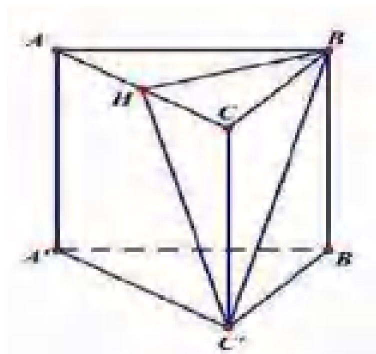
Suy ra góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$ là góc $BA'H$. Trong tam giác vuông $A'BH$ có

$\sin BA'H = \frac{BH}{A'B} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow BA'H = 30°$. **Vậy chọn đáp án A.**

Câu 28. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại *B*. Biết $AB = 3cm, BC' = 3\sqrt{2}cm$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$

A. 90° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 30°

Hướng dẫn giải



Tính góc hợp bởi đường thẳng *BC*, và mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$

Gọi *H* là trung điểm của cạnh *AC*, suy ra HC' là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$

Do đó $\left(BC',\left(ACC'A'\right)\right) = \left(BC',HC'\right)$

Ta có tam giác BHC' vuông tại *H*, cạnh $BH = \frac{3\sqrt{2}}{2}cm$

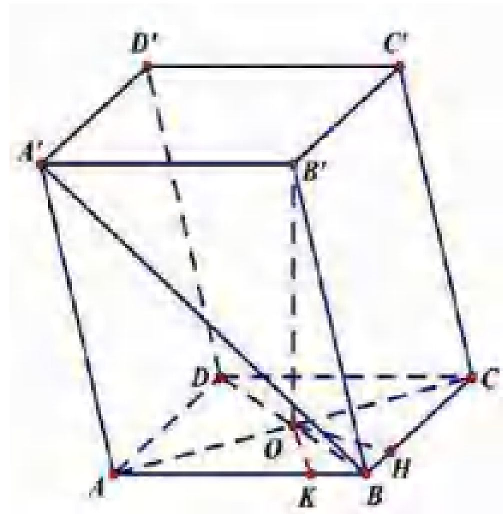
Ta có $\sin HC'B = \frac{BH}{BC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow HC'B = 30°$. Vậy $\left(BC',\left(ACC'A'\right)\right) = 30°$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60°. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 29. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh *a*, góc A = 60°. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy *ABCD*. Cho $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và đáy

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Hướng dẫn giải



Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Theo giả thiết ta có $B'O \perp (ABCD)$

$$\begin{cases} B'B \cap (ABCD) = \{B\} \\ B'O \perp (ABCD), O \in (ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hình chiếu $B'B$ trên $(ABCD)$ là OB

$\Rightarrow (B'B,(ABCD)) = (B'B, BO) = B'BO$. Tam giác ABD có $AB = AD = a, BAD = 60° \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều $\Rightarrow OB = \dfrac{a}{2}$

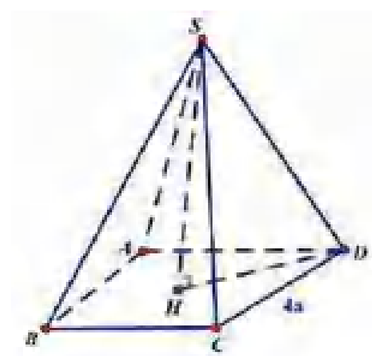
Trong tam giác vuông $B'OB$: $\cos B'OB = \dfrac{OB}{BB'} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B'OB = 60°$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $4a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tam giác SAB có diện tích bằng $\dfrac{8a^2\sqrt{6}}{3}$. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{19}}{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ **C.** $\dfrac{6}{25}$ **D.** $\dfrac{19}{25}$

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow (SD,(SBC)) = HSD \Rightarrow \cos(SD,(SBC)) = \cos HSD = \dfrac{SH}{SD}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}SA.AB = \dfrac{1}{2}SA.4a = \dfrac{8a^2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$

$V_{D.SBC} = \dfrac{1}{3}DH.S_{SBC}$ và

$V_{D.SBC} = V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{BCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{1}{2}.4a.4a = \dfrac{32a^3\sqrt{6}}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}DH.S_{SBC} = \dfrac{32a^3\sqrt{6}}{9} \Rightarrow DH = \dfrac{32a^3\sqrt{6}}{3S_{SBC}}$

Từ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow S_{SBC} = \dfrac{1}{2}BC.SB = \dfrac{1}{2}.4a.SB = 2a.SB$

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \left(\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 16a^2 = \dfrac{80a^2}{3} \Rightarrow SB = a\sqrt{\dfrac{80}{3}} \Rightarrow S_{SBC} = 2a^2\sqrt{\dfrac{80}{3}}$

Thế vào (1) $\Rightarrow DH = \dfrac{32a^3\sqrt{6}}{3.2a^2\sqrt{\dfrac{80}{3}}} = \dfrac{4a\sqrt{10}}{5}$

$SD^2 = SA^2 + AD^2 = \left(\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 16a^2 = \dfrac{80a^2}{3} \Rightarrow SD = a\sqrt{\dfrac{80}{3}}$

$\Rightarrow SH^2 = SD^2 - HD^2 = \dfrac{80a^2}{3} - \left(\dfrac{4a\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \dfrac{304a^2}{15}$

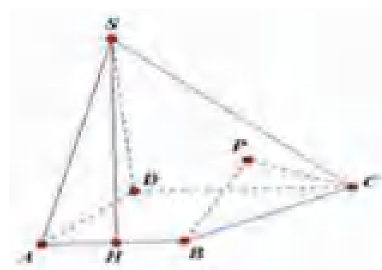
$\Rightarrow SA = a\sqrt{\dfrac{304}{15}} \Rightarrow \cos\left(SD,(SBC)\right) = \dfrac{SH}{SD} = \dfrac{a\sqrt{\dfrac{304}{15}}}{a\sqrt{\dfrac{80}{3}}} = \dfrac{\sqrt{19}}{5}$. **Chọn A.**

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $CD = 2a, AD = AB = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm H của đoạn AB. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Tan của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi P là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SCD)



$\Rightarrow \left(BC,(SCD)\right) = BCP \Rightarrow \tan\left(BC,(SCD)\right) = \tan BCP = \dfrac{BP}{PC}$

$AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

$\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right) = d\left(B,(SCD)\right) = BP \Rightarrow BP = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Ta có $BC^2 = AD^2 + (CD - AB)^2 = a^2 + (2a - a)^2 = 2a^2$

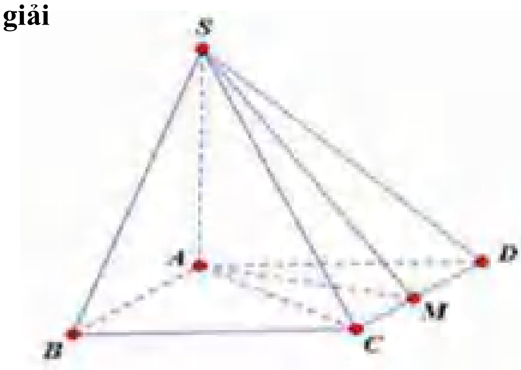
$\Rightarrow PC^2 = BC^2 - BP^2 = 2a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{16a^2}{9}$

$\Rightarrow PC = \dfrac{4a}{3} \Rightarrow \tan\left(BC,(SCD)\right) = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{4a}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a; AD = 2a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD, biết SC tạo với đáy góc 45°. Cosin góc tạo bởi đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{13}}{29}$ **C.** $\frac{\sqrt{377}}{29}$ **D.** $\frac{\sqrt{277}}{29}$

Hướng dẫn giải



Từ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SM,(ABCD)) = SMA$

$\Rightarrow \cos(SM,(ABCD)) = \cos SMA = \frac{AM}{SM}$

Từ $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC,(ABCD)) = SCA$

$\Rightarrow SCA = 45° \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A

$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$

$\Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 = 16a^2 + 13a^2 = 29a^2$

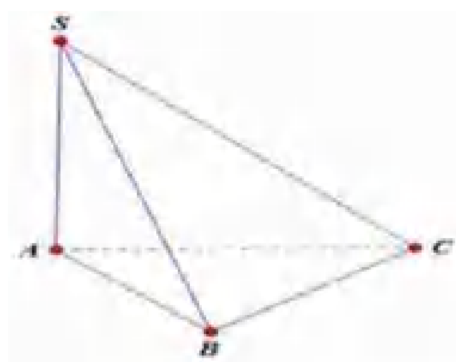
$\Rightarrow SM = a\sqrt{29} \Rightarrow \cos(SM,(ABCD)) = \frac{AM}{SM} = \frac{a\sqrt{13}}{a\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{377}}{29}$. **Vậy chọn đáp án C**

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = a; SA \perp (ABC)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° .Cosin góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\frac{\sqrt{10}}{20}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Hướng dẫn giải

Từ $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC,(ABC)) = SCA \Rightarrow \cos(SC,(ABC)) = \cos SCA = \frac{AC}{SC}$



ΔABC vuông cân $B \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

+ Ta có ngay

$(SB,(ABC)) = SBA \Rightarrow SBA = 60°$

$\Rightarrow \tan 60° = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos(SC,(ABC)) = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}, BC = a$. Biết $A'C = 3a$. Cosin góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt đáy (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$

Hướng dẫn giải

Lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC \Rightarrow A'A \perp (ABC)$

$\Rightarrow (A'B,(ABC)) = A'BA \Rightarrow \cos(A'B,(ABC)) = \cos A'BA = \dfrac{AB}{A'B}$

ΔABC vuông tại $B \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$

$\Rightarrow A'A^2 = A'C^2 - AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow A'B^2 = A'A^2 + AB^2 + 5a^2 + 3a^2 = 8a^2 \Rightarrow A'B = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos(A'B,(ABC)) = \cos A'BA = \dfrac{AB}{A'B} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **Vậy chọn đáp án C.**

Câu 35. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAB* là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi *H* và *K* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB* và *AD*. Côsin của góc giữa *SC* và mặt phẳng (SHD) là

A. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **B.** $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ **C.** $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ **D.** $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

Hướng dẫn giải

Ta có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2 \Rightarrow SB \perp BC$ mà $BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$ mà $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ $CE \perp HD \Rightarrow CE \perp (SHD) \Rightarrow (SC,(SHD)) = (SC,SE) = CSE$

Ta có $\dfrac{1}{2}CE.HD = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow CE = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

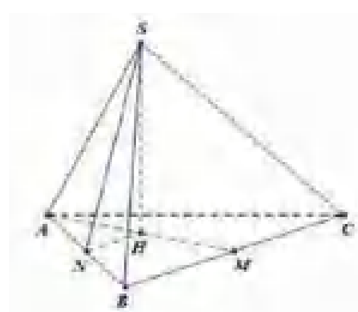
$\Rightarrow SE = \sqrt{SC^2 - CE^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5} \Rightarrow \cos CSE = \dfrac{SE}{SC} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 36. Cho khối chóp *S.ABC* có đáy là tam giác cân tại *A* có $AB = AC = 4a$, góc $BAC = 120°$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*, *N* là trung điểm của *AB*, ΔSAM là tam giác cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa *SN* và mặt phẳng (ABC) là:

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Hướng dẫn giải



Ta có $(SN,(ABC)) = (SN,NH) = SNH$

Ta có $MAC = 60° \Rightarrow AM = 2a, MC = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}AM = a \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a$

Ta có $NH = \dfrac{1}{2}BM = a\sqrt{3}$

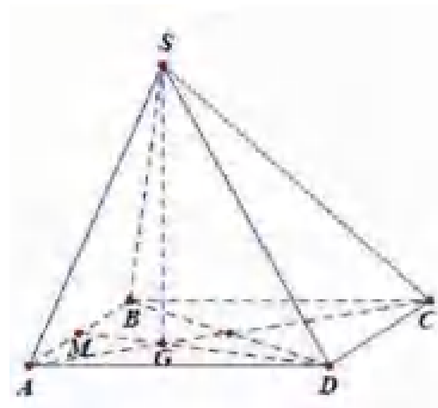
$\Rightarrow \tan SNH = \dfrac{SH}{NH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SNH = 30° \Rightarrow (SN,(ABC)) = 30°$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trọng tâm G của ΔABD. Biết $SG = 2a$, cosin của góc giữa SD và $(ABCD)$ là:

A. $\sqrt{\frac{5}{21}}$ **B.** $-\sqrt{\frac{5}{21}}$ **C.** $\sqrt{\frac{5}{41}}$ **D.** $-\sqrt{\frac{5}{41}}$

Hướng dẫn giải



Ta có $(SD,(ABCD)) = (SD,GD) = SDG$

Ta có $DG = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}\sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow \tan SDG = \frac{SG}{GD} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

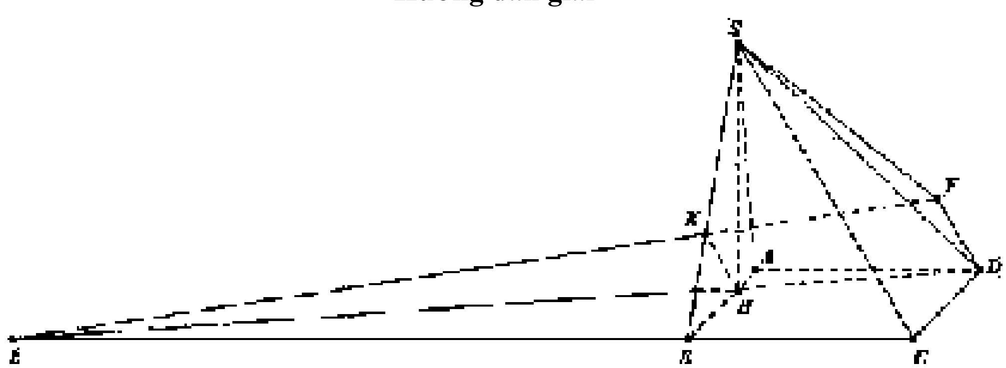
$\Rightarrow \cos SDG = \sqrt{\frac{5}{41}} \Rightarrow \cos(SD,(ABCD)) = \sqrt{\frac{5}{41}}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 38. Cho hình chóp $S.\ ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a, AD = a\sqrt{3}$. Điểm H nằm trên cạnh AB thỏa mãn $AH = \frac{1}{3}HB$. Hai mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = a\sqrt{5}$. Cosin của góc giữa SD và (SBC) là:

A. $\sqrt{\frac{5}{12}}$ **B.** $\sqrt{\frac{5}{13}}$ **C.** $\sqrt{\frac{4}{13}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải



Kẻ $HE \perp SB \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Gọi $E = DH \cap BC$, kẻ $DF // HK\ (F \in EK)$

$\Rightarrow DF \perp (SBC) \Rightarrow (SD,(SBC)) = (SD,SF) = DSF$

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a$. Xét ΔSHB có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{13}{36a^2} \Rightarrow HK = \frac{6a}{\sqrt{13}}$

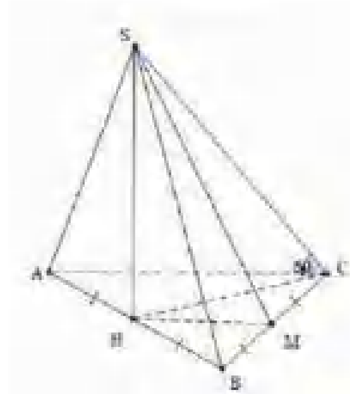
Ta có $\frac{EH}{ED} = \frac{HB}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{HK}{CF} = \frac{EH}{ED} = \frac{3}{4} \Rightarrow DF = \frac{8a}{\sqrt{13}}$. Ta có $SD = \sqrt{SH^2 + DH^2} = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SF = \sqrt{SD^2 - DF^2} = \frac{2a\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos DSF = \frac{SF}{SD} = \sqrt{\frac{5}{13}}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 39. Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy là tam giác đều cạnh *a*. Tam giác *SAB* cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết *SC* tạo với đáy một góc 60° , gọi *M* là trung điểm của *BC*. Cosin góc tạo với *SM* và mặt đáy là:

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Hướng dẫn giải



Gọi *H* là trung điểm của *AB* khi đó $SH \perp AB$

Mặt khác $(SAB) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$

Khi đó $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$

Do *M* là trung điểm của *BC* nên $HM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\cos SMH = \dfrac{HM}{\sqrt{HM^2 + SH^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **Vậy chọn đáp án B.**

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh bên và cạnh đáy bằng *a*. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Khẳng định nào sau đây đúng?

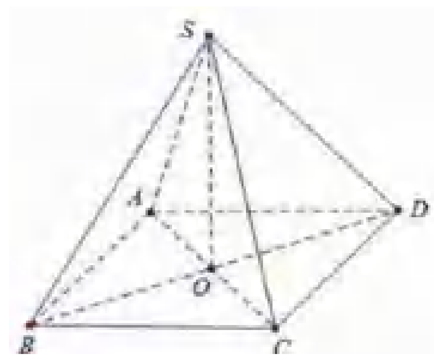
A. Góc giữa đường thẳng *SB* và mặt phẳng (SCD) bằng 90°.

B. Góc giữa đường thẳng *SB* và mặt phẳng (SCD) bằng góc giữa đường thẳng *BC* và mặt phẳng (SCD).

C. Góc giữa đường thẳng *SA* và mặt phẳng (SCD) lớn hơn góc giữa đường thẳng *BC* và mặt phẳng (SCD).

D. Góc giữa đường thẳng *SA* và mặt phẳng (SCD) bằng tích của $\sqrt{2}$ với góc giữa đường thẳng *SO* và mặt phẳng (SCD).

Chọn đáp án B



Ta có: $\sin\left(\widehat{SB,(SCD)}\right) = \dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{SB}$

Tương tự $\sin\left(\widehat{BC,(SCD)}\right) = \dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{BC}$.

Mặt khác $SB = BC = a$

nên $\sin\left(\widehat{SB,(SCD)}\right) = \sin\left(\widehat{BC,(SCD)}\right)$.

Câu 41. Cho tứ diện *ABCD* có cạnh *AB, BC, BD* bằng nhau và đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa *AC* và (BCD) là góc *ACD* **B.** Góc giữa *AD* và (ABC) là góc *ADB*

C. Góc giữa *AC* và (ABD) là góc *CAB* **D.** Góc giữa *CD* và (ABD) là góc *CBD*

Chọn đáp án C

Ta có: $\left(\widehat{AC,(BCD)}\right) = \widehat{ACB}; \left(\widehat{AD,(ABC)}\right) = \widehat{DAB}$

$\widehat{(AC,(ABD))} = \widehat{CAB}; \widehat{(CD,(ABD))} = \widehat{CDB}$.

Câu 42. Cho điểm *S* không phụ thuộc mặt phẳng (P), đoạn vuông góc $SH = 1$ và các đoạn xiên $SA = 2, SB = 3$ và $SC = 4$. Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi *SA, SB, SC* và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha < 45°$ **B.** $\beta > 45°$ **C.** $\beta < \gamma$ **D.** $\gamma > 60°$

Chọn đáp án A

Ta có: $\sin\alpha = \frac{SH}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°; \sin\beta = \frac{1}{3}; \sin\gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow 45° > \alpha > \beta > \gamma$.

Câu 43. Cho hình vuông *ABCD* có tâm *O* và cạnh bằng 2*a*. Trên đường thẳng qua *O* và vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm *S*. Nếu góc giữa *SA* và $(ABCD)$ có số đo bằng 45° thì độ dài đoạn *SO* bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$ **B.** $SO = a\sqrt{2}$ **C.** $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án B

Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAO} = 45°$

Lại có $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = OA = a\sqrt{2}$.

Câu 44. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a*; *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa *SC* và $(ABCD)$ có số đo bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Chọn đáp án C

Ta có: $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$. Do đó $\widehat{SC,(ABCD)} = 60°$.

Câu 45. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Hình chiếu vuông góc của *S* lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh *BC*. Biết tam giác *SBC* là tam giác đều. Số đo của góc giữa *SA* và (ABC) bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Chọn đáp án B

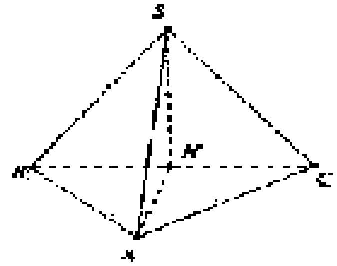
Gọi *H* là trung điểm của *BC* suy ra $SH \perp (ABC)$

Lại có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SAH} = 45° = \widehat{(SA,(ABC))}$.

Câu 46. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của *S* lên (ABC) trùng với trung điểm của cạnh *BC*. Biết $SB = a$, khi đó số đo góc giữa *SA* và (ABC) bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Chọn đáp án C



Gọi H là trung điểm của BC suy ra $SH \perp (ABC)$

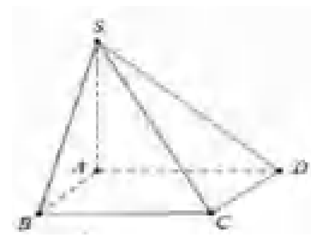
Lại có $AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$; Lại có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60° = \left(\widehat{SA,(ABC)}\right)$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mp(SAB) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$ **C.** $\tan\alpha = 1$ **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$

Chọn đáp án A



Ta có $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

$\Rightarrow \left(\widehat{CS,(SAB)}\right) = \widehat{CSB} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa mp(SCD) và $mp(ABCD)$ là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau:

A. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\tan\alpha = 1$ **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$ **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$

Chọn đáp án B

Ta có $SA \perp (ABCD)$ và $AD \perp CD$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SDA} \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = 1$.

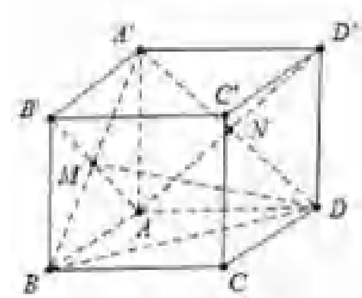
Câu 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

C. Góc giữa mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.



Chọn đáp án A

Gọi $M = A'B \cap AB' \Rightarrow AM \perp A'B$

$$\Rightarrow \alpha = \overline{\left(\left(A'BD\right),\left(ABB'A'\right)\right)} = \widehat{DMA} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{AD}{AM} = \frac{AD}{\frac{AB}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\,.$$

Gọi $N = A'D \cap AD' \Rightarrow AN \perp A'D$

$$\Rightarrow \beta = \overline{\left(\left(A'BD\right),\left(ADD'A'\right)\right)} = \widehat{BNA} \Rightarrow \tan\beta = \frac{AB}{AN} = \frac{AB}{\frac{AD}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\,.$$

Do đó $\alpha = \beta$.

Hơn nữa $\left(CDC'D'\right)//\left(ABB'A'\right) \Rightarrow \alpha = \overline{\left(\left(A'BD\right),\left(ABB'A'\right)\right)} = \overline{\left(\left(A'BD\right),\left(CDC'D'\right)\right)}$

$\left(BCC'B'\right)//\left(ADD'A'\right) \Rightarrow \beta = \overline{\left(\left(A'BD\right),\left(ADD'A'\right)\right)} = \overline{\left(\left(A'BD\right),\left(BCC'B'\right)\right)}$

Từ đó A đúng và B, C, D sai.

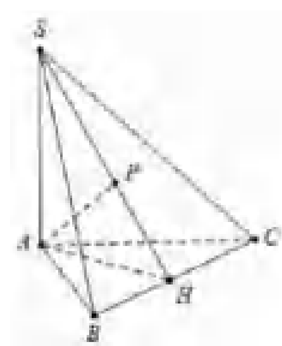
Câu 50. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp \left(ABC\right)$ và đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\left(SAB\right) \perp \left(ABC\right)$

B. $\left(SAB\right) \perp \left(SAC\right)$.

C. Vẽ $AH \perp BC, \left(H \in BC\right) \Rightarrow$ góc AHS là góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABC\right)$.

D. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(SAC\right)$ là góc *ACB*.



Chọn đáp án D

Từ $SA \perp \left(ABC\right) \Rightarrow \left(SAB\right) \perp \left(ABC\right) \Rightarrow$ A đúng

Ta có $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp \left(SAC\right) \Rightarrow \left(SAB\right) \perp \left(SAC\right) \Rightarrow B$ đúng

Rõ ràng C đúng.

Nếu D đúng thì $SC \perp BC$ và $SC \perp AC$ mà điều này không xảy ra nên D sai.

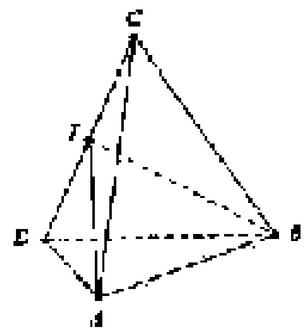
Câu 51. Cho tứ diện *ABCD* có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi *I* là trung điểm của *CD*. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(ACD\right)$ và $\left(BCD\right)$ là góc *AIB*.

B. $\left(BCD\right) \perp \left(AIB\right)$.

C. Góc giữa mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc *CBD*.

D. $(ACD) \perp (AIB)$.



Chọn đáp án C

Tam giác *ACD* cân tại *A* và tam giác *BCD* cân tại *B*.

Mà *I* là trung điểm của cạnh $CD \Rightarrow \begin{cases} CD \perp IA \\ CD \perp IB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (IAB)$.

Từ đó ta có ngay A, B, D đúng.

Nếu C đúng thì $AB \perp BC$ và $AB \perp BD$ mà ta không thể có điều này nên C sai.

Câu 52. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. Góc *SBA** **B.** Góc *SCA* **C.** Góc *SCB* **D.** Góc *SIA* với *I* là trung điểm của *BC*

Chọn đáp án A

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SBA}$.

Câu 53. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông và *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây sai?

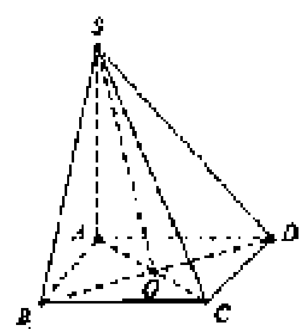
A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc *ABS*

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc *SOA* (với *O* là tâm của hình vuông *ABCD*)

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc *SDA*

D. $(SAC) \perp (SBD)$

Chọn đáp án C



Ta có $AB \perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SBA} \Rightarrow A$ đúng

+) $AO \perp BD \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SOA} \Rightarrow B$ đúng

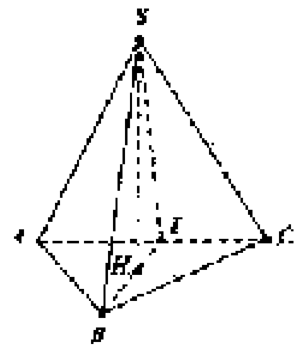
+) $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow C$ sai

+) $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC) \Rightarrow D$ đúng.

Câu 54. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng của tứ diện đều bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Chọn đáp án D



Kẻ $SH \perp (ABC)$ tại H và gọi $I = BH \cap AC$.

Ta có $\cos\left(\widehat{(SAC),(ABC)}\right) = \cos\widehat{SIH} = \dfrac{IH}{IS}$.

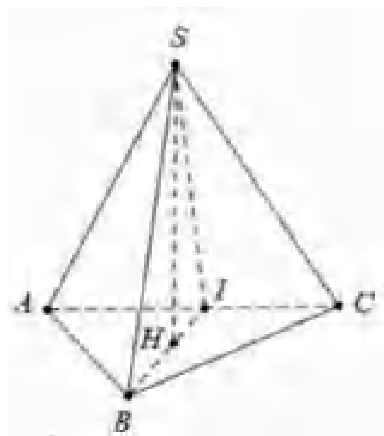
Tam giác ABC đều $\Rightarrow IH = \dfrac{AC}{2\sqrt{3}}$.

Tam giác SAC đều $\Rightarrow IS = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(\widehat{(SAC),(ABC)}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Câu 55. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Số đo của góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$

Chọn đáp án C



Gọi $I = BH \cap AC$.

Góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBH}$.

Ta có $\tan\widehat{SBH} = \dfrac{SH}{HB} = \dfrac{a}{HB}$.

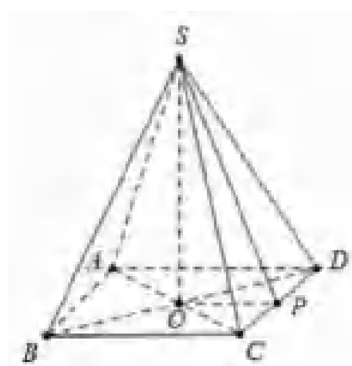
Tam giác ABC đều $\Rightarrow BH = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow \tan\widehat{SBH} = \dfrac{a}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBH} = 60°$.

Câu 56. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$

Chọn đáp án B



Ta có $SO \perp (ABCD)$ và tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

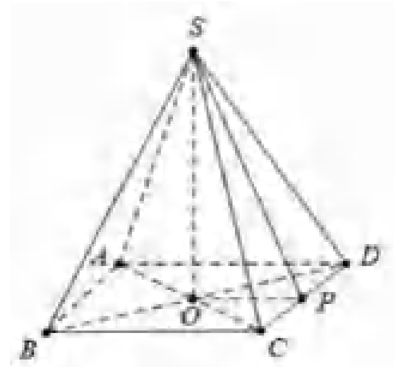
Kẻ $OP \perp CD\,(P \in CD) \Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SPO}$.

Lại có $\tan\widehat{SPO} = \dfrac{SO}{OP} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SPO} = 45°$.

Câu 57. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy bằng

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Chọn đáp án B



Ta có $SO \perp (ABCD)$ và tứ giác *ABCD* là hình vuông.

Kẻ $OP \perp CD (P \in CD) \Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{SPO}$.

Cạnh $SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow SO = \frac{a}{\sqrt{2}}$

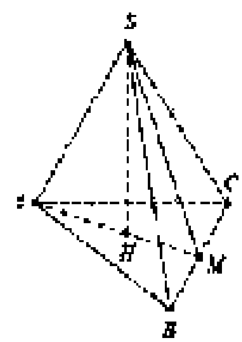
$\Rightarrow SP^2 = SO^2 + OP^2 = \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow SP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{SPO} = \frac{OP}{SP} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 58. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Khi đó, độ dài đường cao *SH* bằng

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Chọn đáp án A



Gọi *M* là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Ta có ΔSBC cân $\Rightarrow SM \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAM)$.

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA} = 60°$.

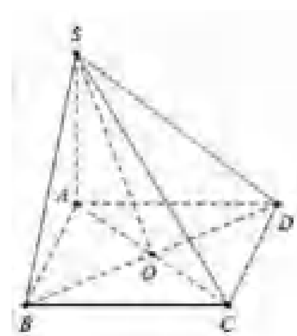
Gọi *H* là hình chiếu của *S* trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó $\widehat{SMH} = 60° \Rightarrow \tan\widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60°.\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$.

Câu 59. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a*; *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa *SB* và (SAC) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{14}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{14}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{14}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{14}$

Chọn đáp án B



Gọi *O* là tâm của hình vuông *ABCD*.

Ta có $AC \perp BO$ và $SA \perp BO \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của *SB* trên mặt phẳng (SAC).

$\Rightarrow \widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{(SB, SO)} = \widehat{BSO} \Rightarrow \sin\widehat{BSO} = \frac{BO}{SB}$.

Mà $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7} \Rightarrow \sin\widehat{BSO} = \frac{\sqrt{14}}{14}$.

Câu 60. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a, BC = 2a, CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đáy ABC là tam giác vuông

B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C')$ vuông góc với nhau

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng $45°$

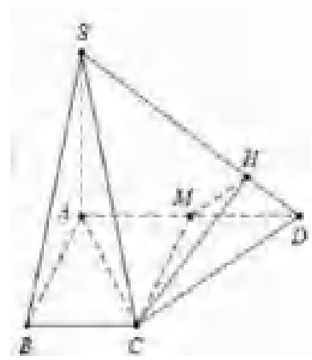
D. $AC' = 2a\sqrt{2}$

Chọn đáp án C

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = BC = a, AD = 2a$. Nếu góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$ thì góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ **D.** $45°$

Chọn đáp án A



Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} = 45° \Rightarrow SA = AC$.

Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow CM \perp AD \Rightarrow CM \perp (SAD)$.

Kẻ $CH \perp SD$ mà $CM \perp SD \subset (SAD) \Rightarrow SD \perp (CMH)$.

$\Rightarrow \widehat{((SAD),(SCD))} = \widehat{(CH, MH)} = \widehat{CHM}$.

Mà $CM = a, CH = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\widehat{CHM} = \frac{CM}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{CHM} = 60°$.

Câu 62. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, $A'D'$. Góc giữa MP và $C'N$ bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Chọn đáp án D

Ta có $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C'N} = \left(\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'P}\right).\left(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CN}\right) = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{B'P}.\overrightarrow{CN}$ (1)

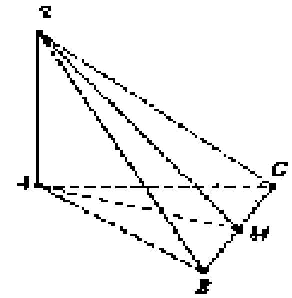
Mặt khác $\overrightarrow{B'P} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'P} \Rightarrow \overrightarrow{B'P}.\overrightarrow{CN} = \left(\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'P}\right).\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{B'A'}.\overrightarrow{CN}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C'N} = \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{CN} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow MP \perp C'N$.

Câu 63. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$ và SA vuông góc với đáy. Để thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $a^3\sqrt{3}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** Đáp án khác

Chọn đáp án A



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}\Rightarrow SA=3a$.

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow\begin{cases}SM\perp BC\\AM\perp BC\end{cases}$.

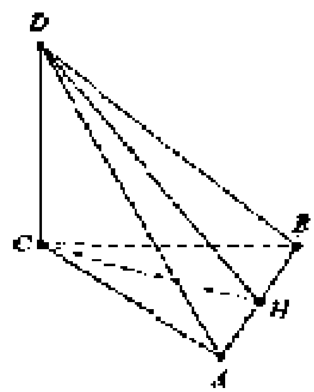
$\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\left(\widehat{SM,AM}\right)=\widehat{SMA}$.

Xét ΔSAM vuông tại A, có $\tan\widehat{SMA}=\frac{SA}{AM}=\frac{3a}{a\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SMA}=60°$.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=72cm, CA=58cm, BC=50cm, CD=40cm$ và $CD\perp(ABC)$. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $60°$ **D.** Đáp án khác

Chọn đáp án A



Kẻ $CH\perp AB(H\in AB)\Rightarrow AB\perp(CDH)$.

$\Rightarrow\left(\widehat{(ABD),(ABC)}\right)=\left(\widehat{DH,CH}\right)=\widehat{DHC}\in(0;90°)$.

Xét ΔABC có $\cos\widehat{ACB}=\frac{17}{145}$

$\Rightarrow\sin\widehat{ACB}=\frac{144}{145}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=1440$

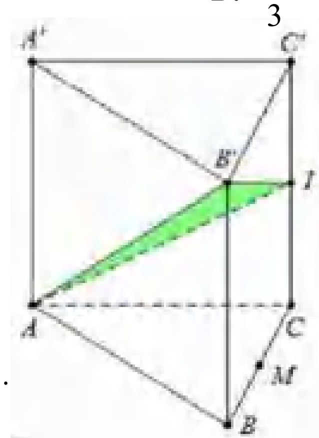
Mà $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CH.AB\Rightarrow CH=\frac{2.1440}{72}=40=CD$

$\Rightarrow\widehat{DHC}=45°$.

Câu 65. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, góc $BAC=120°$, $BB'=a$ và I là trung điểm của CC'. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\sqrt{\frac{3}{10}}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Chọn đáp án B



Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow\widehat{BAM}=60°$.

Xét ΔABM vuông tại M, có $\sin\widehat{MAB}=\frac{BM}{AB}$.

$\Rightarrow BM=\sin 60°.AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BC=2.BM=a\sqrt{3}$.

Ta có $AB'=\sqrt{AB^2+B'B^2}=a\sqrt{2}, IB'=\sqrt{IC'^2+B'C'^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Và $AI=\sqrt{AC^2+IC^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow AI^2+AB'^2=IB'^2\Rightarrow \Delta AB'I$ vuông

$\Rightarrow S_{\Delta AB'I}=\dfrac{1}{2}.AI.AB'=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$ và $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AM.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mà mp$\left(ABC\right)$ là hình chiếu của mp$\left(AB'I\right)\Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{S'}{S}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$.

Câu 66. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, $AA'=A'B=A'C=m$. Để góc giữa mặt bên $\left(ABB'A'\right)$ và mặt đáy bằng 60° thì giá trị của m là

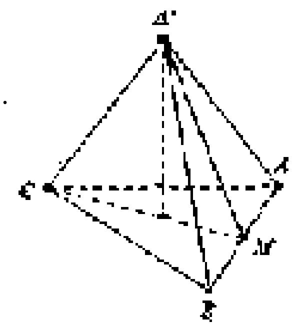
A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn đáp án D

Gọi M là trung điểm của $AB\Rightarrow AB\perp CM$.

Mà $A'A=A'B\Rightarrow A'M\perp AB\Rightarrow AB\perp\left(A'MC\right)$.

Khi đó $\widehat{\left(\left(A'AB\right),\left(ABC\right)\right)}=\widehat{\left(A'M,CM\right)}=\widehat{A'MC}=60^\circ$.



Xét $\Delta A'AB$ có $A'M\perp AB\Rightarrow A'M=\sqrt{A'A^2-AM^2}=\sqrt{m^2-\dfrac{a^2}{4}}$.

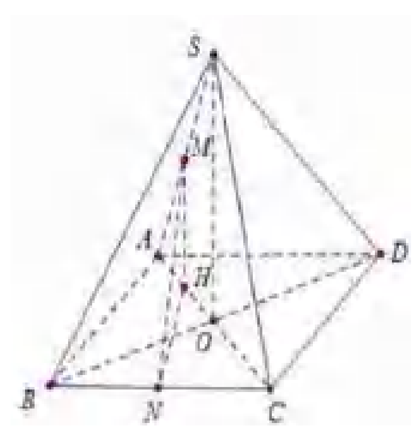
Và $CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'C^2=A'A^2+CM^2-2.A'A.CM.\cos\widehat{A'MC}$

$\Rightarrow m^2=m^2+\dfrac{3a^2}{4}-2m.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 60^\circ\Rightarrow m=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 67. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *O* là tâm của đáy và *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *SA*, *BC*. Nếu góc giữa *MN* và $\left(ABCD\right)$ bằng 60° thì độ dài đoạn *MN* là

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án C



Dựng $MH\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow MH//SO$ và $MH=\dfrac{SO}{2}$

Ta có: $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow HC=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4};NC=\dfrac{a}{2}$

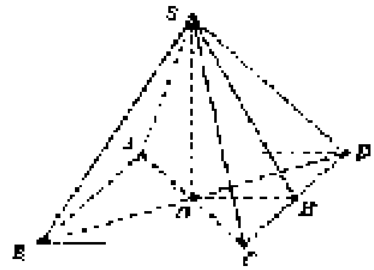
Do đó $HN=\sqrt{HC^2+NC^2-2HC.CN\cos 45^\circ}=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

Do đó $MN\cos\widehat{MNH}=HN\Rightarrow MN=\dfrac{HN}{\cos 60^\circ}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 68. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*. Biết $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn nội tiếp đáy *ABCD* có bán kính bằng *a*. Góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy bằng

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$

Chọn đáp án C



Dựng $OH \perp CD$, lại có $SO \perp CD \Rightarrow CD \perp SHO$

Mặt khác $OH = r = a$

và $\tan\widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SHO} = 60°$

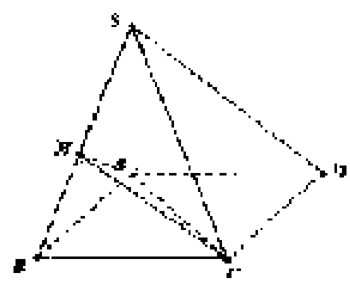
Do đó $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = 60°$.

Câu 69. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a*; *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc β giữa *AC* và (SBC) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$ **C.** $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$ **D.** $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Chọn đáp án D

Dựng $AH \perp SB$. Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$



Khi đó $AH \perp (SBC)$.

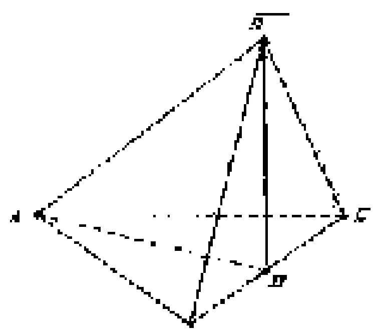
Mặt khác $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

Suy ra $\sin\beta = \sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} : \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 70. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Hình chiếu vuông góc của *S* lên (ABC) trùng với trung điểm *H* của cạnh *BC*. Biết tam giác *SBC* là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa *SA* và (ABC).

A. $60°$ **B.** $75°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Chọn đáp án C



Ta có tam giác *ABC* đều nên $AH \perp BC; AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác tam giác *SBC* đều cạnh *a* nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

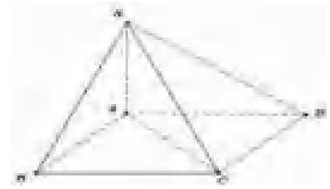
Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH \Rightarrow \Delta SHA$ vuông cân tại *H*.

Khi đó $\widehat{SAH} = 45°$ suy ra $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = 45°$.

Câu 71. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa *SC* và mp$(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30°$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\alpha = 45°$ **D.** $\alpha = 60°$

Chọn đáp án D



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

Do đó $\alpha = \widehat{SCA} = 60°$

Câu 72. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng *a* và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa *SC* và $(ABCD)$.

A. 30° **B.** 60° **C.** 75° **D.** 45°

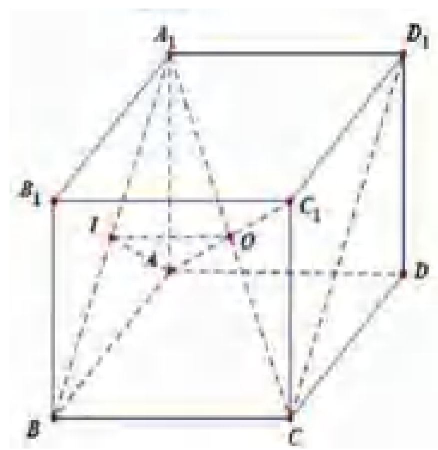
Chọn đáp án A

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Do đó $\alpha = \widehat{SCA} = 30°$

Câu 73. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp(A_1BCD_1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30°$ **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $\alpha = 45°$ **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$

Chọn đáp án D



Gọi *O* là tâm hình lập phương và *I* là tâm hình chữ nhật ABB_1A_1 ta có: $\begin{cases} AI \perp A_1B \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCD_1A_1)$

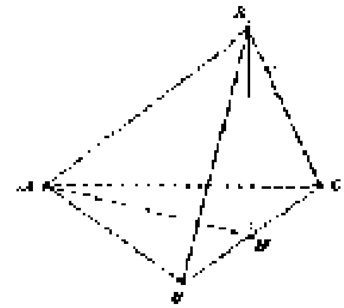
Khi đó $\left(\widehat{AC_1, (A_1BCD_1)}\right) = \widehat{AOI}$

Mặt khác $\tan\widehat{AOI} = \dfrac{AI}{OI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$

Câu 74. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của *S* lên (ABC) trùng với trung điểm *BC*. Biết $SB = a$. Tính số đo góc giữa *SA* và (ABC).

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Chọn đáp án C



Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

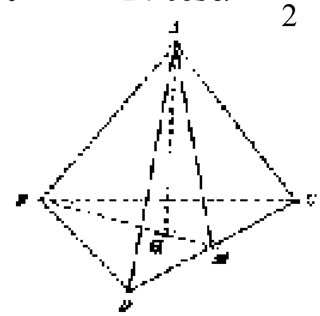
Lại có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\tan \widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{\left(SA,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SAH} = 60°$

Câu 75. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mp$\left(BCD\right)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\cos\alpha = 0$ **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Chọn đáp án A



Gọi M là trung điểm của CD và H là trọng tâm tam giác BCD

Khi đó $AH \perp \left(BCD\right)$. Mặt khác $BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

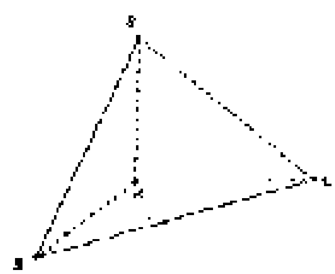
Do đó $\cos \widehat{SBH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 76. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với $\left(ABC\right)$ lấy điểm S sao cho $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SB và $\left(ABC\right)$.

A. $75°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** $60°$

Chọn đáp án D

Ta có $AB = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$



Do $SA \perp \left(ABC\right) \Rightarrow \widehat{\left(SB,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SBA}$

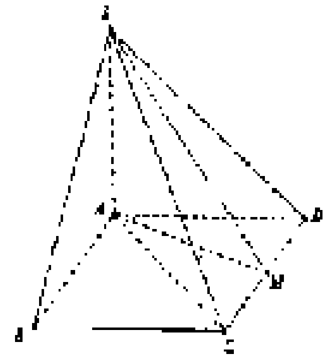
Mặt khác $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} : \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$

Do đó $\widehat{\left(SB,\left(ABC\right)\right)} = 60°$

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a; AD = 2a\sqrt{3}$ và $SA \perp \left(ABCD\right)$. Gọi M là trung điểm của CD, biết SC tạo với đáy góc 45°. Cosin góc tạo bởi đường thẳng SM và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{13}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{29}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{377}}{29}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{277}}{29}$

Chọn đáp án C



Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45°$

Khi đó $SA = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 4a$

Lại có $MD = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB}{2} = a \Rightarrow AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = a\sqrt{13}$

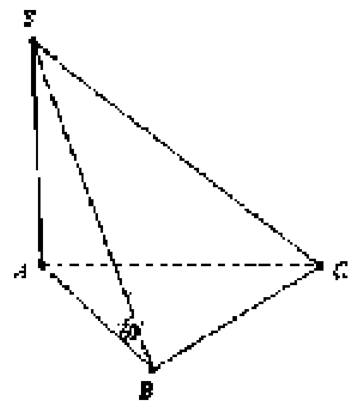
Khi đó $\cos\widehat{SMA} = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{377}}{29} > 0$

Do đó $\cos\widehat{(SM,(ABCD))} = \dfrac{\sqrt{377}}{29}$.

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = a; SA \perp (ABC)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Cosin góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là:

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Chọn đáp án D



Do $SA \perp (ABC)$ lại có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Khi đó $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SBA} = 60°$

Ta có $SA = AB\tan 60° = a\sqrt{3}; AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

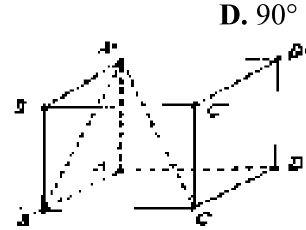
Khi đó $\cos\widehat{SCA} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Do đó $\cos\widehat{(SC,(ABC))} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 79. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Chọn đáp án A



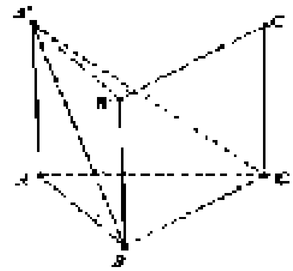
Góc cần tính là $\widehat{CA'B}$.

Ta có $\tan\widehat{CA'B} = \dfrac{BC}{A'B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4^2 + 8}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CA'B} = 30°$.

Câu 80. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Biết $A'C = 3a$. Cosin góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt đáy (ABC) là:

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Chọn đáp án C



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{5}$

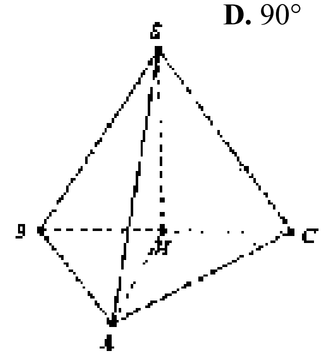
Do $AA' \perp (ABC)$ nên $\widehat{(A'B,(ABC))} = \widehat{A'BA}$

Lại có $\cos\widehat{A'BA} = \dfrac{AB}{A'B} = \dfrac{AB}{\sqrt{AB^2 + AA'^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 5a^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ABC = 60°$, tam giác SBC là tam giác đều và có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC)

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Chọn đáp án C



Gọi H là trung điểm của BC ta có: $SH \perp BC$

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ nên giao tuyến $SH \perp (ABC)$

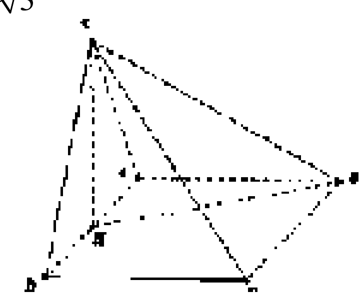
Lại có: $SH = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60° = \widehat{(SA,(ABC))}$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính tan của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{5}$

Chọn đáp án B



Gọi H là trung điểm của AD ta có: $SH \perp AD$

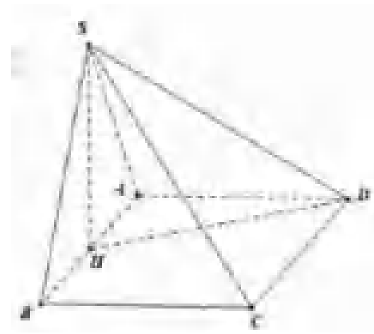
Mặt khác $(SAD) \perp (ABC)$ nên giao tuyến $SH \perp (ABCD)$

Lại có: $SH = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $\tan\widehat{SBH} = \dfrac{SH}{HB} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5} = \tan\widehat{(SB,(ABCD))}$.

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính cot của góc giữa SD và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{5}{\sqrt{15}}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Chọn đáp án A

Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$

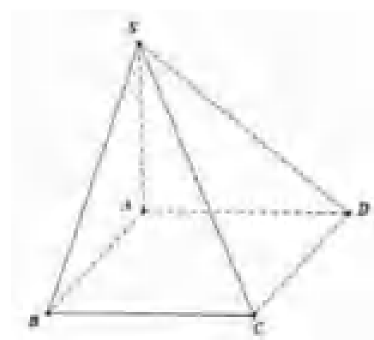
Mặt khác $(SAB) \perp (ABC)$ nên giao tuyến $SH \perp (ABCD)$

Lại có: $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; HD = \sqrt{HA^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $\cot\widehat{SDH} = \dfrac{HD}{SH} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{15}} = \cot\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1



Chọn đáp án B

Do $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD)\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Lại có: $\begin{cases}AB \perp AD \\ AB \perp SA\end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$

Ta có:

$\cos\widehat{BSA} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = \cos\left(\widehat{SB,(SAD)}\right)$ **Câu 85.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *H, K* lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Tính tan của góc tạo bởi giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK).

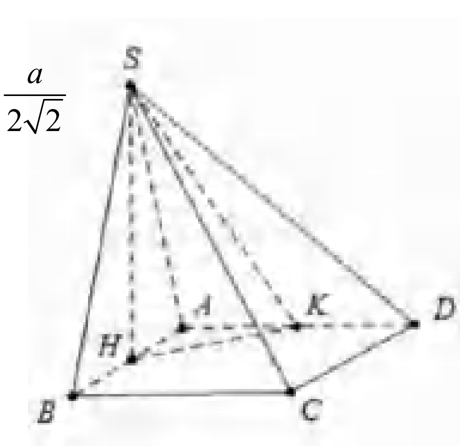
A. $\sqrt{7}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

Chọn đáp án C

Ta có $\sin\left(\widehat{SA,(SHK)}\right) = \dfrac{d(A,(SHK))}{SA} = \dfrac{d}{a}$.

Lại có $\dfrac{1}{2}d.HK = S_{AHK} = \dfrac{a^2}{8} \Rightarrow d = \dfrac{a^2}{4HK} = \dfrac{a^2}{4.\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\left(\widehat{SA,(SHK)}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

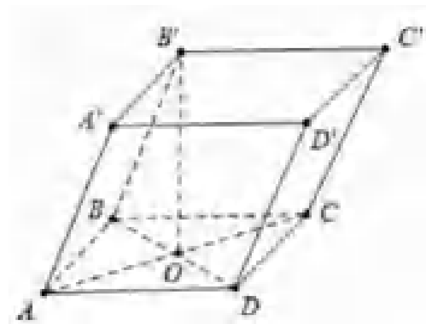


$$\Rightarrow \tan\left(\widehat{SA,(SHK)}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{8}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Câu 86. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAD = 60°$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Chọn đáp án B



Ta có $OB = \frac{BD}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{OBB'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OBB'} = 60°$.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD)?

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Chọn đáp án C

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABD)}\right) = \widehat{SCA}$.

Lại có $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{15}}{\sqrt{a^2+4a^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính tan của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** 1

Chọn đáp án A

Ta có $\tan\left(\widehat{SO,(ABCD)}\right) = \tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{2a}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết rằng $SA\perp(ABCD)$, $SA=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

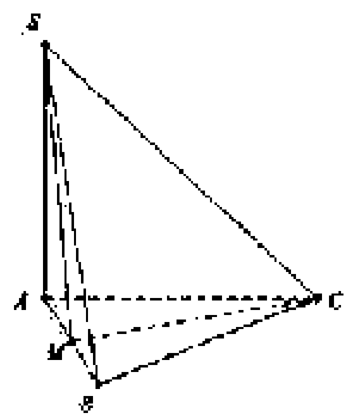
Chọn đáp án C

Ta có $\tan\widehat{\left(SM,(ABCD)\right)}=\tan\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{AM}=\dfrac{\frac{a\sqrt{15}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{\left(SM,(ABCD)\right)}=60°$

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Tính sin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{85}}{10}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{51}}{17}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

Chọn đáp án D



Gọi M là trung điểm của $AB\Rightarrow CM\perp AB$

Ta có $\begin{cases}CM\perp AB\\ CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAB)$ mà $SC\perp(ABC)=\{S\}$

$\Rightarrow\widehat{\left(SC,(SAB)\right)}=\widehat{(SC,SM)}=\widehat{MSC}$

Ta có $CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow SC=\sqrt{SM^2+MC^2}=a\sqrt{5}\Rightarrow\sin\widehat{MSC}=\dfrac{MC}{SC}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$, cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO. Tính tan góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{5}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\sqrt{3}$

Chọn đáp án C

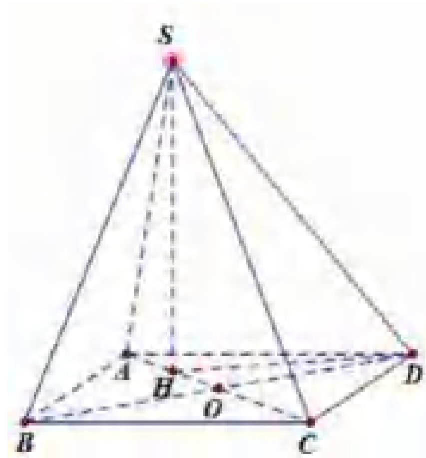
Ta có $SD \cap (ABCD) = \{D\}$ và $SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{(SD,HD)} = \widehat{SDH}$

Ta có $AH = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}\sqrt{(4a)^2 + (4a)^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow HD = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH.AD.\cos 45°} = a\sqrt{10}$

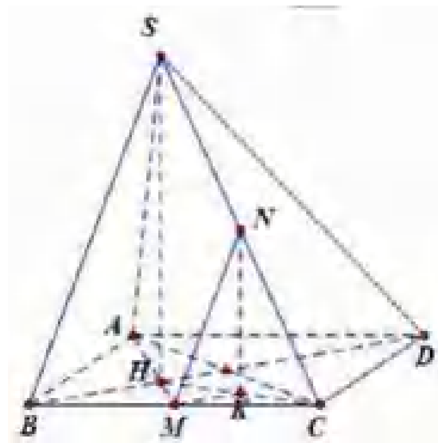
$\Rightarrow \tan\widehat{SDH} = \frac{SA}{AH} = \frac{2a}{a\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



Câu 92. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc *H* của *S* lên mặt đáy trùng với trọng tâm của tam giác *ABC* và $SH = \frac{a}{2}$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *BC, SC*. Tính tan của góc giữa đường thẳng *MN* và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Chọn đáp án B



Qua *N* kẻ đường thẳng song song với *SH* cắt *CH* tại *K*

$\Rightarrow NK \perp (ABCD)$.

Ta có $MN \cap (ABCD) = \{M\}$ và $NK \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(MN,(ABCD))} = \widehat{MN,MK} = \widehat{KMN}$

Ta có $NK = \frac{1}{2}SH = \frac{a}{4}$. Ta có $BH = \frac{1}{3}BH = \frac{2a}{3}$

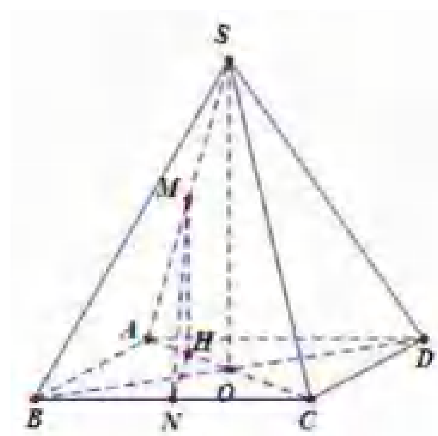
$\Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{5a}{6} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}SB = \frac{5a}{12}$

$\Rightarrow MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow \tan\widehat{KMN} = \frac{NK}{MK} = \frac{3}{4}$.

Câu 93. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*, cạnh bằng *a*, *SO* vuông góc với mặt đáy. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SA* và *BC*. Tính góc giữa đường thẳng *MN* và mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Chọn đáp án C



Qua *M* kẻ đường thẳng song song với *SO* cắt *AC* tại *H*

$\Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Ta có $MN \cap (ABCD) = \{N\}$ và $MH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(MN,(ABCD))} = \widehat{(MH,HN)} = \widehat{MNH}$

Ta có $CH = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow HN = \sqrt{CH^2 + CN^2 - 2C.C.\cos 45^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow MH = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow \tan\widehat{MNH} = \frac{MH}{HN} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MNH} = 60^\circ$.

Câu 94. (THPT CHUYÊN LAM SƠN-THANH HÓA LẦN 1 NĂM 2018): Xét tứ diện *OABC* có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng

OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC). Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3+\cot^2\alpha).(3+\cot^2\beta).(3+\cot^2\gamma)$ là:

A. 48. **B.** $48\sqrt{3}$. **C.** 125. **D.** Số khác.

Đáp án C

Cách 1: Đặt hệ trục tọa độ Oxyz $\Rightarrow$ tọa độ các điểm A(a;0;0), B(0;b;0),C(0;0;c).

Dùng công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta có được kết quả:

$$\sin\alpha = \cos\left(\overrightarrow{n_{ABC}};\overrightarrow{u_{OA}}\right) = \frac{bc}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}.$$

Viết kết quả tương tự $\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

Cách 2: Từ đẳng thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2} \Leftrightarrow \frac{OH^2}{OA^2}+\frac{OH^2}{OB^2}+\frac{OH^2}{OC^2} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 1.$$

$\Rightarrow$ Dạng $M = \left(2+\frac{1}{X}\right).\left(2+\frac{1}{Y}\right).\left(2+\frac{1}{Z}\right)$ với $X+Y+Z=1 \Rightarrow \frac{1}{XYZ} \geq 27$.

Biến đổi $M = 8+4\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}\right)+2\left(\frac{1}{XY}+\frac{1}{YZ}+\frac{1}{ZX}\right)+\frac{1}{XYZ}$

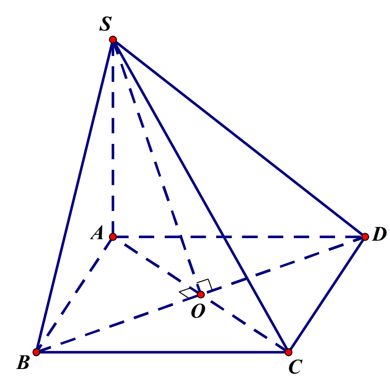
$$M \geq 8+4.3.\sqrt[3]{\frac{1}{XYZ}}+2.3..\sqrt[3]{\frac{1}{(XYZ)^2}}+\frac{1}{XYZ} \geq 8+4.3.3+2.3.9+27 = 125.$$

Dấu "=" xảy ra được nên có $M_{min} = 125$.

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $BD \perp AC$ (do $ABCD$ là hình vuông)

$BD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)

Suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$ (do $SO \subset (SAC)$)

Ta lại có: $\begin{cases} (SBD)\cap(ABCD)=BD \\ SO\subset(SBD), SO\perp BD \\ AC\subset(ABCD), AC\perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD),(ABCD))=(SO,AC)=\widehat{SOA}$.

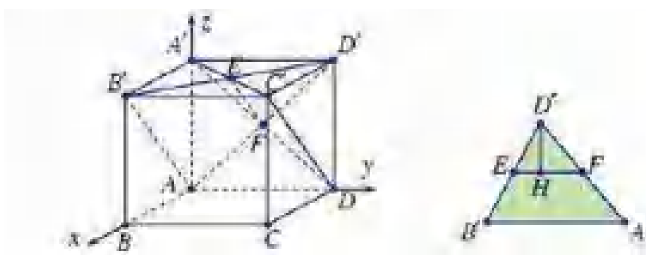
Tam giác SAO vuông tại A nên $\tan SOA=\dfrac{SA}{AO}=\dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SOA}=60°$.

Câu 96. [THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ 2018 - LẦN 1]: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2, AD=3, AA'=4$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

A. $42{,}5^\circ$. **B.** $38{,}1^\circ$. **C.** $53{,}4^\circ$. **D.** $61{,}6^\circ$

Chọn D

Cách 1: Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ có giao tuyến là EF như hình vẽ. Từ A′ và D′ ta kẻ 2 đoạn vuông góc lên giao tuyến EF sẽ là chung một điểm H như hình vẽ. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng cần tìm chính là góc giữa hai đường thẳng AH′ và DH



Tam giác $DE'F$ lần lượt có $D'E=\dfrac{D'B'}{2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}, D'F=\dfrac{D'A}{2}=\dfrac{5}{2}$;EF$=\dfrac{B'A}{2}=\sqrt{5}$

Theo hêrông ta có: $S_{DEF}=\dfrac{\sqrt{61}}{4}$. Suy ra $D'F=\dfrac{2S_{DEF}}{EF}=\dfrac{\sqrt{305}}{10}$

Trong tam giác $D'A'H$ có $\cos\widehat{A'HD'}=\dfrac{HA'^2+HD'^2-A'D'^2}{2HA'.HD'}=-\dfrac{29}{61}$

Do đó $\widehat{A'HD'}\approx 118{,}4°$ hay $\widehat{(A'H,D'H)}=180°-118{,}4°=61{,}6°$

Cách 2: Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó

$A(0;0;0),B(2;0;0),D(0;3;0),C(2;3;0),A'(0;0;4),B'(2;0;4),D'(0;3;4),C'(2;3;4)$

Gọi $\overrightarrow{n_1}$ là véc tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Có $\overline{n_1}=\left[\overline{AB};\overline{AD}\right]=(-12;-8;6)$

Gọi $\overrightarrow{n_2}$ là véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Có $\overline{n_2}=\left[\overline{A'C'};\overline{A'D}\right]=(-12;8;6)$

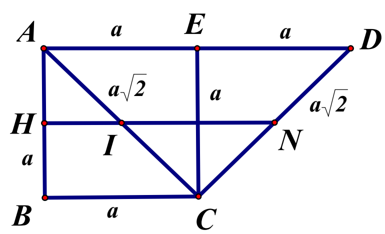
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$

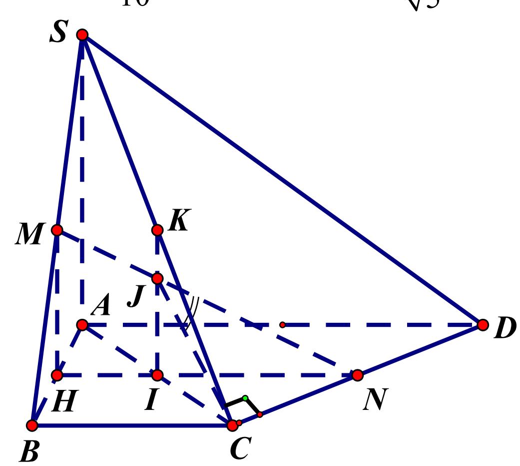
$$cos\alpha = \left|\frac{\overline{n_1}\,\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}\right| = \frac{29}{61}.$$ Vậy giá trị gần đúng của góc α là $61,6^\circ$.

Câu 97. (THPT Việt Trì): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. $AB = BC = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính côsin góc giữa MN và (SAC).

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **B.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ **C.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Chọn C





Ta dễ chứng minh được tam giác ACD vuông tại C, từ đó chứng minh được CN vuông góc với mặt phẳng (SAC) hay C là hình chiếu vuông góc của N trên (SAC). Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (SAC) tại J xác định như hình vẽ. Suy ra góc giữa MN và (SAC) là góc $\widehat{NJC}$.

IN là đương trung bình trong tam giác ACD suy ra $IN=a$, IH là đường trung bình trong tam giác ABC suy ra $IH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$. Dựa vào định lí Talet trong tam giác MHN ta được $IJ = \frac{2}{3}MH = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}SA = \frac{1}{3}SA = \frac{a}{3}$. Dựa vào tam giác JIC vuông tại I tính được $JC = \frac{\sqrt{22}}{6}$.

Ta dễ tính được $CN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $JN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

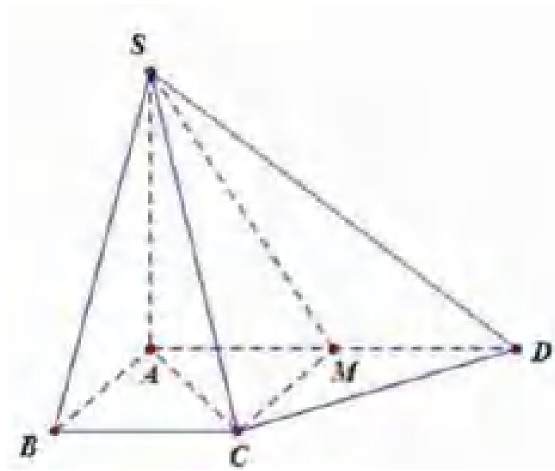
Tam giác NJC vuông tại C nên $\cos\widehat{NJC} = \frac{JC}{JN} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 98. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết rằng $AB = BC = a$, $AD = 2a, SA = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD).

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

Chọn đáp án C

Gọi M là trung điểm của $AD \Rightarrow CM \perp AD$



Ta có $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$

mà $SC \cap (SAC) = \{S\}$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAD))} = \widehat{(SC,SM)} = \widehat{MSC}$

Ta có $CM = a, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$

$\Rightarrow SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\widehat{MSC} = \dfrac{SM}{CM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MSC} = 60°$.

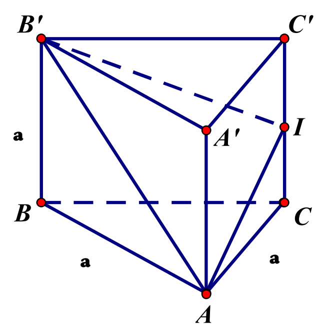
Câu 99. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác cân với $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^0$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) *và* $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\dfrac{10}{\sqrt{30}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$.

Đáp án B.

Áp dụng định lý cosin cho ΔABC ta có: $BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos120^0 = 3a^2$.

Áp dụng định lý Py – ta – go cho tam giác:



$\Delta B'BA$ *có*: $B'A^2 = 2a^2$.

ΔICA *có*: $AI^2 = a^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4}$.

$\Delta B'C'I$ *có*: $B'I^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$.

Ta có: $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta AB'I$ vuông ở A.

Ta có: $S_{\Delta AB'I} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a^2\sin120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) *và* $(AB'I)$. Ta có: $cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABI'}} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 100. Cho lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$ có các đáy là các tam giác vuông cân $OA = OB = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA, AA'. Tính diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ bởi $(B'MP)$?

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$ B. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$ C. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$ D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$

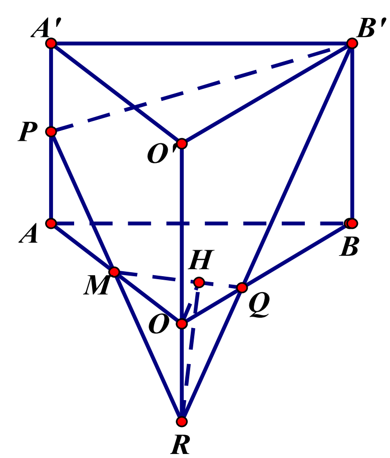
Đáp án C.

Gọi R là giao điểm của MP và OO' , Q là giao điểm của $B'R$ với OB.

Thiết diện là tứ giác $MPB'Q$, ta có: $\frac{OQ}{O'B'} = \frac{RO}{RO'} = \frac{1}{3} \Rightarrow OQ = \frac{a}{3}$.

Tứ giác $AMQB$ là hình chiếu vuông góc của tứ giác $PMQB'$ trên mặt phẳng (OAB) nên:

$S_{PMQB'} = \frac{S_{AMQB}}{\cos\varphi}$.



Với φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (OAB) và $(MPB'Q)$.

Ta có: $S_{AMQB} = S_{OAB} - S_{OMQ} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{5}{12}a^2$

Hạ $OH \perp MQ$, ta có: $\begin{cases} MQ \perp OH \\ MQ \perp OR \end{cases} \Rightarrow MQ \perp (OHR)$

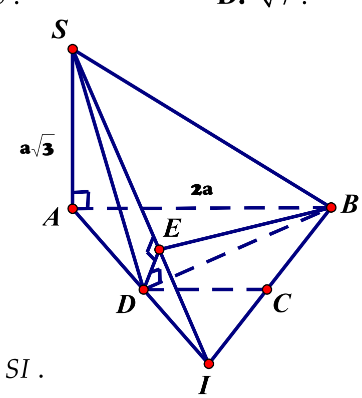
Vậy: $\varphi = \widehat{OHR}$ ($\widehat{OHR}$ nhọn)

Ta có: $\cos\varphi = \cos\widehat{OHR} = \frac{OH}{RH} = \frac{OH}{\sqrt{OH^2 + OR^2}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\frac{a^2}{13} + \frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$. Vậy: $S_{PMQB'} = \frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$.

Câu 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Chọn D.



Gọi $J = AD \cap BC$, $ABCD$ là nửa lục giác đều nên

$AD = DC = CB = a$, $AI = IB = a$.

$(SAD) \cap (SBC) = SI \Rightarrow \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AD \end{cases}$.

$\Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$

Vì vậy theo trường hợp đặc biệt ta chỉ cần dựng $DE \perp SI$ với $E \in SI$.

Khi đó, $SI \perp (BED) \Rightarrow \left(\widehat{(SAD),(SSBC)}\right) = \left(\widehat{EB, ED}\right) = \widehat{BED}$, (Vì ΔBED vuông tại D)

ΔAIB đều nên $BD = a\sqrt{3}$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = a\sqrt{7}$

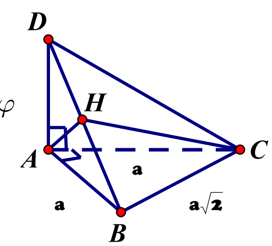
Hai tam giác vuông SAI và DEI đồng dạng nên: $\dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} \Rightarrow DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

ΔBDE vuông tại D $\Rightarrow \tan\widehat{BED} = \dfrac{BD}{DE} = \sqrt{7}$ A

Câu 102. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$, trên đường thẳng d vuông góc với (ABC) tại điểm A ta lấy một điểm D. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC), trong trường hợp (DBC) là tam giác đều.

A. $\arccos\dfrac{1}{3}$ **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Đáp án B.



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}.\cos\varphi$

Mà: $S_{\Delta DBC} = \dfrac{1}{2}DB.DC.\sin 60^0 = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

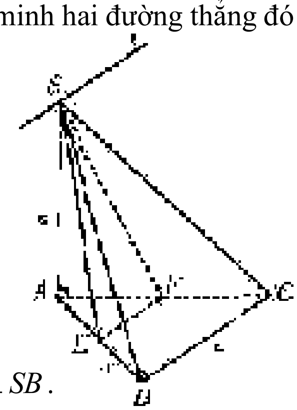
Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}a^2 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DBC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

A. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{3}{2\sqrt{10}}$.

Nhận xét: Giao tuyến của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là đường thẳng St đi qua S và song song với EF và BC nên ta xác định hai đường thẳng qua S và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) và cùng vuông góc với St (ta đi chứng minh hai đường thẳng đó là SE và SB).

Chọn A.



Vì $\begin{cases} EF \subset (SEF) \\ BC \subset (SBC) \\ EF // BC \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (SEF) và (SBC)

là đường thẳng qua S, song song với BC, là St.

$\begin{cases} BC \perp AB & (gt) \\ BC \perp SA & (vì\ SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ hay $St \perp SB$.

Tương tự $EF \perp (SAE) \Rightarrow EF \perp SE$ mà $EF // St \Rightarrow St \perp SE$.

Vậy SB và SE cùng đi qua S và cùng vuông góc với St nên góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SE.

Có $SE=\sqrt{SA^2+AE^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$; $BE=\dfrac{a}{2}$.

Theo định lí cosin ta có: $\cos\widehat{BSE}=\dfrac{SE^2+SB^2-BE^2}{2.SE.SB}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\widehat{BSE}=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA=a$ và $SA\perp(ABC)$, $AB=BC=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Chọn C.

Ta có $(SAC)\cap(SBC)=SC$. Gọi F là trung điểm $AC\Rightarrow BF\perp(SAC)$.

Dựng $BK\perp SC$ tại $K\Rightarrow SC\perp(BKF)\Rightarrow\widehat{((SAC),(SBC))}=\widehat{(KB,KF)}=\widehat{BKF}$

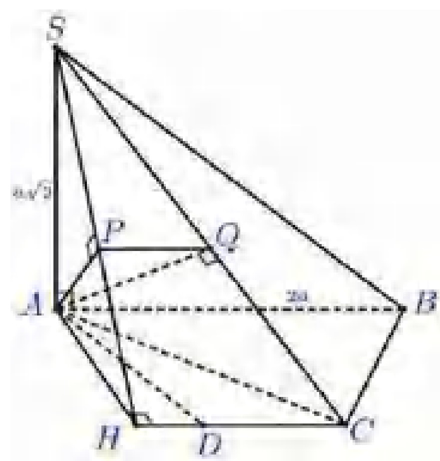
$\Delta CFK\sim\Delta CSA\Rightarrow\dfrac{FK}{FC}=\dfrac{SA}{SC}\Rightarrow FK=\dfrac{FC.SA}{SC}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

ΔBFK vuông tại $F\Rightarrow\tan\widehat{BKF}=\dfrac{FB}{FK}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{6}}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{BKF}=60°=\widehat{((SAC),(SBC))}$.

Câu 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB=2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

Nhận xét: Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng ta đi xác định hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).



Chọn A.

Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD=DC=CB=a$.

Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SCD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $AH\perp CD$ tại H

$\Rightarrow CD\perp(SAH)$.

Trong mặt phẳng (SAH) dựng $AP\perp SH$

$\Rightarrow CD\perp AP\Rightarrow AP\perp(SCD)$.

Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SBC).

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AQ\perp SC$.

Lại có $AQ\perp BC$ vì $\begin{cases}BC\perp AC\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AQ$. Vậy $AQ\perp(SBC)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng ấy là AP và AQ.

$AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow AQ = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

ΔAPQ vuông tại $P \Rightarrow \cos\widehat{PAQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{PAQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

§7. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng

A. $H \in SC$. **B.** $H \in SB$.
C. $H \in SI$ (với I là trung điểm của BC). **D.** H trùng với trọng tâm tam giác SBC.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

ABC là tam giác cân ở A khi đó

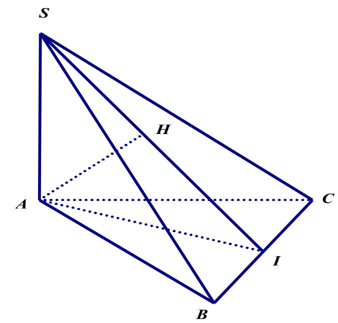
Gọi I là trung điểm của $AI \perp BC$

Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Vậy ta có $BC \perp (SAI)$

Kẻ $AH \perp SI$ $(H \in SI)$

H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC).



Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD). Khẳng định nào sau đây **sai**

A. $H \in AM$ (với M là trung điểm của CD).
B. $(ABH) \perp (ACD)$.
C. AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD.
D. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ADB.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

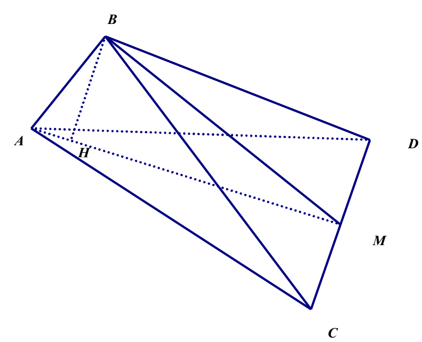
Gọi M là trung điểm của CD khi đó ta có

$AM \perp CD, BM \perp CD$

Kẻ $BH \perp AM$ $(H \in AM) \Rightarrow BH \perp (ACD)$

$\Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD)

Vậy A, B, C đúng, D sai.

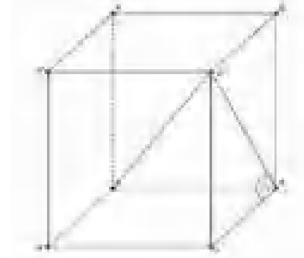


Câu 3. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60^0. Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:

A. $2a$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có: $CC' \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB(hv)$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (BCC'B') \\ BC' \subset (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow AB \perp BC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CBC'} = 60^0$ là góc giữa (ABC') và $(ABCD)$

Xét $\Delta BCC'$ vuông tại C có: $\tan 60^0 = \dfrac{CC'}{BC} \Rightarrow CC' = BC.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

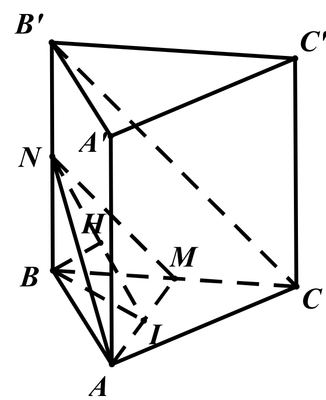
Câu 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

A. $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi N là trung điểm của BB';

ta có $\begin{cases} B'C \parallel MN \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$

Do đó $d\left(AM, B'C\right) = d\left(B', (AMN)\right)$.

Mặt khác N là trung điểm của BB'

Nên $d\left(B', (AMN)\right) = d\left(B, (AMN)\right)$

Kẻ $BI \perp AM$ thì $AM \perp (BNI)$, kẻ $BH \perp NI \Rightarrow BH \perp (AMN)$ nên $d\left(B, (AMN)\right) = BH$

Có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{7}{a^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. Vậy $d\left(AM, B'C\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai**

A. Nếu α là góc giữa AC' và $(ABCD)$ thì $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

B. $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$.

C. Tam giác $AB'C$ là tam giác đều.

D. Hai mặt $AA'C'C$ và $BB'D'D$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

A. Ta có: $CC' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{C'AC} = \alpha$ là góc giữa AC' và $(ABCD)$

Mà $AC = a\sqrt{2}$. Xét $\Delta AA'C'$ vuông tại A' có: $AC' = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

Xét $\Delta ACC'$ vuông tại C' có: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Vậy A đúng

B. $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích là: $S = AA'.AC = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$. Vậy B sai

C. Tam giác AB'C là tam giác đều vì: $AB' = B'C = AC = a\sqrt{2}$. Vậy C đúng

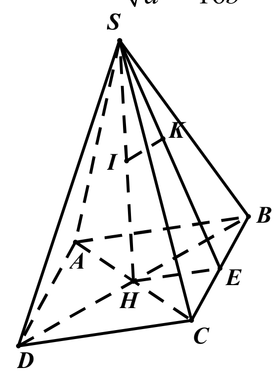
D. Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC; (hv) \\ BD \perp AA'; (AA' \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

Mà $BD \subset (BB'D'D)$. Do đó: $(ACC'A') \perp (BB'D'D)$. Vậy D đúng.

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến (SBC) bằng b. Tính SH.

A. $SH = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$ **B.** $SH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$ **C.** $SH = \dfrac{2ab}{\sqrt{3a^2 - 16b^2}}$ **D.** $SH = \dfrac{3ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Gọi E là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC \perp HE \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHE)$

$\Rightarrow (SHE) \perp (SBC)$. Do đó $IK \perp SE$ thì $IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = b$.

Ta có $\Delta SKI \sim \Delta SHE \Rightarrow \dfrac{IK}{HE} = \dfrac{SK}{SH}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{HE.SK}{IK}$ $(*)$, mà $HE = \dfrac{a}{2}, IK = b, SK = \sqrt{SI^2 - IK^2} = \sqrt{\dfrac{SH^2}{4} - b^2}$

Nên $(*) \Leftrightarrow SH = \dfrac{a}{2b}\sqrt{\dfrac{SH^2}{4} - b^2} \Leftrightarrow SH = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$. Vậy $SH = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

Câu 7. Trong lăng trụ đều, khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A. Vì lăng trụ đều nên các cạnh bằng nhau. Do đó đáy là đa giác đều.

B. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các mặt bên vuông góc với đáy.

C. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên vuông góc với đáy.

D. Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình vuông.

Câu 8. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng :

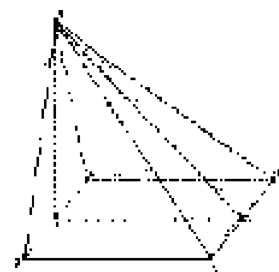
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $S \in (SAB) \cap (SCD)$. Gọi $d = (SAB) \cap (SCD)$ với $d \in S; d€ AB€ CD$

Do đó: $d = (SAB) \cap (SCD)$.



Mặt khác: $(SAB) \perp (ABCD)$; mà $HK \perp AB(hv) \Rightarrow HK \perp (SAB)$

Vì H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$ (vì $d€ AB$)

$\Rightarrow d \perp SK$ (theo định lí ba đường vuông góc)

Do đó: $\widehat{KSH} = \alpha$ là góc giữa (SAB) và (SCD)

Mà SH là đường cao trong ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔSHK vuông tại H có: $\tan\alpha = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \\ SC = (SBC) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ABC)$. Do đó câu A và B đúng

C. Sai. vì nếu $A' \in SB$ thì hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) phải vuông góc với nhau theo giao tuyến SB

D. Ta có: $\begin{cases} SC \perp (ABC) \\ SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC

Mà BK là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow BK \perp AC \Rightarrow BK \perp (SAC)$. Vậy D. đúng

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng α mà $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

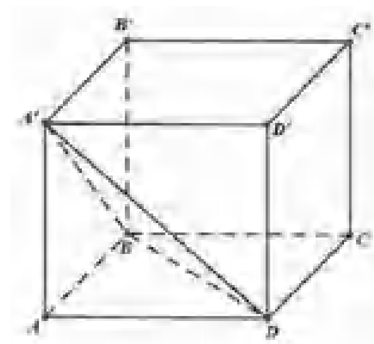
D. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các cạnh của hình lập phương bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên hình chiếu của tam giác $A'BD$ lên các mặt chứa các cạnh của hình lập phương là các tam giác bằng nhau. Gọi S_1 là diện tích các tam giác này

Lại có $S_1 = S_{AB'D}.cos\alpha$.



Câu 11. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng A và góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong tam giác SAC kẻ $IK \perp SA$ tại K. Tính số đo góc $\widehat{\mathrm{BKD}}$.

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 90^0. **D.** 30^0.

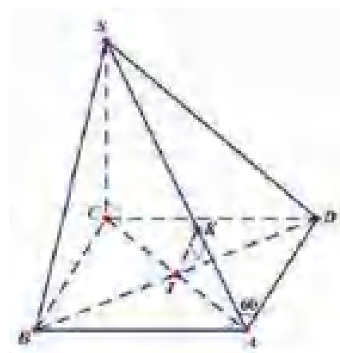
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $CH = \dfrac{CS.CA}{\sqrt{CS^2 + CA^2}} = a; (CA = 2AI = a\sqrt{3})$;

$IK = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{1}{2}a = IB = ID$.

với H là hình chiếu của C lên SA,
K là hình chiếu của I lên SA.



Câu 12. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a; CD = 2x$. với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$YCBT \Leftrightarrow \Delta CJD$ vuông cân tại J

$$\Leftrightarrow IJ = IC = ID = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 4x^2 = 2AI^2 = 2(\frac{a^2 + a^2}{2} - x^2) \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(Với I là trung điểm CD; J là trung điểm AB)

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$ **B.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$ **D.** $\tan\alpha = 1$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dễ thấy tam giác SAD vuông cân tại A và $\widehat{SDA} = \alpha$

Câu 15. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

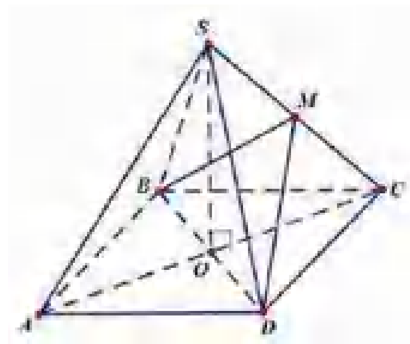
Qua M dựng đường thẳng d vuông cóc với (P) và (Q). Khi đó có vô số mặt phẳng xoay quanh d thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng:

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi M' là trung điểm OC.

Có $S_{\Delta MBD} = \frac{1}{2}MO.BD = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$;

$S_{\Delta BM'D} = \frac{1}{2}M'O.BD = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2}{4}$.

Do đó $\cos\alpha = \frac{S_{\Delta BM'D}}{S_{\Delta BMD}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

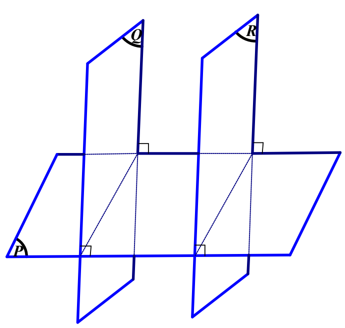
B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

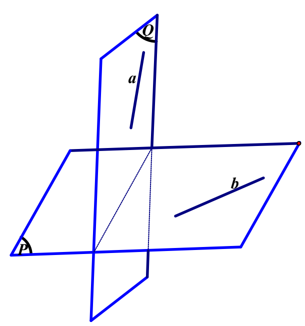
D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Hướng dẫn giải

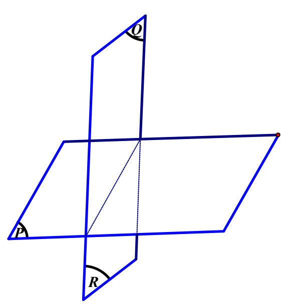
Chọn D.



Đáp án A sai



Đáp án B sai



Hai mặt phẳng (R) và (Q) cùng vuông góc với (P) nhưng $(Q) \equiv (R)$. Vậy đáp án C sai.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

A. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

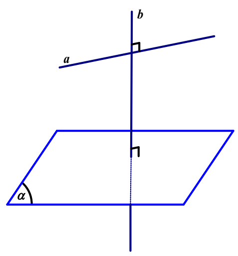
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

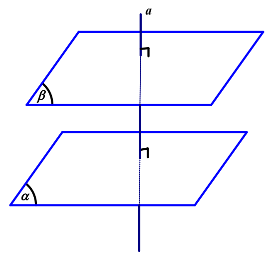
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

Hướng dẫn giải

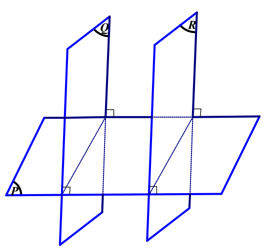
Chọn A.



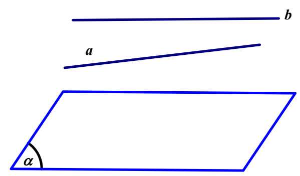
Đáp án A đúng.



Đáp án B sai.



Đáp án C sai.



Đáp án D sai.

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

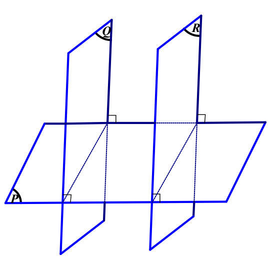
B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

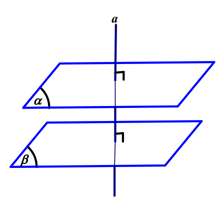
D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Hướng dẫn giải

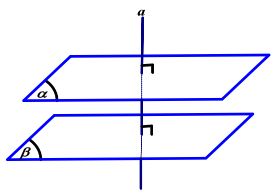
Chọn D.



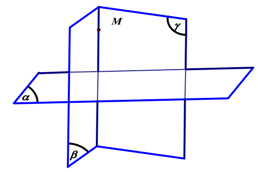
Đáp án A đúng



Qua một đường thẳng có **vô số** mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng B đúng



Đáp án C đúng.



Qua một điểm có **vô số** mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước Đáp án D sai.

Câu 20. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

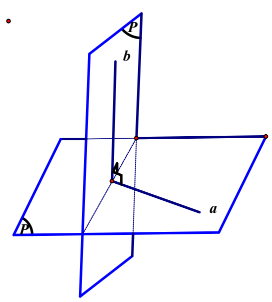
B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

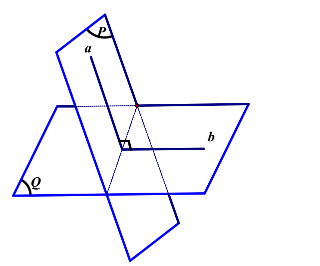
D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Hướng dẫn giải

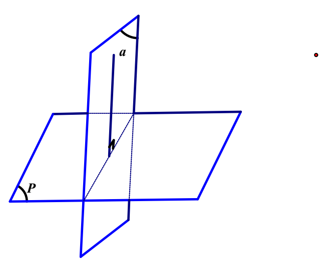
Chọn B.



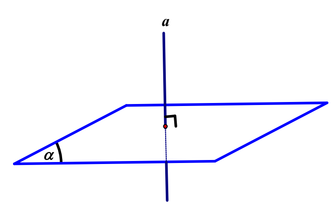
Đáp án A đúng.



Đáp án B sai.



Đáp án C đúng.



Đáp án D đúng.

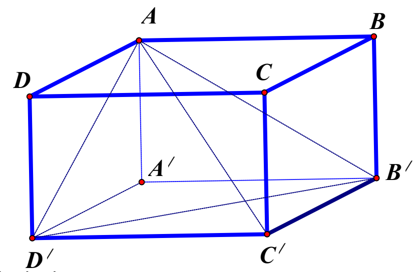
Câu 21. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu tứ diện $AB'C'D'$ đều.

A. Hình lập phương **B.** Hình hộp chữ nhật

C. Hình hộp thoi **D.** Đáp số khác

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Câu 22. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây ?

A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

B. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.

C. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông.

D. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Góc giữa mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $\left(Q\right)$ bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) (hoặc $(Q)\equiv(R)$).

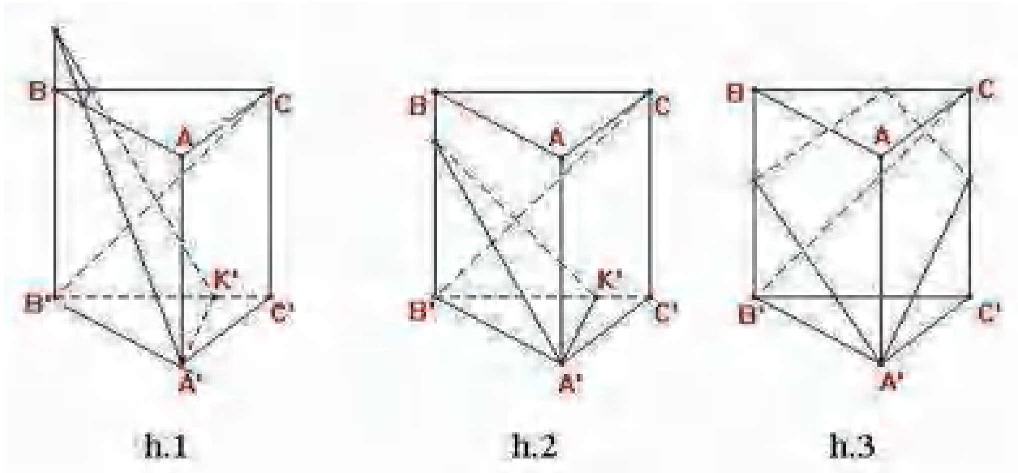
C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 24. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, với $AB = c$, $AC = b$, cạnh bên $AA' = h$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua A' và vuông góc với $B'C$. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng $\left(P\right)$ có hình:



A. $h.1$ *và* $h.2$.   **B.** $h.2$ *và* $h.3$.   **C.** $h.2$.   **D.** $h.1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A' và vuông góc với BC. Từ A' ta dựng $A'K' \perp B'C'$, vì $(ABC) \perp (BCC'B')$ nên $A'K' \perp B'C' \Rightarrow A'K' \perp (BCC'B') \Rightarrow A'K' \perp BC'$ (1).

Mặt khác trong mặt phẳng $(BCC'B')$ dựng $K'x \perp B'C$ và cắt $B'B$ tại 1 điểm N (2) (điểm gì đề chưa có cho nên cho tạm điểm N).

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} BC' \perp A'K' \\ BC' \perp K'N \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (A'K'N)$

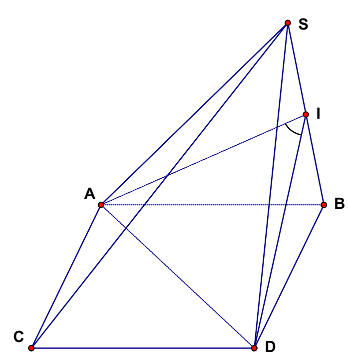
Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = SB$. Góc giữa (SAB) và (SAD) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$ **C.** $\alpha = 60^0$ **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi độ dài cạnh của hình chóp đều $S.ABCD$ là a. Gọi I là trung điểm của SB ta có $DI \perp SB$ (vì tam giác SBD đều) và $AI \perp SB$ (vì tam giác SAB đều). Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc $\widehat{AID}$.



Ta có : $AD = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông),

$AI = DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều)

Áp dụng định lý côsin cho góc I trong tam giác AID ta có :

$$\cos(\widehat{AID})=\frac{AI^2+DI^2-AD^2}{2AD.DI}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}=-\frac{1}{3}.$$ Vậy $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

Câu 26. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Chọn D.

Câu 27. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), a là một đường thẳng nằm trên (P). Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. Nếu $a//b$ với $b=(P)\cap(Q)$ thì a$//(Q)$. **B.** Nếu $(P)\perp(Q)$ thì $a\perp(Q)$.

C. Nếu a cắt (Q) thì (P) cắt (Q). **D.** Nếu $(P)//(Q)$ thì $a//(Q)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $b=(P)\cap(Q)$ nếu $a//b$ thì $a//(Q)$.

Câu 28. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'D'$ và AB là

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 135^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do $AB\perp(AA'D'\text{D})$.

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính độ dài đường cao SH.

A. $SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $SH=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **C.** $SH=\frac{a}{2}$ **D.** $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi G,M lần lượt là trọng tâm, trung điểm của ABC, BC. Ta có $\frac{SH}{HM}=\tan 60^0\Leftrightarrow SH=\frac{a}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB=a$, $AD=2a$. SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi MN là đoạn thẳng qua O vuông góc AD (M, N thuộc AD, BC) ta có $MN \perp (SAD)$ nên SMN là thiết diện cần tìm. $\Delta\, SMN$ vuông tại M nên $S_{SMN} = \dfrac{SM.MN}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $ACC'A'$ là hình vuông, cạnh bằng a. Cạnh đáy của hình lăng trụ bằng:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi O là tâm $ABCD$, tam giác AOB vuông tại O nên $AB = \sqrt{2}OA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

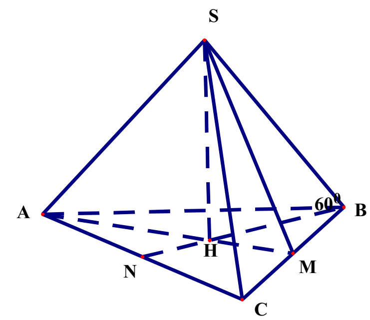
Câu 32. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Tính số đo góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 75^0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi H là tâm đáy, ta có $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \sqrt{3}$.



Câu 33. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 34. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **không** đúng ?

A. $BB'C'C$ là hình chữ nhật. **B.** $(AA'H) \perp (A'B'C')$.

C. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$. **D.** $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $BC \perp (A'AH)$ nên $BC \perp BB'$,nếu $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$ thì $BC \perp AB$ vô lý vì H trùng A.

Câu 35. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45^0.

C. Hai mặt $(AA'B'B)$ và $(BB'C')$ vuông góc nhau.

D. Đáy ABC là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 36. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu tứ diện $AA'B'D'$ có các cạnh đối vuông góc

A. Hình lập phương **B.** Hình hộp tam giác **C.** Hình hộp thoi **D.** Hình hộp tứ giác

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $AA' \perp B'D', A'D' \perp AB', A'B' \perp AD'$, suy ra $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

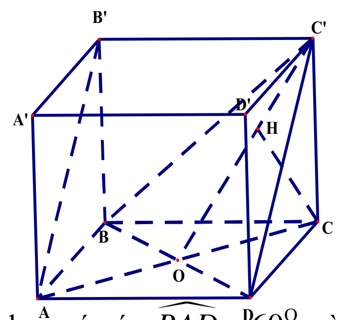
Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa AB' và BC' là:

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{45}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$d(AB',BC') = d(AB',(BDC')) = d(B',(BDC')) = d(C,(BDC'))$



Gọi $O = BD \cap AC \Rightarrow (BDC') \perp (CC'O)$ theo giao tuyến $C'O$.

Kẻ $CH \perp C'O \Rightarrow CH \perp (BDC') \Rightarrow d(C,(BDC')) = CH$

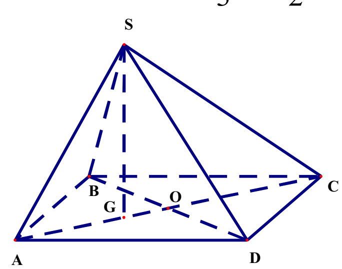
Ta có $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{C'C^2} + \dfrac{1}{CO^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^O$ và $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ và độ dài đoạn SC theo thứ tự là:

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{6};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6};\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Theo giả thiết ta có ABD đều cạnh a nên $S.ABC$ là chóp tam giác đều, gọi G là trọng tâm tam giác ABD, khi đó $SG \perp (ABCD) \Rightarrow d(S,(ABCD)) = SG$ và tam giác SAG vuông tại G.

Ta có $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = \sqrt{SB^2 - AG^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}, SC = \sqrt{SG^2 - CG^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^O$ và $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xác định số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $SG \subset (SAC), SG \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$, do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 90^0.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^O$ và $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác là tam giác gì ?

A. Tam giác cân **B.** Tam giác vuông **C.** Tam giác đều **D.** Tam giác thường

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Trong tam giác SBC có $SC = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}, BC = a, SB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, ta thấy $BC^2 = SB^2 + SC^2$ nên tam giác SBC vuông tại S.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^O$ và $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính $\tan\varphi$ với φ là góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $(SBD) \cap (ABCD) = BD, SG \perp (ABCD), GO \perp BD \Rightarrow \varphi = \angle SOG \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SG}{OG} = \sqrt{5}$

Câu 42. Trong các mệnh đề sau đây, hãy tìm mệnh đề đúng

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $AC \perp B'D'$. **B.** $AB' \perp CD'$.

C. $AD' \perp CB'$. **D.** $(AA'C'C) \perp (BB'D'D)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

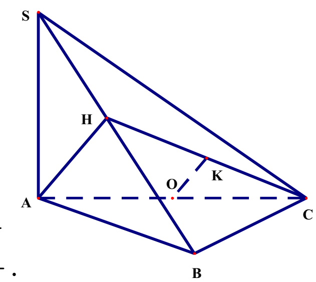
Vì tất cả các cạnh của hình hộp bằng nhau nên tất cả các mặt của hình hộp là hình thoi.

Do đó $AC \perp BD, AB' \perp BA', AD' \perp A'D$.

Câu 44. Tứ diện $S.ABC$ có ba dỉnh A, B, C tạo thành tam giác vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng ABC và $SA = a$. Trong mặt phẳng SAB, vẽ AH vuông góc với SB tại H. Từ trung điểm O của AC, vẽ OK vuông góc với (SBC) cắt (SBC) tại K. Khẳng định **sai** là:

A. $(SAB)\perp(SBC)$. **B.** $AH\perp(SBC)$. **C.** $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $OK=\dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$.

Hướng dẫn giải



Chọn D.

$BC\perp AB, BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow(SAB)\perp(SBC)$ theo giao tuyến SB

$AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)$

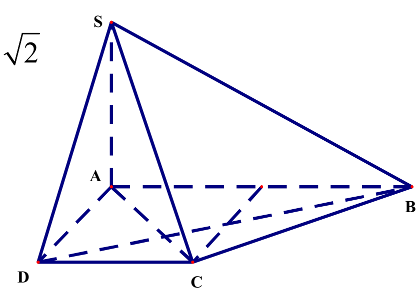
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAB ta có $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vì OK vuông góc với (SBC) cắt (SBC) tại K nên OK là đường trung bình của tam giác ACH nên $OK=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 45. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, có $AB=2a$, $AD=DC=a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. $\tan\varphi$ có giá trị là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Ta chứng minh được tam giác ABC vuông tại C và $AC=\sqrt{2}$

Mặt khác $(SBC)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến BC,

$SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\angle SCA\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 46. Cho a,b,c là các đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. Cho $a\perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

B. Nếu $a\perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a ; mặt phẳng (β) chứa b thì $(\beta)\perp(\alpha)$.

C. Cho $a\perp b$ nằm trong mặt phẳng (α). Mọi mặt phẳng (β) chứa a và vuông góc với b thì $(\beta)\perp(\alpha)$.

D. Cho $a//b$, mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c\perp a$ và $c\perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 47. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh của đáy nhỏ $ABCD$ bằng $\frac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn $A'B'C'D'$ bằng a. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính chiều cao OO' của hình chóp cụt đã cho.

A. $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $OO' = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $OO' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi M là trung điểm của $B'C'$, N là trung điểm của BC, O, O' là tâm của hai đáy.

Ta kẻ $NH \perp O'M$ và góc mặt bên và mặt đáy là $\widehat{NMH} = 60^0$.

Mà $O'M = \frac{a}{2}, ON = \frac{a}{6} \Rightarrow HM = \frac{a}{3} \Rightarrow \text{OO}' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48. Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC = a$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Ba mặt phẳng $(OAB), (OBC), (OCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một.

B. Tam giác ABC có chu vi $2p = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

C. Tam giác ABC có diện tích $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

D. $O.ABC$ là hình chóp đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

A đúng vì: $\begin{cases} OA \perp \text{(OBC)} \\ OB \perp \text{(OAC)} \\ OC \perp \text{(OAB)} \end{cases}$

B sai vì: $p = \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p = 3a\sqrt{2}$

C đúng vì: ΔABC đều cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

D đúng vì : ΔABC đều cạnh $a\sqrt{2}$, các mặt bên là tam giác cân .

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Các cạnh bên vuông góc với đáy và $AA' = a$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Hai hai mặt bên $AA'B'B$ và $AA'D'D$ bằng nhau.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

C. Hai mặt bên $(AA'C)$ và $(BB'D)$ vuông góc với hai đáy.

D. Góc giữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ có số đo bằng 60^0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A đúng.

B đúng

C đúng

D sai vì: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp B'B \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow (AA'C'C) \perp (BB'D'D)$

Câu 50. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
B. Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
C. Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
D. Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

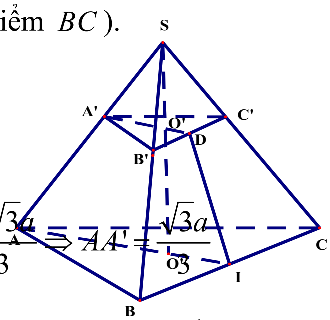
A sai vì đáy có thể là hình bình hành.
B đúng
C sai vì đáy có thể là hình bình hành
D sai vì đáy có thể là hình bình hành.

Câu 51. Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ với đáy lớn ABC có cạnh bằng a. Đáy nhỏ $A'B'C'$ có cạnh bằng $\frac{a}{2}$, chiều cao $OO' = \frac{a}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $AA' = BB' = CC' = \frac{a}{2}$.
B. Ba đường cao AA', BB', CC' đồng qui tại S.
C. Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ $A'B'C'$.
D. Góc giữa cạnh bên mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC).

Hướng dẫn giải

Chọn A.



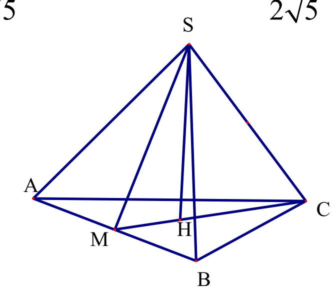
A sai vì $SO = 2OO' = a \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

B đúng. C đúng vì : $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC.\sin A}{\frac{1}{2}A'B'.A'C'.\sin A'} = 4$. D đúng vì : $\begin{cases} OI \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases}$

Câu 52. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2AB$. Góc giữa (SAB) và (ABC) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60^0$ **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{5}}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải:



Chọn B.

Cách 1: Gọi M là trung điểm của AB,
H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $((SAB),(ABC)) = \alpha = \widehat{SMH} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{MH}{SM} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

Cách 2: Gọi O là tâm của tam giác đều ABC
Gọi $CO \cap AB = H$ suy ra H là trung điểm AB(vì ΔABC đều)

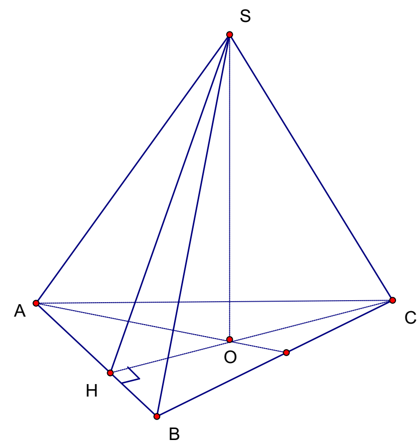
$\Rightarrow OH \perp AB$ và $OH = \dfrac{1}{3}CH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{6}$

Tìm góc giữa (SAB) *và* (ABC)

$$\begin{cases} (SAB)\cap(ABC) = AB \\ OH \perp AB \\ SO \perp AB \quad (SO \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow SH \perp AB \ (1)$$

Ta có $\begin{cases} (SAB)\cap(ABC) = AB \\ OH \perp AB,\ OH \subset (ABC) \\ SH \perp AB, SH \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB);(ABC)}\right) = \left(\widehat{SH;OH}\right) = \widehat{SHO} = \alpha$



Từ (1) suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2AB)^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}AB$

Từ đó ta có : $\cos\alpha = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}AB}{\dfrac{\sqrt{15}}{2}AB} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

Câu 53. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy

A. 45^0. **B.** 75^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

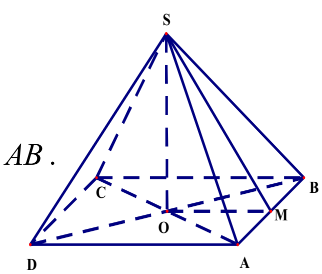
Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Giả sử hình chóp đều $S.ABCD$, có $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AB = a\sqrt{2}$.

Góc giữa mặt bên $((SAB),(ABCD)) = \widehat{SMO}$, với M là trung điểm AB.

Ta có $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{SMO} = 1 \Rightarrow \widehat{SMO} = 45^0$.



Câu 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Độ dài OM bằng:

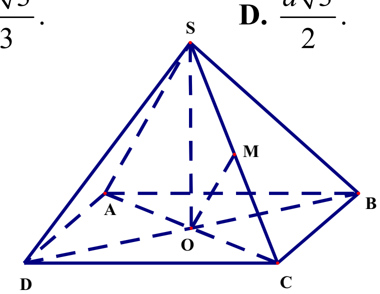
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $AC = a\sqrt{2}, OC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}, SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$,

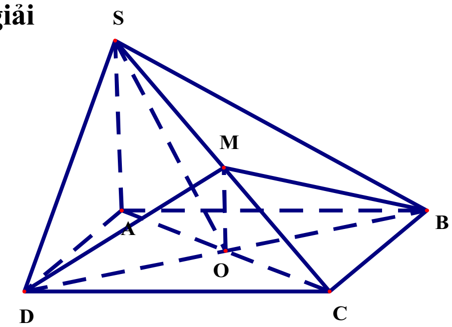
mà $SO \perp OC \Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a}{2}$.



Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ **B.** $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{4}$ **C.** $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ **D.** $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Ta có $SB = SD = 2a$

Vì $\Delta SCD = \Delta SCB$ (c.c.c) nên chân đường cao hạ từ B và D đến SC của hai tam giác đó trùng nhau và độ dài đường cao bằng nhau $\Rightarrow BH = DH$

Do đó $\widehat{((SBC),(SCD))} = \widehat{DHB} = \varphi$

Ta có $OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BH = DH = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

Lại có $BH = DH$ và O là trung điểm BD nên $HO \perp BD$ hay ΔHOB vuông tại O

$$OH = \sqrt{BH^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}a}{5}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{10}a$$

Ta có $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{4}; \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OB}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Câu 56. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Thiết diện là hình gì?

A. Hình vuông **B.** Lục giác đều **C.** Ngũ giác đều **D.** Tam giác đều

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có AC là hình chiếu của AC' lên $(ABCD)$. Mà $AC \perp BD$ nên $AC' \perp BD$, (1)

Ta có $\left.\begin{matrix} AD \perp (AA'B'B) \\ A'B \subset (AA'B'B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B \perp AD$

Lại có $A'B \perp AB'$ suy ra $\left.\begin{matrix} A'B \perp (AB'C'D) \\ AC' \subset (AB'C'D) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC' \perp A'B$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (A'BD)$, (3)

Mặt phẳng trung trực AC' là mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của AC' và $\perp AC'$ (4)

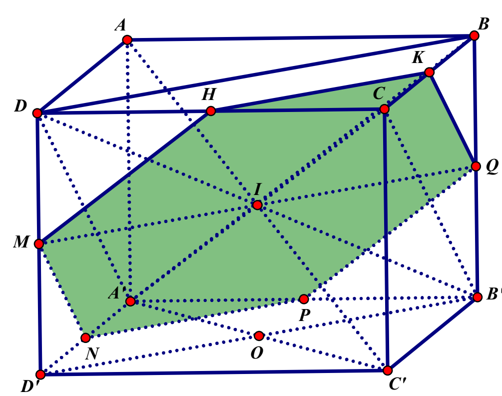
Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} mp(\alpha) \text{ qua } I \\ (\alpha) // (A'BD) \end{cases}$

Do đó, qua I dựng $MQ // BD$

Dựng $\begin{matrix} MN // A'D \\ NP // B'D' // BD \\ QK // B'C // A'D \\ KH // BD \end{matrix}$

Mà $MN = NP = PQ = QK = KM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra thiết diện là lục giác đều.



Câu 57. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. mặt phẳng (Q) chứa b và đường vuông góc chung của a và b thì $mp(Q) \perp a$.

B. mặt phẳng (R) chứa b và chứa đường thẳng $b' \perp a$ thì $mp(R) \perp a$.

C. mặt phẳng (α) chứa a, $mp(\beta)$ chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. mặt phẳng (P) chứa b thì mặt phẳng $(P) \perp a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử AB là đoạn vuông góc chung của a và b thì $mp(Q) \equiv (AB, b)$ mà $a \perp AB,\ a \perp b,\ a \perp (AB, b) \Rightarrow a \perp mp(Q)$

Câu 58. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là tâm hình vuông $ABCD$, $AB = a$, SO=2a. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang vuông **B.** Hình thang cân **C.** Hình bình hành **D.** Tam giác cân

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do $AB \subset (SCD)$ nên giao tuyến của (P) và (SCD) sẽ song song với CD.

Mà $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều. Nên thiết diện là hình thang cân

Câu 59. Cho các mệnh đề sau với (α) và (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau với giao tuyến $m = (\alpha) \cap (\beta)$ và a, b, c, d là các đường thẳng. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (\alpha)$ hoặc $b \subset (\beta)$. **B.** Nếu $b \perp m$ thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (\beta)$. **D.** Nếu $c // m$ thì $c // (\alpha)$ hoặc $c // (\beta)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $a \subset (\alpha)$, $a \perp m$, $(\alpha) \perp (\beta)$ nên $a \perp (\beta)$

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $((ABCD), (SBD))$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(SAC) \perp (ABCD)$ **B.** $(SAB) \perp (SAD)$ **C.** $\alpha = \widehat{SOC}$ **D.** $\tan \alpha = \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Góc giữa hai mặt phẳng $((ABCD), (SBD))$ là góc giữa SH và AH trong đó H là chân đường vuông góc hạ từ A của tam giác ABD.

Câu 61. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Mệnh đề A sai vì có thể xảy ra trường hợp hai mặt phẳng vuông góc với nhau nhưng đường thẳng thuộc mặt phẳng này song song với mặt phẳng kia

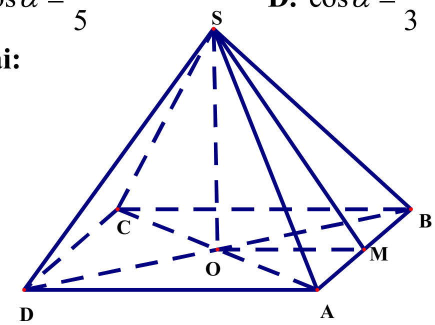
Mệnh đề B sai vì xảy ra trường hợp hai mặt phẳng song song.

Mệnh đề C sai vì xảy ra trường hợp hai mặt phẳng vuông góc

Câu 62. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB$. Góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 60^0$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$ **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:



Chọn B.

Ta chứng minh $\widehat{SMO} = \alpha$

Đặt $SA = AB = x \Rightarrow MA = MB = \dfrac{x}{2}$

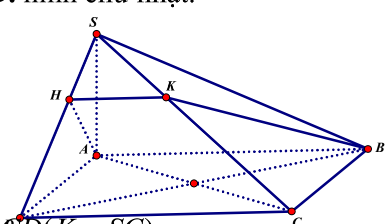
Ta có $SM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 63. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD), (α) cắt chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. hình bình hành. **B.** hình thang vuông.

C. hình thang không vuông. **D.** hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải



Chọn B.

Dựng $AH \perp CD$. Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Suy ra $CD \perp AH$ mà $AH \subset (SCD)$ suy ra $AH \subset (\alpha)$

Do đó $(\alpha) \equiv (AHB)$. Vì $(\alpha) // CD$ nên $(\alpha) \cap (SAD) = HK // CD (K \in SC)$.

Từ đó thiết diện là hình thang $ABKH$. Mặt khác $AB \perp (SAD)$ nên $AB \perp AH$

Vậy thiết diện là hình thang vuông tại A và H.

Câu 64. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng không cắt nhau, không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề sai vì còn trường hợp chéo nhau hoặc trùng nhau.

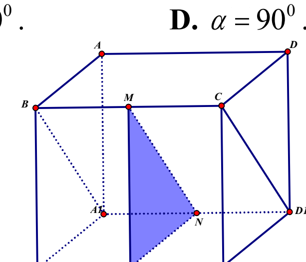
Mệnh đề C sai vì còn trường hợp hai đường thẳng chéo nhau.

Mệnh đề D sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Câu 65. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (A_1D_1CB) và $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 45^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 90^0$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

α là góc giữa hai mặt phẳng (A_1D_1CB)

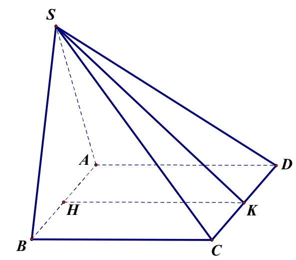
và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{MNP}$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{MP}{NP} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

Câu 66. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Góc nhị diện cạnh CD là

A. $\widehat{SKH}$. **B.** $\widehat{SDC}$. **C.** $\widehat{SCB}$. **D.** $\widehat{SCD}$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Ta có $HK \perp CD$

$SC = SD, K$ là trung điểm $CD \Rightarrow SK \perp CD$

$\Rightarrow$ góc nhị diện cạnh CD là $\widehat{SKH}$

Câu 67. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

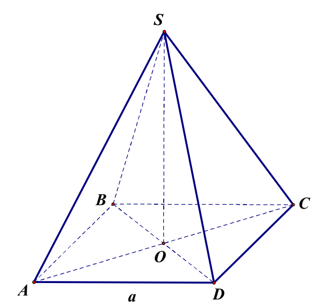
A. Nếu hình hộp có hai mặt bên là hình vuông thì nó là hình lập phương.
B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.
C. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.
D. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Câu 68. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60^0$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O (O là tâm của $ABCD$) lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S.ABCD$ là hình chóp đều. **B.** Hình chóp $S.ABCD$ các mặt bên là các tam giác cân.

C. $SO = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** SA và SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ những góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Ta có $\widehat{A} = 60^0$.

$ABCD$ là hình thoi nên $AB = AD$

Khi đó tam giác ABD đều nên $BD = a$

Vì tam giác SBD đều suy ra $SO = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 69. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai mặt phẳng nào sau đây bằng 45^0

A. (ABB_1A_1) và (BB_1C_1C). **B.** (ADC_1B_1) và $(ABCD)$.

C. $(ABCD)$ và (AA_1B_1B). **D.** (ADC_1B_1) và (A_1D_1CB).

Hướng dẫn giải

Chọn B.

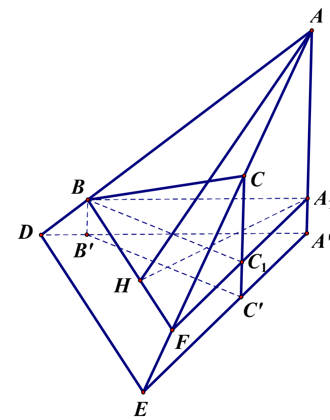
Vì $B_1C_1 \perp CD; B_1C_1 \perp C_1C$. Nên $\widehat{DC_1C}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ADC_1B_1) và $(ABCD)$.

Câu 70. Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ. Hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$. Tìm hệ thức liên hệ giữa diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cot\varphi$. **B.** $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\sin\varphi$.

C. $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\tan\varphi$. **D.** $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$.

Hướng dẫn giải



Chọn D.

Qua B kẻ mặt phẳng $(Q)//(P)$ cắt $AA';CC'$ lần lượt tại $A_1;C_1$

khi đó $S_{A'B'C'} = S_{A_1BC_1}$

Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa mặt phẳng (ABC) và (BA_1C_1) và bằng φ

Kẻ $AH \perp BF \Rightarrow A_1H \perp BF$

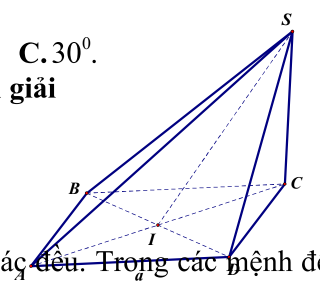
$$S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2}A_1H.BF = \frac{1}{2}AH.\cos\varphi.BF = S_{ABC}.\cos\varphi$$

Vậy $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$.

Câu 71. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng a và góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính góc giữa (SBD) và (SAC)

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Ta có $BD \perp AC; BD \perp SC$

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân đỉnh S.

B. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau.

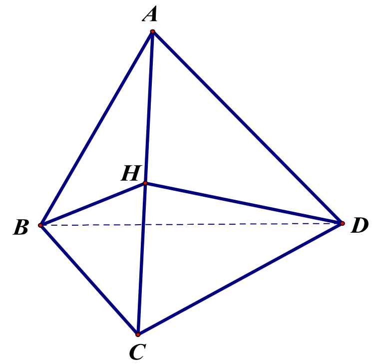
C. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân.

D. $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

Câu 73. Tính côsin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Gọi H là trung điểm của AC khi đó

$BH \perp AC; DH \perp AC$

Góc giữa hai mặt của tứ diện bằng $\widehat{BHD}$

Ta có $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác BHD có :

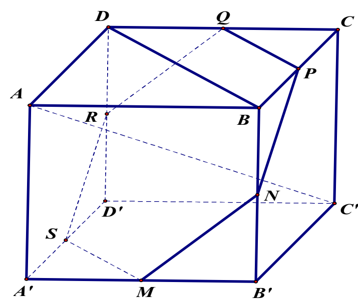
$BD^2 = BH^2 + HD^2 - 2BH.HD.\cos\widehat{BHD}$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4} - 2\dfrac{3a^2}{4}.\cos\widehat{BHD} \Rightarrow \cos\widehat{BHD} = \dfrac{1}{3}$

Câu 74. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Diện tích thiết diện là

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = a^2$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải



Chọn D.

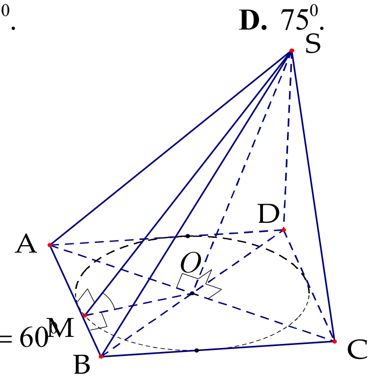
Ta có mặt phẳng trung trực của AC' cắt hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là lục giác đều $MNPQRDS$ cạnh $\dfrac{1}{2}B'C = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $S = 6.\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SO \perp (ABCD), SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn nội tiếp $ABCD$ có bán kính bằng a. Tính góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 75^0.

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Ta có $SO \perp (ABCD)$ và OM, ON, OP, OQ lần lượt vuông góc với AB, BC, CD, DA

Theo định lí ba đường vuông góc ta có

$SM \perp AB, SN \perp BC, SP \perp CD, SQ \perp DA$

Từ đó suy ra $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}$

Xét tam giác SMO vuông tại O ta có $\tan\widehat{SMO} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^0$

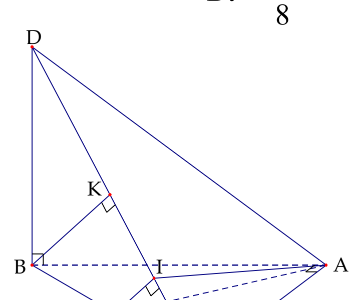
Vậy mỗi mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau và bằng 60^0.

Câu 76. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P), D trên (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD = a$. Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD là?

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{8}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có: $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=\Delta\\BD\subset(Q),BD\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow BD\perp(P)$

Gọi H là trung điểm BC, ta có $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp BD\end{cases}\Rightarrow AH\perp CD$

Trong mặt phẳng (BCD), kẻ $HI\perp CD$ thì ta có $CD\perp(AHI)$

Khi đó mặt phẳng (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là tam giác AHI

Mặt khác tam giác ABC vuông cân tại A nên $BC=a\sqrt{2}$.

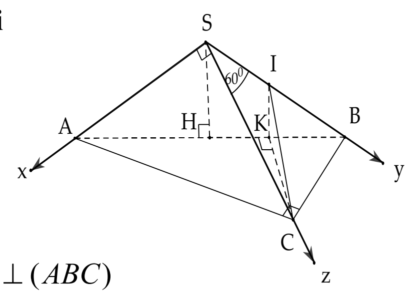
Trong tam giác vuông BCD, kẻ đường cao BK thì $BK=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ và $HI=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác AHI vuông tại H và có diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Câu 77. Cho góc tam diện Sxyz với $\widehat{xSy}=120^0$, $\widehat{ySz}=60^0$, $\widehat{zSx}=90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các điểm A,B,C sao cho $SA=SB=SC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng :

A. 90^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Áp dụng định lí Côsin trong tam giác SAB, ta có $AB=a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông cân tại S nên $AC=a\sqrt{2}$;

tam giác SBC đều nên $BC=a$.

Vì $AC^2+BC^2=AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C

Gọi H là trung điểm AB thì ta có $\begin{cases}HA=HB=HC\\SA=SB=SC\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$

Mà $SH\subset(SAB)$ nên $(SAB)\perp(ABC)$. Vậy $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=90^0$.

Câu 78. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với đường cao SH. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi các cạnh bên bằng nhau

B. H là trung điểm của một cạnh đáy khi hình hộp đó có một mặt bên vuông góc với mặt đáy.

C. H trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi các góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy bằng nhau.

D. H thuộc cạnh đáy thì hình chóp đó có một mặt bên vuông góc với đáy

Câu 79. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và điểm M. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có duy nhất một mặt phẳng qua M và vuông góc với (P).

B. Có vô số mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q).

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q).

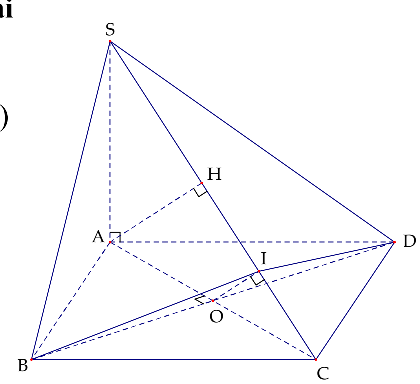
D. Không có mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và vuông góc với (Q).

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng bao nhiêu?

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 90^0 **D.** 60^0

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có: $SC \perp BD$ (vì $BD \perp AC, BD \perp SA$)

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OI \perp SC$ thì ta có $SC \perp (BID)$

Khi đó $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \widehat{BID}$

Trong tam giác SAC, kẻ đường cao AH thì $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Mà O là trung điểm AC và $OI \parallel AH$ nên $OI = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Tam giác IOD vuông tại O có $\tan\widehat{OID} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OID} = 60^0$

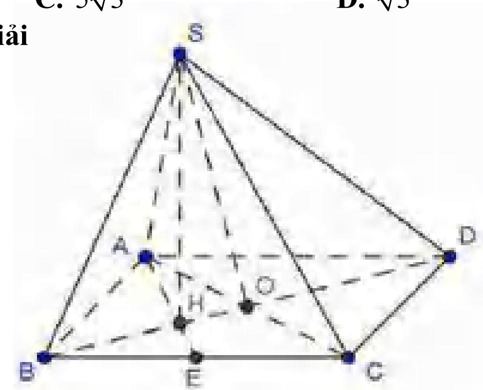
Vậy hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau một góc 60^0.

Câu 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{ABC} = 60^0$. Các cạnh SA, SB, SC đều bằng $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc của hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$. Giá trị $\tan\varphi$ bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $3\sqrt{5}$ **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Do $AB = BC$ và $\widehat{ABC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(ABCD)$.

Do $SA = SB = SC$

Nên H là tâm đường tròn ngoại tiế tam giác ABC.

Ta có : $\begin{cases} (SAC) \cap (ABCD) = AC \\ SO \perp AC, HO \perp AC \end{cases}$.

$\Rightarrow ((SAC),(ABCD)) = (SO, HO) = \widehat{SOH}$

Mặt khác, $HO = \dfrac{1}{3}BO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

Suy ra $\tan\varphi = \dfrac{SH}{HO} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{5}$.

Câu 82. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng ki**A.**

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu A sai vì ta có thể lấy $A, B \in d$.

Câu B là một định lý đã có trong SGK.

Câu C sai vì $(P),(Q)$ có thể cắt nhau (Ví dụ như câu B).

Câu D sai vì đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia nếu đường thẳng này vông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng.

Câu 83. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A. Gọi H là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.

B. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.

C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$.

D. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC.

Hướng dẫn giải

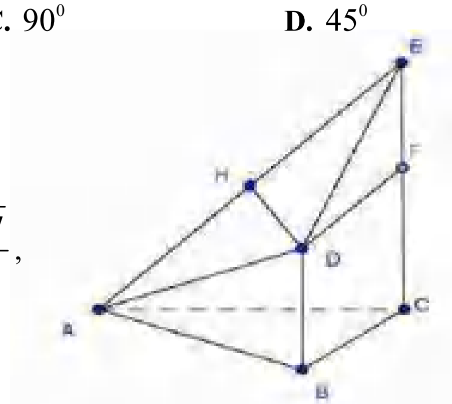
Chọn B.

Câu B sai vì $AB \neq BC$

Câu 84. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P)tại B, C lần lượt lấy D, E nằm trên cùng một phía đối với (P) sao cho $BD = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}, CE = a\sqrt{3}$. Góc giữa (P) và (ADE) bằng bao nhiêu?

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

Hướng dẫn giải



Chọn B.

Gọi $\varphi = ((ABC),(ADE))$. Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác, ta có: $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$,

$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Gọi F là trung điểm EC, ta có $DF = BC = a$.

Do đó $DE = \sqrt{DF^2 + FE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. Suy ra tam giác ADE cân tại D.

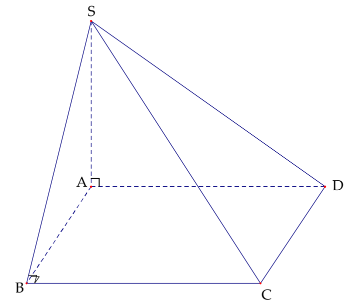
Gọi H là trung điểm AE, ta có $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{4} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow S_{ADE} = \dfrac{1}{2}DH.AE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^o$.

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Ta có $(SBC)\cap(ABCD)=BC$; $BC\perp AB$; $BC\perp SA$

Suy ra $\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right)=\widehat{SBA}$

Tam giác SAB vuông tại A có $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=30^0$

Vậy (SBC) và $(ABCD)$ hợp với nhau một góc 30^0.

Câu 86. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. Hình lăng trụ tam giác có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
B. Hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.
C. Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.
D. Hình lăng trụ có đáy là đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Hướng dẫn giải

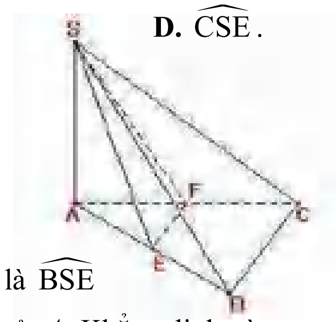
Chọn D.

Giả sử lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên $(AA'B'B),(AA'C'C)$ là hình chữ nhật, khi đó ta có $\begin{cases}AA'\perp AB\\AA'\perp AC\end{cases}\Rightarrow AA'\perp(ABC)$. Vậy là $ABC.A'B'C'$ lăng trụ đứng.

Theo định nghĩa hình chóp đều và hình lăng trụ đều ta có đáp án B, C đúng.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là :

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $(SEF)\cap(SBC)=Sx//EF//BC$

$\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SE, BC\perp SB$

$\Rightarrow SB\perp Sx, SE\perp Sx \Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là $\widehat{BSE}$

Câu 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và đáy ABC vuông ở A. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(SAB)\perp(SAC)$.

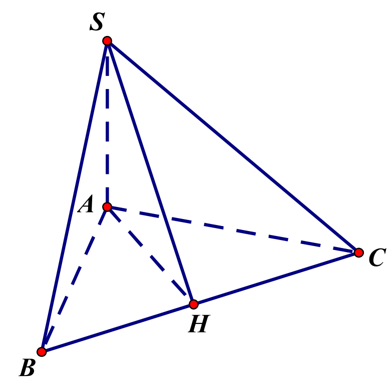
B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\widehat{SCB}$.

C. Vẽ $AH\perp BC, H\in BC\Rightarrow$ góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

D. $(SAB)\perp(ABC)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$

Mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$ **Vậy A đúng**

Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$

$\begin{cases} AH \perp BC, AH \subset (ABC) \\ SH \perp BC, SH \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \widehat{SHA}$. **Vậy C đúng**

Ta có: $SA \perp (ABC)$

Mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$ **Vậy D đúng.**

Câu 89. Cho (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau và giao tuyến của chúng là đường thẳng m. Gọi a,b,c,d là các đường thẳng. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu $a \subset (P)$ và $a \perp m$ thì $a \perp (Q)$.
B. Nếu $c \perp m$ thì $c \perp (Q)$.
C. Nếu $b \perp m$ thì $b \subset (P)$ hoặc $b \subset (Q)$.
D. Nếu $d \perp m$ thì $d \perp (P)$.

Hướng dẫn giải

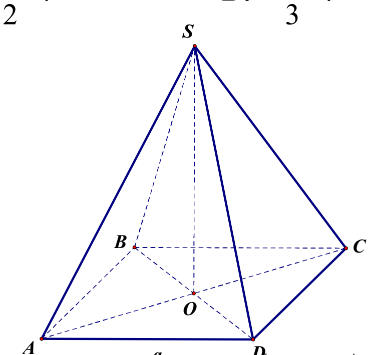
Chọn B.

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 90. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Độ dài SO bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
B. $\dfrac{a}{2}$.
C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn A.

Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

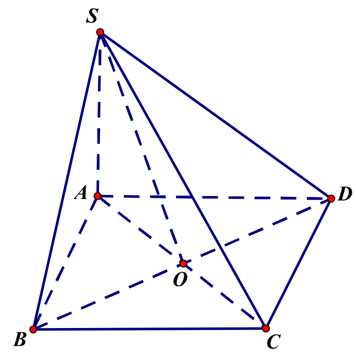
Câu 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA \perp (ABCD)$ .Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.
B. $(SAC) \perp (SBD)$.
C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.
D. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = CD$



$\begin{cases} AB \perp BC, AB \subset (ABCD) \\ SB \perp BC, SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \widehat{ABS}$. **Vậy A đúng**

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$. **Vậy B đúng**

Ta có: $(SBD) \cap (ABCD) = BD$

$\begin{cases} AO \perp BD, AB \subset (ABCD) \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \widehat{SOA}$. **Vậy C đúng**

Ta có: $(SAD) \cap (ABCD) = BD$

$\begin{cases} AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAD);(ABCD)}\right) = \widehat{SAB} = 90^0$. **Vậy D sai.**

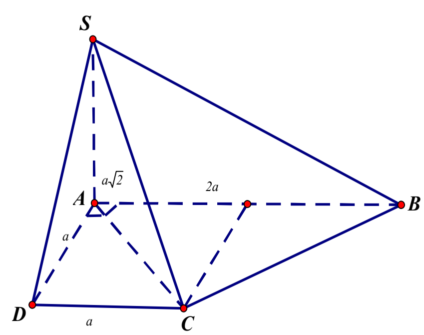
Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. $AB = 2a$, $AD = DC = a$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(SBC) \perp (SAC)$ **B.** Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với AB

C. (SDC) tạo với (BCD) một góc 60^0 **D.** (SBC) tạo với đáy một góc 45^0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



+ Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$ **(A đúng)**

+ $\begin{cases} (SAD) \cap (SAB) = S \\ AB // CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SAB) = Sx // AB$ **B đúng**

$+ (SCD) \cap (BCD) = CD$. Ta có: $\begin{cases} AD \perp CD, AD \subset (BCD) \\ SD \perp CD, SD \subset (SCD) \end{cases}$

Suy ra góc giữa (SDC) và (BCD) là $\widehat{SDA}$, $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = 54^0 44'$ **(C sai)**

Câu 93. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $AC \perp BD'$.

B. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau.

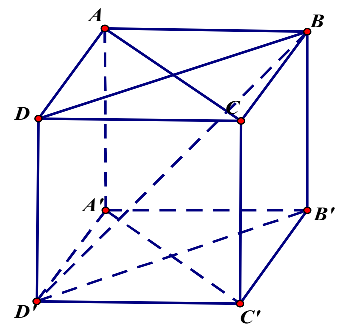
C. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc nhau.

D. Bốn đường chéo $AC', A'C, BD', B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD'B') \supset BD' \Rightarrow AC \perp BD'$



Đáp án A đúng.

Vì $ACC'A'$ có $AA' = a; AC = a\sqrt{2} \Rightarrow ACC'A'$ là hình chữ nhật

Đáp án B sai.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD'B')$

Mà $AC \subset (ACC'A) \Rightarrow (BDD'B') \perp (ACC'A')$

Câu 94. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy (ABC) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về $AA'GG'$?

A. $AA'GG'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $6a^2$.

B. $AA'GG'$ là hình chữ nhật có hai kích thước là $2a$ và $3a$.

C. $AA'GG'$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.

D. $AA'GG'$ là hình vuông có diện tích bằng $8a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

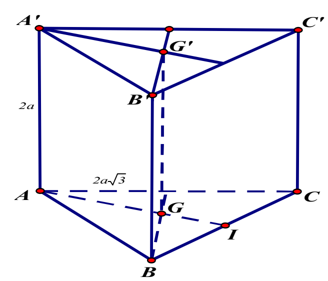
Gọi I là trung điểm BC

Ta có: $AI = \dfrac{2a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = 3a$

$AG = \dfrac{2}{3}AI = 2a = AA'$

Vậy $AA'GG'$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$

Đáp án C đúng.



Câu 95. Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADA'D'$ là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

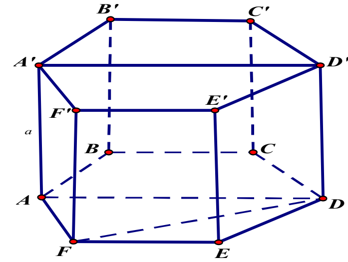
Chọn A.

Vì ABCDEF là lục giác đều nên tam giác AFD vuông tại F và $\widehat{FDA} = 60^0$.

Ta có:

$\cos\widehat{FAD} = \dfrac{AF}{AD} \Rightarrow AF = AD.\cos\widehat{FAD}$

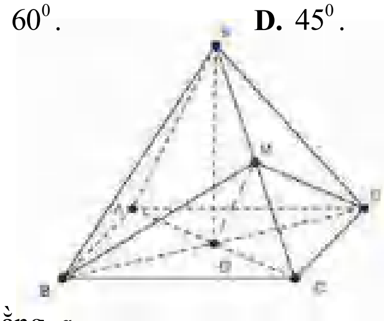
$= a.\cos 60^0 = \dfrac{a}{2}$



Câu 95. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) bằng:

A. 30^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Hướng dẫn giải



Chọn B.

Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$ nên $BD \perp (SAC)$.

Suy ra: $(MBD) \perp (SAC)$.

Vậy ta có: $((SAC),(MBD)) = 90^0$.

Câu 96. Tính độ dài đường chéo của hình lập phương cạnh bằng a.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

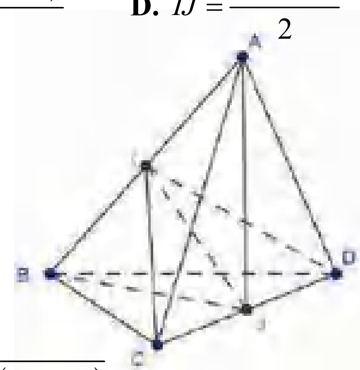
Chọn C.

$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 3a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{3}$

Câu 97. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính IJ theo a và x?

A. $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$ **B.** $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 + x^2)}}{2}$ **C.** $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$ **D.** $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AJ \\ (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp BJ$.

Vậy tam giác ABJ vuông tại J

Ta có: $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Do đó tam giác ABJ vuông cân tại J. Suy ra $IJ = \dfrac{AJ\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$

Câu 98. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu A sai vì a, b có thể trùng nhau.

Câu C sai vì khi a, b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) không vuông góc với a.

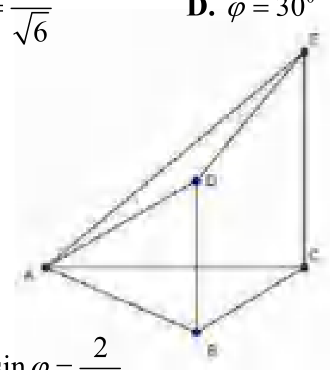
Câu D sai vì khi a,b chéo nhau và vuông góc với nhau, ta gọi (α) là mặt phẳng chứa a, song song với b và (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a thì $(\alpha)//(\beta)$

Câu 99. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi d_B,d_C lần lượt là đường thẳng đi qua B,C và vuông góc với (ABC). (P) là mặt phẳng qua A và hợp với (ABC) góc 60^0. (P) cắt d_B,d_C lần lượt tại D và E. biết $AD=a\dfrac{\sqrt{6}}{2}, AE=a\sqrt{3}$. đặt $\widehat{DAE}=\varphi$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **B.** $\varphi=60^0$ **C.** $\sin\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ **D.** $\varphi=30^0$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $S_{ABC}=S_{ADE}.\cos\alpha$ với $\alpha=((ABC),(ADE))=60^0$.

Do đó $S_{ADE}=\dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\cos 60^0}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

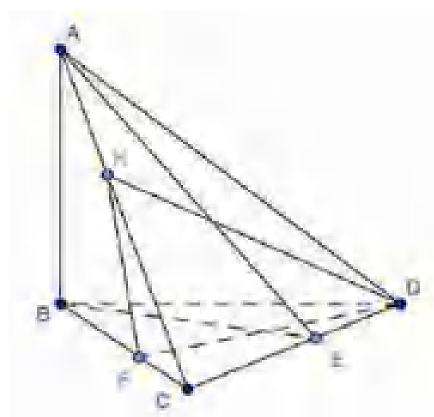
Mặt khác, $S_{ADE}=\dfrac{1}{2}AD.AE.\sin\varphi \Leftrightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}.\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 100. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. $(ABE)\perp(ADC)$. **B.** $(ABD)\perp(ADC)$.
C. $(ABC)\perp(DFK)$. **D.** $(DFK)\perp(ADC)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có: $\begin{cases}(ABC)\perp(BCD)\\(ABD)\perp(BCD)\\(ABC)\cap(ABD)=AB\end{cases} \Rightarrow AB\perp(BCD)$.

Mặt khác: $\begin{cases}CD\perp BE\\CD\perp AB\end{cases}\Rightarrow CD\perp(ABE)$ nên câu A đúng.

$\begin{cases}(ABC)\perp(BCD)\\(ABC)\cap(BCD)=BC\\DF\perp BC\end{cases}\Rightarrow DF\perp(ABC)$ nên câu C đúng.

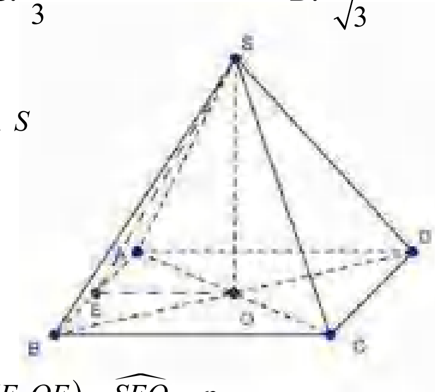
Theo trên ta có $DF\perp(ABC)$ nên $DF\perp AC$.

Vậy ta có $\begin{cases}AC\perp DF\\AC\perp DK\end{cases}\Rightarrow AC\perp(DKF)\Rightarrow(ACD)\perp(DKF)$. Do đó câu D đúng.

Câu 101. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính côsin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải



Chọn D.

Gọi $O = AC \cap BD$. Do các tam giác SAC và SBD cân tại S nên $SO \perp AC$ và $SO \perp BD$.

Suy ra hai tam giác vuông SOA và SOB bằng nhau.

Vậy ta có $OA = OB$. Suy ra $AC = BD$ (1).

Mặt khác ta có $ABCD$ là hình thoi (2)

Từ (1) và (2) ta có $ABCD$ là hình vuông.

Gọi E là trung điểm của AB.

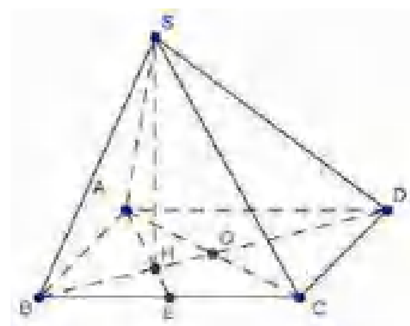
Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SE \perp AB, EO \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(ABCD)) = (SE, OE) = \widehat{SEO} = \varphi$

Ta có: $\cos\varphi = \dfrac{EO}{SE} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ và có $SA = SB = SC = a$. Tam giác SBD là tam giác gì ?

A. Tam giác đều **B.** Tam giác cân **C.** Tam giác vuông cân **D.** Tam giác vuông

Hướng dẫn giải



Chọn D.

Gọi $O = AC \cap BD$, E là trung điểm cảu BC, H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy $H = BO \cap AE$.

Tam giác ABC cân có $\widehat{BAD} = 60^0$ nên là tam giác đều.

Suy ra $BH = \frac{2}{3}BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $HD = 2BH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

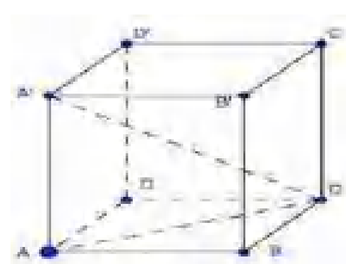
Do đó $SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} + \frac{4a^2}{3}} = 2a$.

Vậy tam giác SBD có $SD^2 = SB^2 + BD^2 = 4a^2$ nên vuông.

Câu 103. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = 2a$. Gọi α là góc giữa đường chéo $A'C$ và đáy $ABCD$. Tính α

A. $\alpha \approx 24^0 5'$ **B.** $\alpha \approx 25^0 56'$ **C.** $\alpha \approx 30^0 18'$ **D.** $\alpha \approx 20^0 42'$

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Do $AA' \perp (ABCD)$ nên $(A'C,(ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$.

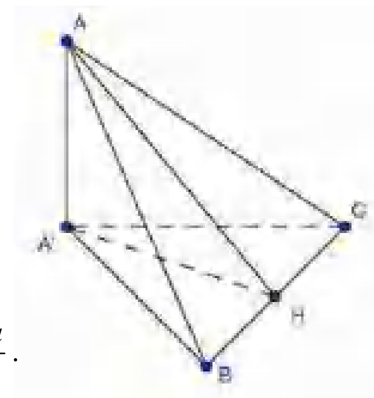
Do đó $\tan\alpha = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\alpha \approx 24^0 5'$.

Câu 104. Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH = a\sqrt{3}$, $BC = 3a$, BC chứa trong mặt phẳng (P). Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P). Biết tam giác $A'BC$ vuông tại A'. Gọi φ là góc giữa (P) và (ABC). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\varphi = 60^0$ **B.** $\varphi = 45^0$ **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\varphi = 30^0$

Hướng dẫn giải



Chọn D.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AA' \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp A'H$.

Do đó: $\begin{cases} (ABC) \cap (A'BC) = BC \\ BC \perp AH, BC \perp A'H \end{cases}$.

$\Rightarrow ((ABC),(A'BC)) = (AH, A'H) = \widehat{AHA'}$

Mặt khác, tam giác $A'BC$ vuông tại A' nên $A'H = \frac{1}{2}BC = \frac{3a}{2}$.

Ta có $\cos\varphi = \frac{A'H}{AH} = \frac{\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Câu 105. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác

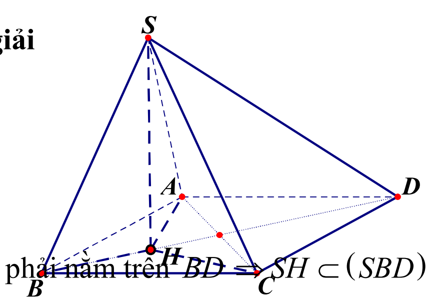
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.

Hướng dẫn giải



Chọn B.

Gọi H là chân đường vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ $(SH \perp (ABCD))$

$SA = SB = SC = a$ $\Rightarrow$ các hình chiếu: $HA = HB = HC$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn (ABC)

Mà tam giác ABC cân tại B (vì $BA = BC = a$) $\Rightarrow$ tâm H phải nằm trên $BD \Rightarrow SH \subset (SBD)$

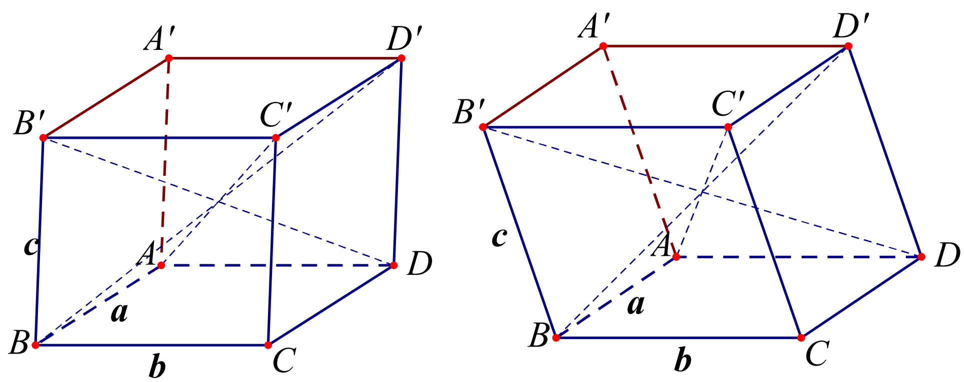
Vậy có $\left.\begin{matrix} SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SBD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$ nên góc $[(SBD),(ABCD)] = 90^o$.

Câu 107. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Nếu $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp là

A. Hình lập phương **B.** Hình hộp chữ nhật **C.** Hình hộp thoi **D.** Hình hộp đứng

Hướng dẫn giải

Chọn B.



$AC' = BD'$ $\Rightarrow$hình bình hành $ABC'D'$ là hình chữ nhật

$BD' = B'D$ $\Rightarrow$hình bình hành $BDD'B'$ là hình chữ nhật

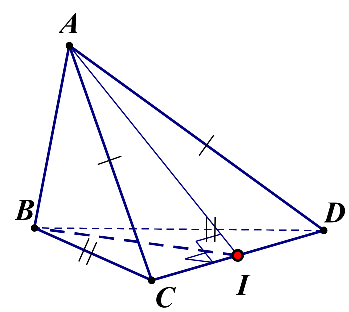
$AC' = B'D$ $\Rightarrow$hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật

Câu 108. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là $\widehat{CBD}$. **B.** $(BCD) \perp (AIB)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB}$. **D.** $(ACD) \perp (AIB)$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Tam giác BCD cân tại B có I trung điểm đáy CD

$\Rightarrow CD \perp BI$ (1)

Tam giác ACD cân tại A có I trung điểm đáy CD

$\Rightarrow CD \perp AI$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow CD \perp (ABI)$.

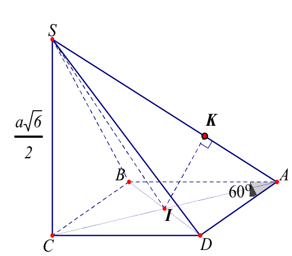
Vậy A: sai

Câu 109. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I cạnh bằng a và góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trong tam giác SCA kẻ $IK \perp SA$ tại K. Tính độ dài IK được

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{a}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Tam giác AKI đồng dạng tam giác ACS $\Rightarrow \dfrac{IK}{SC} = \dfrac{AI}{SA} \Rightarrow IK = \dfrac{SC.AI}{SA}$

ΔBCD và ΔABD đều cạnh a $\Rightarrow IA = IC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

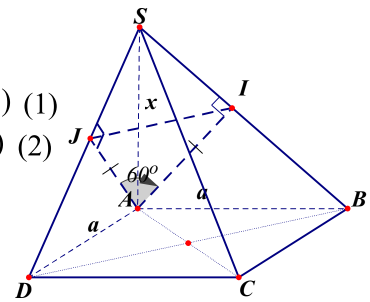
ΔSAC vuông tại C $\Rightarrow SA=\sqrt{SC^2+AC^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $IK=\frac{a}{2}$

Câu 110. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA\perp(ABCD)$, $SA=x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau góc 60^o.

A. $x=\frac{3a}{2}$ **B.** $x=\frac{a}{2}$ **C.** $x=a$ **D.** $x=2a$

Hướng dẫn giải



Chọn C.

* Trong (SAB) dựng $AI\perp SB$ ta chứng minh được $AI\perp(SBC)$ (1)

Trong (SAD) dựng $AJ\perp SD$ ta chứng minh được $AJ\perp(SCD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$góc $\left((SBC),(SCD)\right)=(AI,AJ)=\widehat{IAJ}$

* Ta chứng minh được $AI=AJ$.

Do đó, nếu góc $\widehat{IAJ}=60^o$ thì ΔAIJ đều $\Rightarrow AI=AJ=IJ$

ΔSAB vuông tại A có AI là đường cao $\Rightarrow AI.SB=SA.AB$ $\Rightarrow AI=\frac{SA.AB}{SB}$ (3)

Và có $SA^2=SI.SB$ $\Rightarrow SI=\frac{SA^2}{SB}$ (4)

Ta chứng minh được $IJ//BD$ $\Rightarrow \frac{IJ}{BD}=\frac{SI}{SB}$ $\Rightarrow IJ=\frac{SI.BD}{SB}\overset{(4)}{=}\frac{SA^2.BD}{SB^2}$ (5)

Thế (3)&(5) vào $AI=IJ$ $\Rightarrow AB=\frac{SA.BD}{SB}$ $\Leftrightarrow AB.SB=SA.BD$ $\Leftrightarrow a.\sqrt{x^2+a^2}=x.a\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$

$x^2+a^2=2x^2$ $\Leftrightarrow x=a$

Câu 111. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $BC=b$, $CC'=c$. Độ dài đường chéo AC' là

A. $AC'=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $AC'=\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$.

C. $AC'=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **D.** $AC'=\sqrt{a^2-b^2+c^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 112. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **không** đúng?

A. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp.

B. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau.

D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng qui tại trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 113. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

* Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước, chúng nằm trong mặt phẳng đi qua điểm đó và vuông góc với một đường thẳng cho trước $\Rightarrow$ "Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước": SAI

* Có vô số mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước, trong trường hợp: đường thẳng cho trước vuông góc với mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$:Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước": SAI

* Có vố số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước $\Rightarrow$"Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước": SAI

Câu 114. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

B. Cho đường thẳng $a\perp(\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta)\perp(\alpha)$.

C. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

Hướng dẫn giải

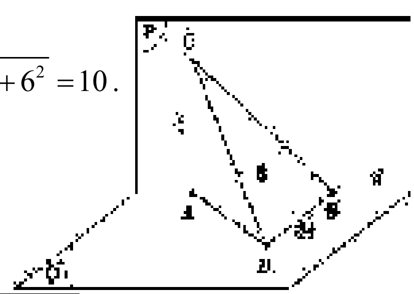
Chọn B.

Câu 115. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến d của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho $AB=8$. Gọi C là một điểm trên (P), D là một điểm trên (Q) sao cho AC, BD cùng vuông góc với giao tuyến d và $AC=6$, $BD=24$. Độ dài CD là:

A. 20. **B.** 22. **C.** 30. **D.** 26.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Tam giác ABC vuông tại A nên $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\(Q)\supset BD\perp d\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(P)\Rightarrow BD\perp BC$.

Tam giác BCD vuông tại B nên $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{24^2+10^2}=26$.

Câu 116. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

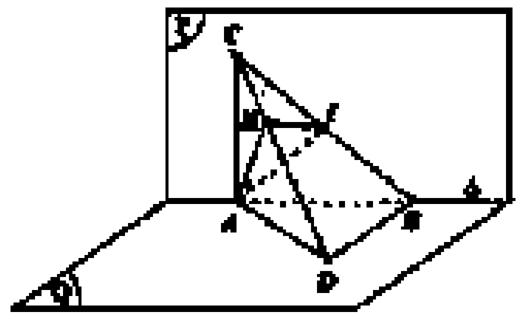
Chọn A.

Câu 117. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy C trên (P), D trên (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với CD là hình gì?

A. Tam giác cân **B.** Hình vuông **C.** Tam giác đều **D.** Tam giác vuông

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi I là trung điểm của BC.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=d\\(Q)\supset BD\perp d\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(P)\Rightarrow BD\perp AI$.

$\left.\begin{matrix}AI\perp BC\\AI\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AI\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp CD$.

Trong (ACD), dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với CD cắt CD tại H.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác AHI.

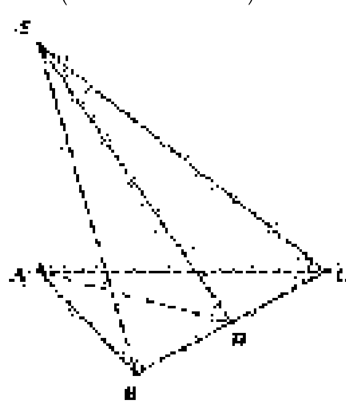
Vì $AI\perp(BCD)\Rightarrow AI\perp HI$ nên tam giác AHI là tam giác vuông tại I.

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH $(H\in BC)$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC). Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $SC\perp(ABC)$ **B.** $O\in SH$ **C.** $(SAH)\perp(SBC)$ **D.** $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SBA}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\left.\begin{matrix}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$.

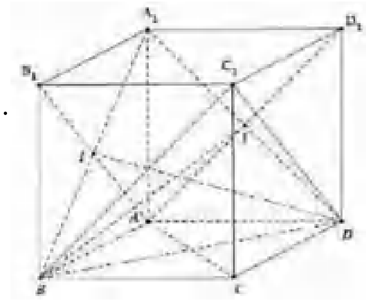
$\left.\begin{matrix}BC\perp AH\\BC\perp SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAH)\Rightarrow BC\perp SH$.

Mặt khác, $AH\perp BC$ nên $((SBC),(ABC))=(SH,AH)=\widehat{SHA}$.

Câu 119. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Mặt phẳng (A_1BD) không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (AB_1D) **B.** (ACC_1A_1) **C.** (ABD_1) **D.** (A_1BC_1)

Hướng dẫn giải



Chọn D.

* Gọi $I = AB_1 \cap A_1B$.

Tam giác A_1BD đều có DI là đường trung tuyến nên $DI \perp A_1B$.

$DA \perp (AA_1B_1B) \Rightarrow DA \perp A_1B$.

$\left.\begin{matrix} A_1B \perp DI \\ A_1B \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1B \perp (AB_1D)$ nên A đúng.

* Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp AA_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACC_1A_1) \Rightarrow (A_1BD) \perp (ACC_1A_1)$ nên B đúng.

* Gọi $J = AD_1 \cap A_1D$. Tam giác A_1BD đều có BJ là đường trung tuyến nên $BJ \perp A_1D$.

$BA \perp (AA_1D_1D) \Rightarrow BA \perp A_1D$. $\left.\begin{matrix} A_1D \perp BJ \\ A_1D \perp BA \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1B \perp (ABD_1)$ nên C đúng.

Câu 120. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và gọi $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

I. Nếu $a \subset (\alpha)$ và $a \perp d$ thì $a \perp (\beta)$.

II. Nếu $d' \perp (\alpha)$ thì $d' \perp d$.

III. Nếu b ⊥ d thì b ⊂ (α) hoặc b ⊂ (β).

IV. Nếu (γ) ⊥ d thì (γ) ⊥ (α) và (γ) ⊥ (β).

Các mệnh đề đúng là :

A. I, II và III **B.** III và IV **C.** II và III **D.** I, II và IV

Hướng dẫn giải

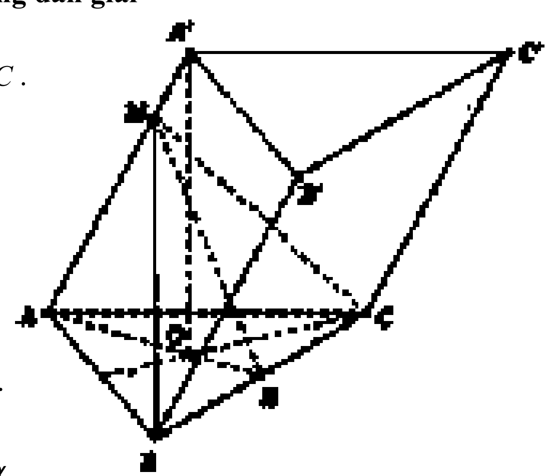
Chọn D.

Câu 121. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tang của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó, $A'O \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH \perp BC$.

Vì tam giác ABC đều nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp A'O \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp MH$.

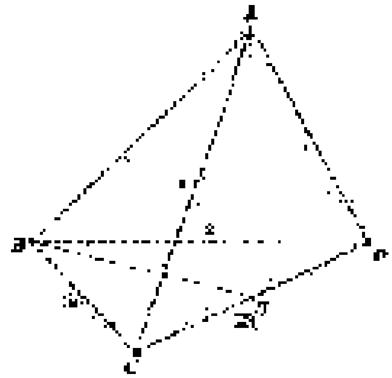
Do đó, $((MBC),(ABC)) = (MH, AH) = \widehat{MHA} = \alpha$.

Tam giác MAH vuông tại A nên $\tan\alpha = \dfrac{AM}{AH} = \dfrac{\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 122. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính AB theo a và x?

A. $AB = \sqrt{2\left(a^2 + x^2\right)}$ **B.** $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$ **C.** $AB = \sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}$ **D.** $AB = \sqrt{a^2 + x^2}$

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Gọi H là trung điểm của CD.

Vì tam giác ACD cân tại A và tam giác BCD cân tại B nên $AH \perp CD$, $BH \perp CD$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}(ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ (ACD) \supset AH \perp CD\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp BH$.

$\Delta ACD = \Delta BCD\,(c.c.c) \Rightarrow AH = BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Tam giác AHB vuông tại H nên $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}$.

Câu 123. Cho tứ diện đều $ABCD$. Góc giữa (ABC) và (ABD) bằng α. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ **C.** $\alpha = 60^0$ **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AB.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $CI \perp AB$ và $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$ và $DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó, $\left((ABC),(ABD)\right) = (CI, DI) = \widehat{CID} = \alpha$.

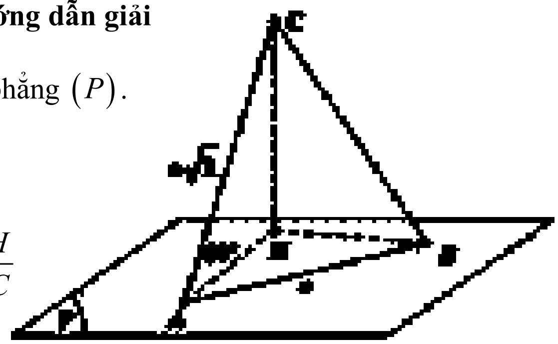
Tam giác CID có $\cos\alpha = \dfrac{IC^2 + ID^2 - CD^2}{2.IC.ID} = \dfrac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{3a^2}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 124. Cho tam giác ABC vuông tại A. Cạnh $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (P), cạnh $AC = a\sqrt{2}$, AC tạo với (P) một góc 60^0. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. (ABC) tạo với (P) góc 45^0. **B.** BC tạo với (P) góc 30^0.

C. BC tạo với (P) góc 45^0. **D.** BC tạo với (P) góc 60^0.

Hướng dẫn giải



Chọn C.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (P).

Khi đó, $(AC,(P)) = (AC, AH) = \widehat{CAH} = 60^0$

và $(BC,(P)) = (BC, AH) = \widehat{CBH} = \alpha$.

Tam giác AHC vuông tại H nên $\sin\widehat{CAH} = \dfrac{CH}{AC}$

$\Rightarrow CH = AC.\sin\widehat{CAH} = a\sqrt{2}.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Tam giác CHB vuông tại H nên $\sin\alpha = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH. Xét các mệnh đề sau:

(I) $SA = SB = SC$.

(II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(III) Tam giác ABC là tam giác đều.

(IV) H là trực tâm tam giác ABC.

Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều?

A. (III) và (IV). **B.** (II) và (III). **C.** (I) và (II). **D.** (IV) và (I)

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 126. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

D. Một mặt phẳng (P) và một đường thẳng a không thuộc (P) cùng vuông góc với đường thẳng b thì $(P)//a$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 127. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có bốn mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

B. Nếu hình hộp có ba mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Nếu hình hộp có hai mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

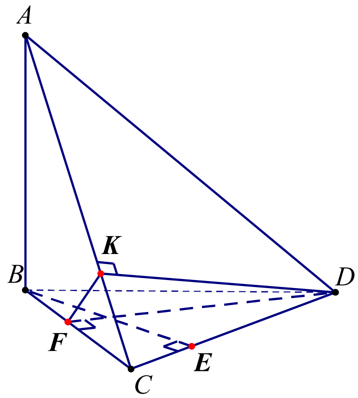
D. Nếu hình hộp có năm mặt bên là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 128. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$. Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau ở O. Trong (ADC) vẽ $DK \perp AC$ tại K. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

A. $(ADC) \perp (ABE)$ **B.** $(ADC) \perp (DFK)$ **C.** $(ADC) \perp (ABC)$ **D.** $(BDC) \perp (ABE)$



Hướng dẫn giải

Chọn C.

* Ta có $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABE) \\ \hspace{5em} CD \subset (ADC) \end{array}\right\} \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

Vậy “$(ADC) \perp (ABE)$”: ĐÚNG.

* $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow DF \perp (ABC) \\ \hspace{5em} SC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow DF \perp AC \\ \hspace{10em} DK \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (DFK) \\ \hspace{15em} AC \subset (ADC) \end{array}\right\} \Rightarrow (ADC) \perp (DFK)$

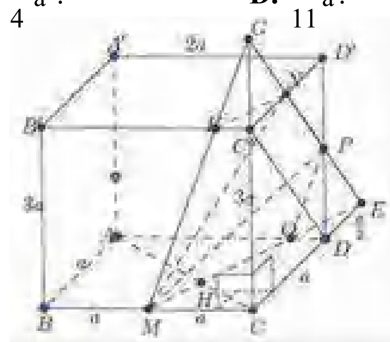
Vậy “$(ADC) \perp (DFK)$”: ĐÚNG.

* Ta có $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABE) \\ \hspace{5em} CD \subset (BDC) \end{array}\right\} \Rightarrow (BDC) \perp (ABE)$. Vậy “$(BDC) \perp (ABE)$”: ĐÚNG.

* “$(ADC) \perp (ABC)$”: SAI

Câu 129. [THPT Thuận Thành – Bắc Ninh – 2018]: Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A’B’C’D’ có $AB = a,\ AD = 2a,\ AA' = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, C’D’ và DD’. Tính khoảng cách từ A đến mp(MNP).

A. $\frac{15}{22}a$. **B.** $\frac{9}{11}a$. **C.** $\frac{3}{4}a$. **D.** $\frac{15}{11}a$.



Chọn D

Gọi E là giao điểm của NP và CD.

Gọi G là giao điểm của NP và CC’.

Gọi K là giao điểm của MG và B’C’.

Gọi Q là giao điểm của ME và AD.

Khi đó mặt phẳng (MNP) chính là mặt phẳng (MEG).

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ C, A đến mặt phẳng (MEG). Do AC cắt (MEG) tại điểm H (như hình vẽ) nên $\frac{d_1}{d_2} = \frac{HC}{HA}$.

Do tứ diện CMEG là tứ diện vuông tại C nên $\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CG^2}$

Ta có $\frac{GC'}{GC} = \frac{C'N}{CE} = \frac{1}{3}$. Suy ra $GC = \frac{3}{2}CC' = \frac{9a}{2}$. Như vậy: $\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{81a^2}$.

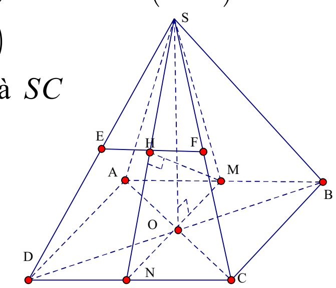
Từ đó $d_1^2 = \dfrac{81a^2}{12} \Rightarrow d_1 = \dfrac{9}{11}$. Ta có $\dfrac{QD}{MC} = \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow QD = \dfrac{a}{3}$

Câu 130. [TRƯỜNG THPT ĐỒNG HẬU-VĨNH PHÚC. LẦN 1]: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$ đường cao SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB là:

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Đáp án D

Vì $AB//(SCD) \Rightarrow$ khoảng cách d giữa AB bằng khoảng cách giữa AB và (SCD)



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD khi đó $AB \perp (SMN)$

Kẻ đường cao MH của $\Delta SMN \Rightarrow MH$ là khoảng cách giữa AB và SC

Ta có: $SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

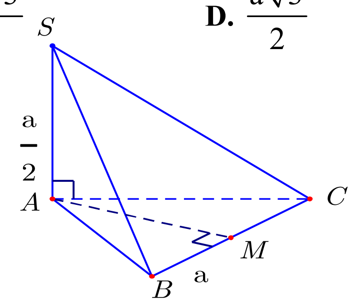
$\Rightarrow d = MH = \dfrac{SO.MN}{SN} = \dfrac{a.a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 131. (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018): Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $a\sqrt{3}$ **B.** a **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Đáp án D

$d(SA;BM) = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Câu 132. [THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc - Lần 1]: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết thể tích của khối lăng trụ là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $\dfrac{4a}{3}$ **B.** $\dfrac{2a}{3}$ **C.** $\dfrac{3a}{4}$ **D.** $\dfrac{3a}{2}$

Đáp án D

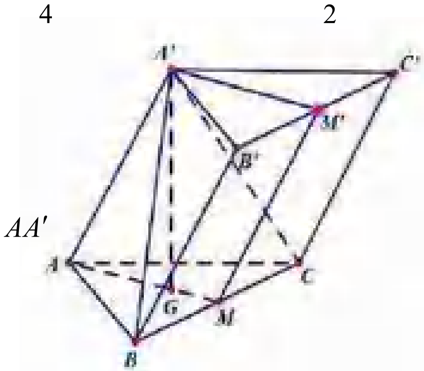
Ta có $d(AA',BC) = d(AA',(BB'C'C)) = d(A',(BBC'C))$

Gọi M và M' lần lượt là trung điểm BC và B'C',

G là trọng tâm của tam giác ABC

Theo giả thiết ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp AA'$

nên tứ giác BB'C'C là hình chữ nhật có cạnh BC = a



Vì $V_{A'ABC}=\frac{1}{3}A'G.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}V_{LT}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\Rightarrow A'G=a\Rightarrow AA'=\sqrt{AG^2+A'G^2}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{BB'C'C}=\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$

Có $V_{A'BB'C'C}=\frac{2}{3}V_{LT}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{3}d\left(A',\left(BB'C'C\right)\right).S_{BB'C'C}\Rightarrow d\left(A',\left(BB'C'C\right)\right)=\frac{3a}{2}$

Câu 133. (THPT Chuyên Đại Học Vinh - Nghệ An - 2018): Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, AA' = 2a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và A'C.

A. $a\sqrt{5}$ **B.** $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$

Đáp án B

• Gọi I, M lần lượt là trung điểm của $A'B, BC$. $\Rightarrow IM//A'C\Rightarrow A'C//\left(AB'M\right)$

$\Rightarrow d\left(AB',A'C\right)=d\left(A'C,\left(AB'M\right)\right)=d\left(C,\left(AB'M\right)\right)=\frac{3V_{B'AMC}}{S_{AB'M}}$.

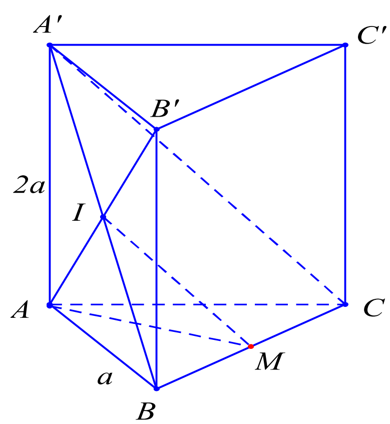
• $V_{B'.AMC}=\frac{1}{3}BB'.S_{AMC}=\frac{1}{6}.BB'.S_{ABC}=\frac{1}{6}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

• $B'M=\sqrt{BM^2+BB'^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+4a^2}=\frac{a\sqrt{17}}{2}$

• $\begin{cases}AM\perp BC\\AM\perp BB'\end{cases}\Rightarrow AM\perp\left(BCC'B'\right)\Rightarrow AM\perp B'M$

• $S_{ABM}=\frac{1}{2}AM.B'M=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{17}}{2}=\frac{a^2\sqrt{51}}{8}$.

• $d\left(AB',A'C\right)=\frac{3V_{B'AMC}}{S_{AB'M}}=\frac{3.a^3.\frac{\sqrt{3}}{12}}{a^2\frac{\sqrt{51}}{8}}=\frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

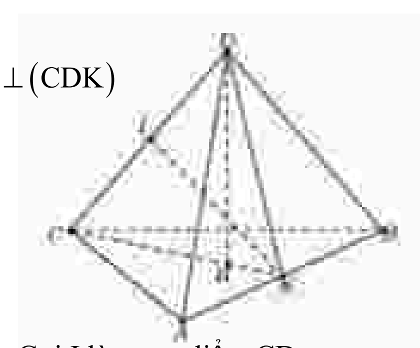


Câu 134. [THPT Thuận Thành – Bắc Ninh – 2018]: Cho tứ diện ABCD có AB = x, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 2. Gọi S là diện tích tam giác ABC, h là khoảng cách từ D đến mp(ABC).Với giá trị nào của x thì biểu thức $V=\frac{1}{3}S.h$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=1$. **B.** $x=\sqrt{6}$. **C.** $x=2\sqrt{6}$. **D.** $x=2$.

Chọn B

Gọi K là trung điểm của AB, do ΔCAB và ΔDAB là hai tam giác cân chung cạnh đáy AB nên $\begin{cases}CK\perp AB\\DK\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(CDK\right)$



Kẻ $DH\perp CK$ ta có $DH\perp\left(ABC\right)$

Vậy $V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CK.AB\right).DH=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CK.DH\right).AB$

Suy ra $V=\frac{1}{3}AB.S_{\Delta KDC}$

Dễ thấy $\Delta CAB=\Delta DAB\Rightarrow CK=DK$ hay ΔKDC cân tại K. Gọi I là trung điểm CD, suy ra $KI \perp CD$ và $KI = \sqrt{KC^2 - CI^2} = \sqrt{AC^2 - AK^2 - CI^2} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{12 - x^2}$

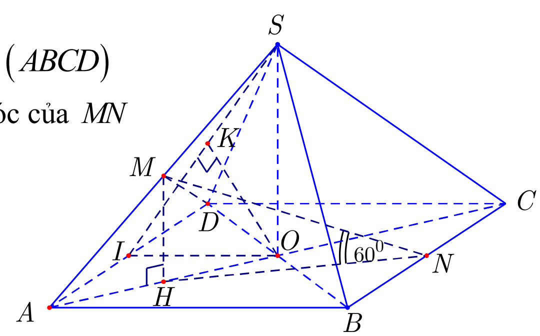
Suy ra $S_{\Delta KDC} = \frac{1}{2}KI.CD = \frac{1}{2}\sqrt{12 - x^2}$. Vậy $V = \frac{1}{6}x\sqrt{12 - x^2} \le \frac{1}{6}.\frac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{12 - x^2}$ hay $x = \sqrt{6}$.

Câu 135. (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình, lần 1 – 2018): Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và DM là:

A. $a.\sqrt{\frac{15}{62}}$. **B.** $a.\sqrt{\frac{30}{31}}$. **C.** $a.\sqrt{\frac{15}{68}}$. **D.** $a.\sqrt{\frac{15}{17}}$.

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$.

Gọi H là trung điểm $OA \Rightarrow MH // SO$ mà $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH$ là hình chiếu vuông góc của MN lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó, $\left(\widehat{MN;(ABCD)}\right) = \widehat{MNH} = 60^0$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} BC // AD \\ AD \subset (ADM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC // (ADM)$

$\Rightarrow d(BC;DM) = d(BC;(ADM)) = d(BC;(SAD)) = d(N \in BC;(SAD)) = 2d(O;(SAD))$.

Gọi I là trung điểm AD, ta có $(SAD) \perp (SOI)$ theo giao tuyến SI.

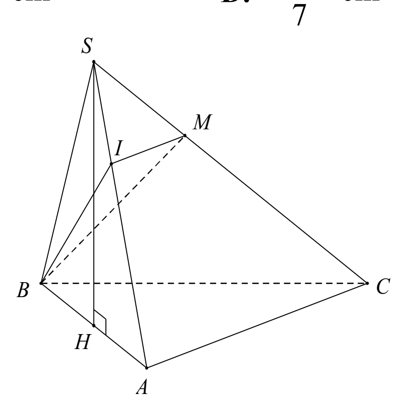
Kẻ $OK \perp SI \Rightarrow OK = d(O;(SAD))$. Tính được $NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}; MH = \frac{a\sqrt{30}}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{62a}{15} \Rightarrow OK = d(O;(SAD)) = \frac{\sqrt{930}}{62} \Rightarrow d(N;(SAD)) = 2OK = \sqrt{\frac{30}{31}}$.

Câu 136. (THPT Việt Trì): Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 4$ cm. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M thuộc SC sao cho $CM = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là?

A. $\frac{4\sqrt{21}}{21}$cm **B.** $\frac{8\sqrt{21}}{21}$cm **C.** $\frac{2\sqrt{21}}{3}$cm **D.** $\frac{4\sqrt{21}}{7}$cm

Chọn D



Gọi I là điểm thuộc SA sao cho $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow IM // AC$.

Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $\left.\begin{matrix} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \perp AB \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\left.\begin{matrix} AC \perp AB \\ AC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow IM \perp (SAB) \Rightarrow IM \perp BI \Rightarrow \Delta BIM$ vuông tại I.

$$\frac{V_{SBAM}}{V_{SBAC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{SBAM} = \frac{1}{3}V_{SBAC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9}.\frac{4\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}AB.AC = \frac{4\sqrt{3}}{9}AC.$$

$$\frac{V_{ABIM}}{V_{ABSM}} = \frac{AI}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{ABIM} = \frac{2}{3}V_{ABSM} = \frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{9}AC = \frac{8\sqrt{3}}{27}AC.$$

$$BI^2 = AB^2 + AI^2 - 2AB.AI.\cos 60^0 = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2.4.\frac{8}{3}.\cos 60^0 = \frac{112}{9} \Rightarrow BI = \frac{4\sqrt{7}}{3}.$$

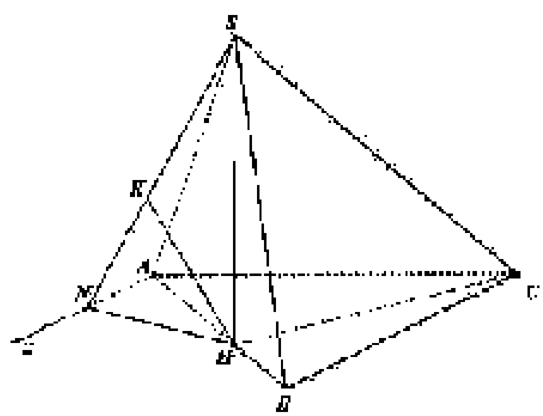
$$S_{\Delta BIM} = \frac{1}{2}BI.IM = \frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{7}}{3}.\frac{1}{3}AC = \frac{2\sqrt{7}}{9}AC.$$

$$V_{ABIM} = \frac{1}{3}S_{\Delta BIM}.d\left(A,(BIM)\right) \Rightarrow d\left(A,(BIM)\right) = \frac{3V_{ABIM}}{S_{\Delta BIM}} = \frac{3.\frac{8\sqrt{3}}{27}AC}{\frac{2\sqrt{7}}{9}AC} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 137. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $\frac{a\sqrt{42}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{42}}{10}$.

Đáp án A.



Ta có: $\widehat{SCH} = \widehat{(SC;(ABC))} = 60°$

Kẻ $Ax \parallel BC$.

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

Ta có $BC \parallel (SAN)$ và $BA = \frac{3}{2}$

nên $d(SA;BC) = d(B,(SAN)) = \frac{3}{2}d(H,(SAN))$.

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H,(SAN)) = HK$

$$AH = \frac{2a}{3},\ HN = AH.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

Vậy $d(SA;BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

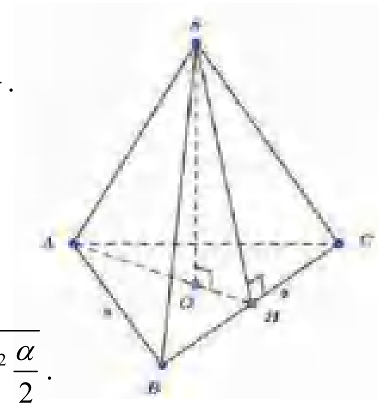
Câu 138. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $\widehat{CBS}=\alpha$. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và đáy. Tính $\sin\varphi$ theo α.

A. $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}\sqrt{9-12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **B.** $\sin\varphi=\sqrt{9-12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

C. $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}\sqrt{9-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **D.** $\sin\varphi=\dfrac{1}{3}\sqrt{9+12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Chọn A.

Gọi H là trung điểm BC, O là chân đường cao hạ từ S. Ta có $AO=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.



$\triangle SHB$ vuông tại H nên:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{BH}{SB}\Rightarrow SB=\frac{BH}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow SA=SB=SC=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Trong tam giác vuông SAO ta có:

$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{3}{9}a^2}=\frac{a}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Góc giữa cạnh bên và đáy là $\widehat{SAO}\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{SO}{SA}=\dfrac{1}{3}\sqrt{9-12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Câu 139. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a và tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SAO).

A. $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ **B.** $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **C.** $\varphi=\arcsin\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ **D.** $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$

Chọn A.

Gọi P là trung điểm của $AO\Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\Delta SAO\Rightarrow MP//SO$

$\Rightarrow MP\perp(ABCD)\Rightarrow$ Góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{MNP}=60°$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔPNC ta có:

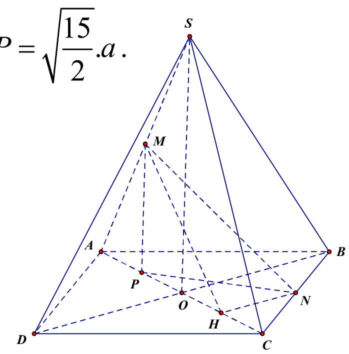
$$NP^2=CN^2+CP^2-2CN.CP.\cos 45°=\frac{5a^2}{8}$$

Trong tam giác vuông MNP ta có :

$$MN=\frac{PN}{\cos 60°}=\sqrt{\frac{5}{2}}.a \text{ và } PM=NP.\tan 60°=a\sqrt{\frac{15}{8}}\Rightarrow SO=2MP=\sqrt{\frac{15}{2}}.a.$$

Gọi H là trung điểm $CO\Rightarrow NH//BD\Rightarrow NH\perp AC$.

Mà $NH\perp SO\Rightarrow NH\perp(SAC)$ do đó $\widehat{(MN,(SAC))}=\widehat{NMH}$.



Ta có : $HN=\dfrac{1}{2}OB=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $MN=\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{2}}$ (tính trên)

Vậy trong ΔMHN ta có : $\sin\widehat{NMH}=\dfrac{NH}{MN}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

Nên nếu gọi φ là góc giữa MN và (SAO) thì: $\sin\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ hay $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.